ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ АССОЦИАЦИЯ КАФЕДР ФИЗИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗов РОССИИ

В.М.Анисимов, О.Н. Третьякова

Практический курс физики МЕХАНИКА

Под редакцией проф. Г.Г. Спирина

Допущено *Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебныхзаведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям*

Москва 2008

УДК 53 (075)
ББК 16.4.1
А67

Рецензенты:
Кафедра физики РГУ нефти и газа им. НИ. *Губкина,* зав. кафедрой доктор техн. наук, профессор *Б.В. Нагаев,* канд. физ.-мат. наук, доцент *А.В. Цыбульников,* канд. физ.-мат. наук, доцент *В.К Зародов*

Анисимов В.М., Третьякова О.Н.
А67 Практический курс физики. Механика / под. ред. проф. Г.Г. Спирина 5-е изд., испр. - М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 2008. - 168 С.: ил.

ISBN 978-5-903111-31-2

Учебное пособие написано в соответствин с программой курса физики для технических университетов.

В пособии кратко изложена теория, приведены задачи с решениями и задачи для самостоятельного решения с ответами по всем разделам механики, изучаемым в курсе общей физики.

Для студентов техинческих вузов.

УДК 53 (075)
ББК 16.4.1

ISBN 978-5-903111-31-2

Учебное пособие

Анисимов Владимир Михайлович
Третьякова Ольга Николаевна

Практический курс физики
Механика

Редактор О.В. Бессонова

Подписано в печать 03.07.2008 г.
Формат $60^{x}84/_{16}$ 10,625 П. л. 9,9 УСЛ.П.л.
Тираж 200 экз. Заказ N~ 959
Огпечатано в типографин
ВВИА имени профессора Н.Е. Жуковского
125190, г. Москва, ул. Планетная, Д. 3
тел.lфакс: 251-23-88, 614-29-90

Предисловие

Предлагаемое читателю учебное пособие предназначено для студентов технических вузов. Оно является первой частью единого в учебно-методическом плане «Практического курса физики» под редакцией профессора Г.Г. Спирина, создаваемого в рамках работы Ассоциации кафедр физики технических вузов России.

Каждый раздел пособия начинается с краткого изложения теории. Целью теоретической части раздела является не дублирование лекционного курса и даже не изложение основных концепций курса физики, а только напоминание основных понятий, определений, законов и формул, которые необходимы для решения задач.

Далее приводится несколько типовых задач с подробным их решением. Это даст возможность студентам ознакомиться самостоятельно с методами решения основных типов задач.

Затем в каждом разделе приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут использоваться для проведения практических занятий, выполнения расчетных работ (РР), проведения зачетов и экзаменов, и даны ответы к задачам. В завершении пособия предложены варианты РР для всех студентов, а также методические рекомендации по проведению дополнительных занятий для студентов с недостаточно высоким предварительным уровнем подготовки. Это предполагает использование пособия при двухуровневой методике обучения.

По этому пособию проводятся занятия на кафедре физики Московского авиационного института (государственного технического университета) со студентами всех специальностей технического профиля.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам д.т.н. профессору В.Б. Нагаеву, к.ф-м.н. доценту А.В. Цыбульникову и к.ф-м.н. доценту В.К. Зародову за внимательное прочтение пособия.

Авторы с благодарностью примут замечания и пожелания читателей, направленные на улучшение содержания книги, по адресу: 125871, Москва, Волоколамское шоссе, д.4, МАИ, кафедра физики, по электронному адресу: tretiyakova_olga@mail.ru или по телефону:
8-499- 158-86-98.

Введение. Основные понятия и определения механики

В каждом разделе курса общей физики для описания физического объекта или явления вводят некоторые абстрактные понятия, позволяющие перейти от реального процесса или явления к его физической модели. В механике такими понятиями являются материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальная точка – это тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи, т.е. размеры тела малы по сравнению с расстояниями, которые оно проходит.

Абсолютно твердое тело – это тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется в процессе движения.

Движение тела можно описать относительно выбранной системы отсчета.

Система отсчета – это тело отсчета, связанная с ним система координат и способ измерения времени.

Траектория – это линия, которую описывает точка (тело) в процессе движения.

Произвольное сложное движение твердого тела можно изучить, рассмотрев два основных типа движения – поступательное и вращение вокруг закрепленной оси.

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, остается параллельной самой себе в процессе движения. Это означает, что все точки тела движутся одинаково. Поэтому для описания поступательного движения твердого тела достаточно рассмотрения кинематики и динамики точки.

Вращение твердого тела вокруг закрепленной оси – это такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения.

Механическая система – это совокупность материальных точек и твердых тел. Поскольку твердое тело можно рассматривать как совокупность составляющих его точек, механическую систему называют также *системой материальных точек.*

Число степеней свободы механической системы i - это число независимых переменных, которые необходимо ввести, чтобы задать ее положение в пространстве. Для материальной точки $i = 3$, для твердого тела в общем случае $i = 6$.

1.Кинематика
1.1. Основные понятия и законы

В кинематике движение точки (тела) описывают без рассмотрения вызвавших это движение причин.

Существуют три способа описания движения точки – векторный, координатный и естественный. Последний используется в том случае, когда траектория движения точки известна.

Для описания движения первым и вторым способом часто используют прямоугольную декартову систему координат (рис. 1.1).

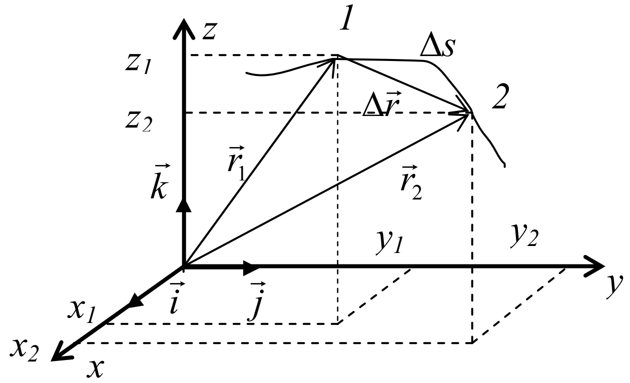


Рис.1.1

Положение точки в выбранной системе отсчета задают радиус-вектором, проведенным в данную точку из начала отсчета $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы (орты), задающие направления осей x, y, z.

Закон движения – это уравнение или система уравнений, позволяющее определить положение точки в любой момент времени.

В векторной форме он имеет вид $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

При координатном способе закон движения – это система скалярных уравнений вида

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

При движении вдоль заданной кривой на траектории выбирается начало отсчета, выбирается направление движения, принятое за положительное, и положение точки на кривой определяется дуговой координатой s, которая может быть как положительной, так и отрицательной. При естественном способе закон движения точки вдоль заданной траектории имеет вид $s = s(t)$.

Существуют три основные кинематические характеристики движения – перемещение, скорость и ускорение.

Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ точка переместилась из положения 1 в положение 2 (см. рис. 1.1). Обозначим $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$.

Перемещение – это вектор $\Delta\vec{r}$,соединяющий начальное и конечное положение точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$, где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

Вектор средней скорости – это отношение вектора перемещения точки к промежутку времени, за который оно было совершено $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Направление $\langle\vec{v}\rangle$ совпадает с $\Delta\vec{r}$.

Скорость *(мгновенная скорость)* – это векторная величина $\vec{v}$, равная производной перемещения по времени $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, где v_x, v_y, v_z- проекции вектора скорости на оси координат. Вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории.

Модуль вектора скорости $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Поскольку модуль элементарного перемещения $|d\vec{r}|$ равен соответствующей длине дуги траектории ds , $v = |\vec{v}| = \dfrac{ds}{dt}$.

Путь – это скалярная величина Δs, равная расстоянию, пройденному точкой вдоль траектории, $\Delta s \geq 0$,

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}| dt .$$

Средняя путевая скорость при неравномерном ($v \neq const$) движении на данном участке Δs - это скалярная величина, равная численному значению скорости такого равномерного движения , при котором на прохождение пути затрачивается то же время Δt, что и при заданном неравномерном движении $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

В общем случае $v_{cp} \neq |\langle\vec{v}\rangle|$, т.к. $\Delta s \neq |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Вектор среднего ускорения – это отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$ к промежутку времени, за который это изменение произошло $\langle\vec{a}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Направление $\langle\vec{a}\rangle$ совпадает с направлением $\Delta\vec{v}$.

Ускорение *(мгновенное ускорение)* – векторная величина $\vec{a}$, равная производной от скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} ,$$

где

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} .$$

Модуль вектора ускорения

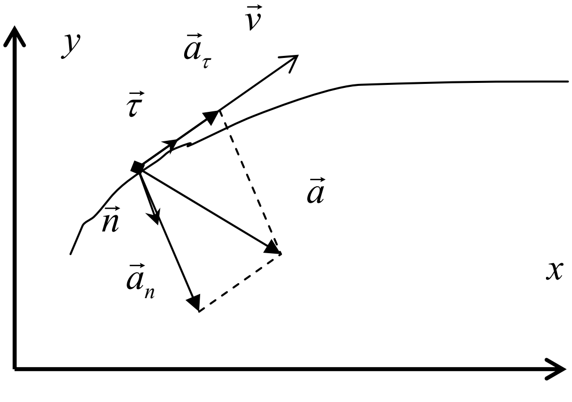


Рис .1.2.

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ .$$

В частном случае плоского движения по криволинейной траектории в плоскости *ХОУ* можно ввести прямоугольную декартову *сопутствующую* систему координат, начало отсчета которой совпадает с движущейся точкой, а оси задаются единичными векторами нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ (рис. 1.2).

Тогда ускорение можно представить в виде

$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau} = \dfrac{v^2}{R}\vec{n} + \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{\tau}$, где R – радиус кривизны траектории в данной точке. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует изменение направления скорости, а тангенциальное (касательное) $\vec{a}_\tau$ характеризует изменение величины скорости.

Модуль ускорения в данном случае равен

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси основные кинематические характеристики движения – угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение, которые вводятся аналогично соответствующим характеристикам поступательного движения.

Положение твердого тела при вращении вокруг фиксированной оси определяется *углом поворота* или угловым перемещением. Бесконечно малому углу поворота $d\varphi$ соответствует вектор $d\vec{\varphi}$. Направление вращения и направление вектора связаны правилом правого винта (рис.1.3).

Угловая скорость (мгновенная угловая скорость) – это производная от угла поворота по времени $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $d\vec{\varphi}$.

Угловое ускорение – это производная от угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\vec{\omega}$. Если вращение происходит против часовой стрелки при увеличении угловой скорости ($\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$) вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлен вверх, а при уменьшении – вниз (см. рис.1.3).

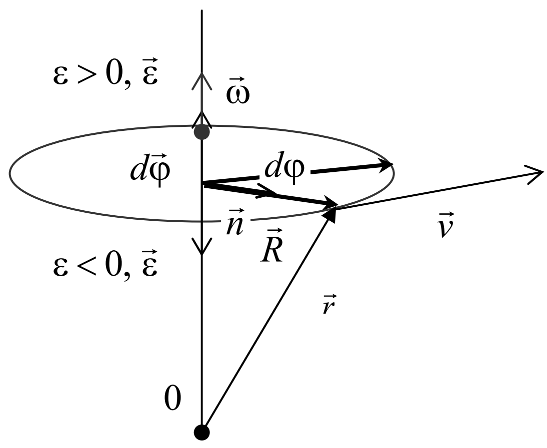


Рис.1.3.

Связь между угловыми и линейными величинами, характеризующими вращение твердого тела вокруг закрепленной оси или движение материальной точки по окружности радиуса R (см. рис.1.3).

Длина дуги окружности $S = \varphi R$.

Скорость $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, $v = \omega R$.

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, $a_\tau = \varepsilon R$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n = -\omega^2 R \vec{n}$, $a_n = \omega^2 R$.

Равномерное движение вдоль OX $x = x_0 + vt$ $v = const$ $a = 0$	Равномерное вращение $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ $\omega = const$ $\varepsilon = 0$
Равноускоренное движение $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ $v = v_0 + at$ $a = const$	Равноускоренное вращение $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\varepsilon = const$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1. Лодка, имеющая скорость v_0, спускает парус в момент времени t_0 и продолжает двигаться так, что скорость лодки обратно пропорциональна времени *t.* Показать, что ускорение лодки *a* на этом участке движения пропорционально квадрату ее скорости.

Решение. В соответствии с условиями задачи $v = \frac{v_0 t_0}{t}$ (при этом начало отсчета t и t_0 одно и то же). Тогда мгновенное значение ускорения $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0 t_0}{t}\right) = -\frac{v_0 t_0}{t^2}$. Так как $t = \frac{v_0 t_0}{v}$, то $a = -\frac{v^2}{v_0 t_0}$ (при $t > t_0$).

Задача 1.2. Кинематическое уравнение движения материальной точки по прямой (ось x) имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$м, $B = 2$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с³. Для момента времени $t_1 = 2$с определить: 1) координату x_1 точки, 2) мгновенную скорость v_1,
3) мгновенное ускорение a_1.

Решение. 1.Координату точки, для которой известно кинематическое уравнение движения, найдем, подставив в уравнение движения вместо t заданное значение времени t_1:

$$x_1 = A + Bt_1 + Ct_1^3 = 4 \text{ м}.$$

2. Мгновенную скорость в произвольный момент времени найдем, продифференцировав координату x по времени: $v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$.

Тогда в заданный момент времени мгновенная скорость

$$v_1 = B + 3Ct_1^2 = -4 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» указывает на то, что в момент времени $t_1 = 2$с точка движется в отрицательном направлении координатной оси.

3. Мгновенное ускорение в произвольный момент времени найдем, взяв вторую производную от координаты *x* по времени:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6Ct.$$

Мгновенное ускорение в заданный момент времени равно

$$a = 6Ct_1 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» указывает на то, что вектор направлен в сторону, противоположную координатной оси x, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Задача 1.3. Две частицы (1 и 2) движутся со скоростями v_1 и v_2 (рис. 1.4) по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения O. В момент $t=0$ они находились на расстояниях l_1 и l_2 от точки O. Через сколько времени расстояние между частицами станет минимальным? Чему оно равно?

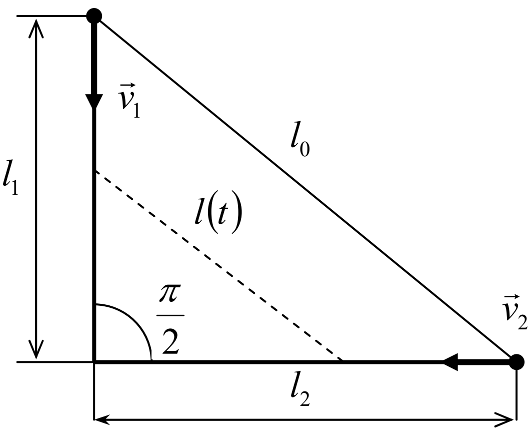


Рис.1.4.

Решение. Начальное расстояние между частицами равно $l_0=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$. Через промежуток времени t частицы пройдут расстояние $v_1 t$ и $v_2 t$, и расстояние между частицами станет равным

$$l(t)=\sqrt{l_1^2(t)+l_2^2(t)}=\sqrt{(l_1-v_1t)^2+(l_2-v_2t)^2}\ .$$

Минимальным расстояние между частицами будет тогда, когда подкоренное выражение минимально. Обозначим

$$z=(l_1-v_1t)^2+(l_2-v_2t)^2.$$

Исследуем функцию z на экстремум

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\left(l_1^2-2l_1v_1t+v_1^2t^2+l_1^2-2l_2v_2t+v_2^2t^2\right)=-2l_1v_1+2v_1^2t-2l_2v_2+2v_2^2t=0,$$

$$l_1v_1+l_2v_2=t\left(v_1^2+v_2^2\right),\quad t_{z\min}=\frac{l_1v_1+l_2v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Тогда минимальное расстояние между частицами будет

$$l_{\min}=\sqrt{\left(l_1-v_1\frac{l_1v_1+l_2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2+\left(l_2-v_2\frac{l_1v_1+l_2v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(l_1v_1^2+l_1v_2^2-l_1v_1^2-l_2v_1v_2\right)^2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}+\frac{\left(l_2v_1^2+l_2v_2^2-l_2v_2^2-l_1v_1v_2\right)^2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{v_2^2\left(l_1v_2-l_2v_1\right)^2+v_1^2\left(l_2v_1-l_1v_2\right)^2}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(l_1v_2-l_2v_1\right)^2\left(v_2^2+v_1^2\right)}{\left(v_1^2+v_2^2\right)^2}}=$$

$$= \frac{\left|\left(l_1 v_2 - l_2 v_1\right)\right|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Задача 1.4. Частица перемещается в пространстве так, что ее радиус-вектор изменяется по закону $\vec{r} = t\vec{i} + 2\vec{j} - (t+1)\vec{k}\,[\text{м}]$.

Найти вектор средней скорости частицы соответствующий интервалу времени (t, $2t$).

Решение. По определению, вектор средней скорости перемещения:

$\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, где $\Delta t = 2t - t = t$,

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2t) - \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j} - (2t+1)\vec{k} - t\vec{i} - 2\vec{j} + (t+1)\vec{k} = t\vec{i} - t\vec{k}\,[\text{м}].$$

Тогда $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{t\vec{i} - t\vec{k}}{t} = \vec{i} - \vec{k}\left[\text{м}/\text{с}\right]$.

Задача 1.5. Две материальные точки одновременно начали движение по законам $\vec{r}_1 = at^2\vec{i} + \left(bt^3 + ct^2\right)\vec{j}\,[\text{м}]$, $\vec{r}_2 = dt^3\vec{i} + \left(et^4 + ft\right)\vec{j}\,[\text{м}]$. Определить угол между ускорениями точек в момент t_1 после начала движения.

Решение. По определению скорости найдем законы изменения скоростей материальных точек $\vec{v}_1 = 2at\vec{i} + \left(3bt^2 + 2ct\right)\vec{j}\left[\text{м}/\text{с}\right]$; $\vec{v}_2 = 3dt^2\vec{i} + \left(4et^3 + f\right)\vec{j}\left[\text{м}/\text{с}\right]$.

Дифференцируя полученные зависимости, также по определению получаем ускорения материальных точек в любой момент времени

$$\vec{a}_1 = 2a\vec{i} + (6bt + 2c)\vec{j}\left[\text{м}/\text{с}^2\right]; \quad \vec{a}_2 = 6dt\vec{i} + 12et^2\vec{j}\left[\text{м}/\text{с}^2\right].$$

Обозначим φ_1, φ_2 - углы, которые составляют векторы ускорения $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ с осью OX. Очевидно, что

$$\text{tg}\varphi_1 = \frac{a_{y1}}{a_{x1}} = \frac{6bt + 2c}{2a} = \frac{3bt + c}{a} = \frac{3bt_1 + c}{a},$$

$$\text{tg}\varphi_2 = \frac{a_{y2}}{a_{x2}} = \frac{12et^2}{6dt} = \frac{2et}{d} = \frac{2et_1}{d}.$$

Угол между ускорениями

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{arctg}\left(\frac{3bt_1 + c}{a}\right) - \text{arctg}\left(\frac{2et_1}{d}\right).$$

Задача 1.6. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b}t(1 - \alpha t)[\text{м}]$, где $\vec{b}$ - постоянный вектор, α -

положительная постоянная. Найти: а) скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ как функцию времени; б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь s, который она пройдет при этом.

Решение. Вектор скорости $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}(1 - 2\alpha t)\left[{}^{\text{м}}\!/\!_{\text{с}}\right]$; вектор ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -2\alpha\vec{b}\left[{}^{\text{м}}\!/\!_{\text{с}^2}\right]$, т.е. движение равнозамедленное. Возвращение частицы к моменту времени Δt в исходную точку означает $\vec{r}(\Delta t) = 0$; $(1 - \alpha\Delta t) = 0$; $\Delta t = \dfrac{1}{\alpha}[\text{с}]$.

Для нахождения пройденного пути определим время остановки частицы: $v = 0$; $(1 - 2\alpha t_{ост}) = 0$; $t_{ост} = \dfrac{1}{2\alpha}[\text{с}]$.

Смещение частицы к моменту остановки будет

$|\Delta\vec{r}_{ост}| = bt_{ост}(1 - \alpha t_{ост}) = b\dfrac{1}{2\alpha}\left(1 - \alpha\dfrac{1}{2\alpha}\right) = \dfrac{b}{4\alpha}$, а весь пройденный путь будет $s = |\vec{r}(t_{ост}) - \vec{r}(0)| + |\vec{r}(\Delta t) - \vec{r}(t_{ост})| = 2|\Delta\vec{r}_{ост}| = \dfrac{b}{2\alpha}\ [\text{м}]$.

Задача 1.7. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \alpha\sin(5t)\vec{i} + \beta\cos^2(5t)\vec{j}$. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

Решение. Находим компоненты радиус-вектора

$x(t) = \alpha\sin(5t),\ y(t) = \beta\cos^2(5t) = \beta[1 + \cos(10t)]/2$.

Определяем компоненты вектора скорости

$v_x(t) = 5\alpha\cos(5t),\ v_y(t) = -5\beta\sin(10t)$ и вектора ускорения

$a_x(t) = -25\alpha\sin(5t),\ a_y(t) = -50\beta\cos(10t)$.

Для получения уравнения траектории исключим время t из системы уравнений $x(t)$ и $y(t)$. Материальная точка движется по параболе $y = 3 - \dfrac{3}{4}x^2$.

Задача 1.8. Частица движется в плоскости *XOУ* со скоростью $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты осей *X* и *У*; α, β - постоянные. В начальный момент частица находилась в точке $x = y = 0$. Найти:
1) уравнение траектории частицы $y(x)$; 2) радиус кривизны траектории в зависимости от *x*.

Решение. 1. Найдем уравнение движения частицы в декартовых координатах и исключим из них время t. По условию $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, откуда

$$\left.\begin{array}{l} v_x=\alpha \\ v_y=\beta x \end{array}\right\},\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}.$$

По определению, $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, или в декартовых координатах

$v_x=\dfrac{dx}{dt}$; $v_y=\dfrac{dy}{dt}$. Т.к. $dx=v_xdt$, $x=\int v_xdt=\int \alpha dt=\alpha t+C_1$.

Константу C_1 интегрирования найдем, используя начальные условия: $\left.\begin{array}{l} t=0 \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=0+C_1\Rightarrow C_1=0.$ Следовательно, $x=\alpha t$.

Так как $dy=v_ydt$, то $y=\int v_ydt=\int \beta x dt=\int \alpha\beta t dt=\dfrac{1}{2}\alpha\beta t^2+C_2$.

Константу интегрирования найдем аналогично предыдущему:

$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=0+C_2\Rightarrow C_2=0.$ Следовательно, $y=\dfrac{1}{2}\alpha\beta t^2$.

Найдем уравнение траектории $y(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha t \\ y=\dfrac{1}{2}\alpha\beta t^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} t=\dfrac{x}{\alpha} \\ y=\dfrac{\alpha\beta}{2}\dfrac{x}{\alpha^2}^{2}=\dfrac{\beta}{2\alpha}x^2. \end{array}$$

Траектория частицы представляет собой параболу.

График траектории изображен на рис. 1.5.

2. Чтобы определить радиус кривизны траектории R, надо воспользоваться выражением для нормального ускорения $a_n=\dfrac{v^2}{R}$, откуда $R=\dfrac{v^2}{a_n}$.

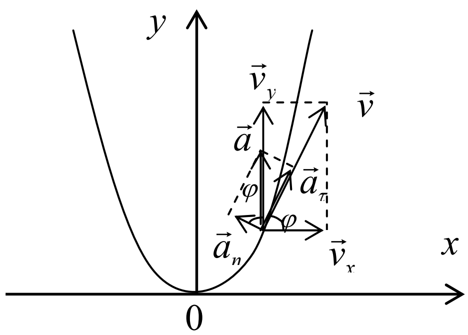


Рис.1.5.

Нормальное ускорение a_n можно найти из следующих соотношений:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2},\quad a_\tau=\frac{dv}{dt},\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2},\quad a_x=\frac{dv_x}{dt},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}.$$

Так как $v_x=\alpha=const$, $a_x=0$, $a_y=\dfrac{dv_y}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\beta\alpha$, то $a=a_y=\beta\alpha$.

Так как $a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$, то тангенциальное ускорение $a_\tau=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\alpha^2\beta x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2x^2}}$, а нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}.$$

Радиус кривизны $R = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Отметим, что для определения нормального ускорения можно использовать формулу $a_n = a\cos\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$.

Как следует из рис.1.5 $\cos\varphi = \frac{v_x}{v}$, т.е. $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}$.

Используя $a_n = a\cos\varphi$, получаем $a_n = \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 x^2}}$, что совпадает с ранее полученной формулой.

Задача 1.9. Точка движется, замедляясь, по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости v по закону $a = \alpha\sqrt{v}$, где α - положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна v_0. Какой путь s она пройдет до остановки? За какое время τ этот путь будет пройден?

Решение. Для решения задачи надо знать зависимости $v(t)$ и $s(t)$.Зависимость $v(t)$ найдем, используя выражения $a = -\frac{dv}{dt}; \quad a = \alpha\sqrt{v}$.

Знак «минус» соответствует тому, что скорость точки убывает со временем ($dt > 0, dv < 0$). Приравнивая правые части, получим дифференциальное уравнение

$\alpha\sqrt{v} = -\frac{dv}{dt}$, разделяя переменные, имеем $\frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha dt$.

Проинтегрируем с учетом начальных условий ($t = 0, v = v_0$)

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = -\alpha\int_0^t dt,\ 2\sqrt{v}\Big|_{v_0}^{v} = -\alpha t\Big|_0^t,\quad 2\left(\sqrt{v} - \sqrt{v_0}\right) = -\alpha t,\ \sqrt{v} = -\frac{1}{2}\alpha t + \sqrt{v_0}.$$

Возводя в квадрат, окончательно получим

$$v(t) = \frac{1}{4}\alpha^2 t^2 - \alpha\sqrt{v_0}t + v_0.$$

Зависимость пути от времени $s(t)$ найдем с помощью формулы для модуля скорости $v = \frac{ds}{dt}$, из которой следует

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(\frac{1}{4}\alpha^2 t^2 - \alpha\sqrt{v_0}t + v_0\right)dt,\quad s(t) = \frac{\alpha^2}{12}t^3 - \frac{\alpha\sqrt{v_0}}{2}t^2 + v_0 t.$$

Исходя из того, что при $t = \tau$ $v = 0$, имеем

$$\frac{1}{4}\alpha^2 t^2 - \alpha\sqrt{v_0}t + v_0 = 0,$$

откуда $\tau = 2\frac{\sqrt{v_0}}{\alpha}$.

Пройденный путь будет равен $s = \frac{2v_0\sqrt{v_0}}{3\alpha}$.

На рис.1.6 изображен график зависимости $v(t)$, представляющий собой параболу. Искомый путь s численно равен площади заштрихованной фигуры.

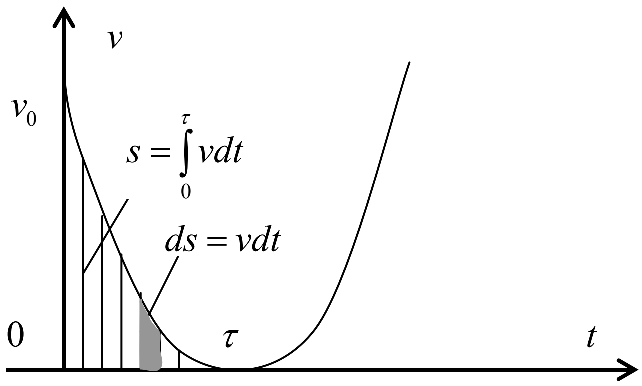


Рис.1.6.

Задача 1.10. При движении автомобиля его колесо радиуса r движется по окружности радиуса $R = AB$ в горизонтальной плоскости. При этом центр колеса точка A перемещается с постоянной скоростью v. Определить угловую скорость и угловое ускорение колеса, а также угол, который составляет вектор угловой скорости с вертикалью.

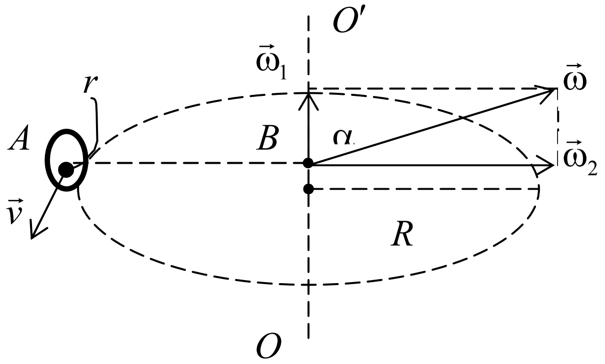


Рис.1.7

Решение. Движение колеса (рис.1.7) представим как сумму вращательных движений: с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг горизонтальной оси AB и с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вместе с осью AB вокруг вертикальной оси OO'.Результирующий вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, а его модуль $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.

Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с автомобилем. Тогда колесо будет вращаться вокруг неподвижной оси AB, а точки дороги, соприкасающиеся с колесом, будут иметь скорость $v' = -v$. Так как скольжение колеса отсутствует, то его наружные точки будут иметь скорость v', равную по модулю v. Тогда выражение для ω примет вид

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2} = \frac{v}{r}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Угол между вектором $\vec{\omega}$ и вертикалью $\alpha = \operatorname{arctg}\omega_2/\omega_1 = \operatorname{arctg} R/r$.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ есть скорость изменения угловой скорости $\vec{\omega}$, при этом модуль вектора ε не меняется.

Конец вектора $\vec{\omega}$ описывает в горизонтальной плоскости окружность радиуса ω_2 за время, равное периоду T_1 вращения колеса вокруг оси OO'. Поэтому $\varepsilon = \dfrac{2\pi\omega_2}{T_1} = \omega_1\omega_2 = \dfrac{v^2}{rR}$.

Задача 1.11. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость ω зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - b\varphi$, где ω_0 и b положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол поворота $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени : 1) угла поворота; 2) угловой скорости.

Решение. Угол поворота вращающегося твердого тела за время t

$\varphi(t) = \int\limits_0^t \omega(t)dt$, где $\omega(t)$ - зависимость от времени угловой скорости. Для нахождения $\omega(t)$ воспользуемся зависимостью $\omega(\varphi)$

$$\omega = \omega_0 - b\varphi .$$

Продифференцируем ее по времени t

$\dfrac{d\omega}{dt} = -b\dfrac{d\varphi}{dt}$, откуда получим дифференциальное уравнение вида $\dfrac{d\omega}{dt} = -b\omega$. Решим его, разделив переменные $\dfrac{d\omega}{\omega} = -b \cdot dt$.

Интегрируя обе части уравнения, найдем его решение в виде

$$\ln\omega = -bt + C_1 .$$

Обозначим $C_1 = \ln C,\ \ln\omega - \ln C = -bt;\ \ \ln\omega/C = -bt$. Откуда $\omega = Ce^{-bt}$.

Постоянную интегрирования C найдем из начального условия. Так как при $t = 0$ $\varphi = 0$, то $\omega = \omega_0$, откуда $\omega(t) = \omega_0 e^{-bt}$.

Поскольку, по определению, $\omega = d\varphi/dt$, то $\omega dt = d\varphi$, интегрируя это выражение получим $\varphi(t) = \int\limits_0^t \omega(t)dt = \int\limits_0^t \omega_0 e^{-bt}dt$.

Окончательно, зависимость угла поворота от времени имеет вид $\varphi(t) = \dfrac{\omega_0}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.12.Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \alpha t^3 \vec{i} + \beta t^2 \vec{j} + \gamma t \vec{k}\,[\text{м}]$, где $\alpha = 1\,\text{м}/\text{с}^3$, $\beta = 2\,\text{м}/\text{с}^2$, $\gamma = 4\,\text{м}/\text{с}$. Найти расстояние точки от начала координат через две секунды после начала движения.

1.13.Частица движется по закону $\vec{r} = B\sin\omega t\vec{i} + A\sin 2\omega t\vec{j}\,[\text{м}]$, где A, B, ω - постоянные. Найти уравнение траектории.

1.14.Закон движения точки имеет вид $\vec{r} = \alpha t^2 \vec{i} + \beta t^3 \vec{j}\,[\text{м}]$, где $\alpha = 1\,\text{м/с}^2$, $\beta = 1\,\text{м/с}^3$. Найти угол между радиус-вектором и вектором скорости в момент времени $t_1 = 1\,\text{с}$.

1.15.Материальная точка движется по закону $\vec{r} = t^2\vec{i} + t\vec{j}\,[\text{м}]$. В какой момент времени угол между радиус-вектором и вектором ускорения будет равен $60°$?

1.16. Две материальные точки движутся в плоскости так, что координаты первой точки $x_1 = \cos 2\pi t\,[\text{м}]$, $y_1 = \sin 2\pi t\,[\text{м}]$, а радиус-вектор второй $\vec{r}_2 = 2t\vec{i} + \left(0{,}5 - 2t^2\right)\vec{j}\,[\text{м}]$. Чему равно расстояние между точками в момент времени $t = 0{,}5\,\text{с}$?

1.17.Уравнение траектории материальной точки имеет вид $y = 0{,}2x^2 + 15x^3$, а $v_x = 0{,}5\,\text{м/с}$. Считая, что в начальный момент точка находилась в начале координат, определить v_y в момент времени $t = 1\,\text{с}$.

1.18. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = t\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 3t^3\vec{k}\,[\text{м}]$. В какой момент времени ускорение точки будет равно $a = 22\,\text{м/с}^2$?

1.19. Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r} = \alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + \beta\sin[2\pi t]\vec{j}\,[\text{м}]$, где $\alpha = 2\,м$, $\beta = 0{,}5\,\text{м}$. Найти величину вектора скорости точки в момент времени $t = 1\,\text{с}$.

1.20. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \alpha\sin(2\pi t)\vec{i} + \beta\cos(3\pi t)\vec{j}\,[\text{м}]$, где α, β - постоянные. Определить зависимость от времени векторов скорости и ускорения точки.

1.21. Законы движения двух материальных точек имеют вид $\vec{r}_1 = (2t-1)\vec{i}\,[\text{м}]$, $\vec{r}_2 = (8-t)\vec{j}\,[\text{м}]$. В какой момент времени расстояние между точками будет минимальным? Чему оно равно?

1.22. Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r} = (\alpha + \beta t)\vec{i} + \left(\gamma t + \delta t^2\right)\vec{j}\,[\text{м}]$, где $\beta = 3\,\text{м/с}$, $\gamma = 4\,\text{м/с}$, $\delta = -1\,\text{м/с}^2$. Найти векторы скорости и ускорения и угол между ними в момент времени $t_1 = 2\,\text{с}$.

1.23. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \left(5 - 4t^2\right)\vec{j}\,[\text{м}]$. Найти перемещение за вторую секунду движения.

1.24. Частица движется по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + (\beta - \gamma t)\vec{j}\,[\text{м}]$, где $\alpha = 1\,\text{м/с}$, $\beta = 4\,\text{м}$, $\gamma = 3\,\text{м/с}$. Найти уравнение траектории и вектор перемещения за первые три секунды движения.

1.25. Частица движется так, что координаты зависят от времени следующим образом $x = (0{,}4t + 1)[\text{м}]$, $y = 0{,}3t\,[\text{м}]$. Найти угол между радиус-вектором и скоростью частицы в момент времени $t_1 = 1\,\text{с}$.

1.26. Материальная точка движется так, что координаты зависят от времени по законам $x = t(1 - t)[\text{м}]$, $y = t(1 + 2t)[\text{м}]$. В момент времени $t_1 = 1\text{с}$ определить ускорение точки и угол между векторами скорости и ускорения.

1.27.Координаты частицы зависят от времени по законам $x = 0{,}3t^3\,[\text{м}]$, $y = \left(1 - 0{,}3t^2\right)[\text{м}]$. Найти величину ее скорости и ускорения для момента времени $t_1 = 1\,\text{с}$.

1.28.Частица движется так, что радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^3\vec{j}\,[\text{м}]$, где α, β - постоянные. Найти уравнение траектории и зависимости от времени вектора ускорения и его модуля.

1.29. Координаты частицы зависят от времени по законам $x = A\cos(\omega t)[\text{м}]$, $y = A\cos(2\omega t)[\text{м}]$, где A, ω - постоянные. Найти уравнение траектории и зависимости от времени векторов скорости и ускорения.

1.30. Материальная точка движется так, что радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = A\cos(\omega t)\vec{i} + B\cos(\omega t + \varphi_0)\vec{j}\,[\text{м}]$, где A, B, φ_0, ω - постоянные. Найти уравнение траектории.

1.31. Частица движется так, что радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r} = A\sin(\omega t)\vec{i} + A\cos(2\omega t)\vec{j}\,[\text{м}]$, где A, ω - постоянные. Найти уравнение траектории и зависимость от времени величины скорости.

1.32. Материальная точка начала движение из начала координат и движется так, что ее скорость зависит от времени по закону $\vec{v}_1 = \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\vec{i} + \gamma t^3\vec{j}\,[\text{м/с}]$. Одновременно вторая точка начала движение и движется так, что радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r}_2 = \delta t^3\vec{i} + \theta t^4\vec{j}\,[\text{м}]$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$ - постоянные. Найти угол φ между ускорениями точек через промежуток времени τ после начала движения.

1.33. С летящего горизонтально на высоте h_0 со скоростью v_0 вертолета сброшен груз. На какой высоте скорость груза направлена под углом α к горизонту? Определить радиус кривизны траектории в этой точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.34.Камень брошен горизонтально. Через τ после броска скорость камня оказалась направлена под углом α к горизонту. Найти величину скорости в этот момент. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.35.Тело брошено с высоты h_0 со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти, на каком расстоянии по горизонтали от места броска упадет тело и чему будет равен радиус кривизны траектории в точке падения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.36. Тело брошено с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорения через Δt после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.37. Тело брошено с поверхности земли со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти радиус кривизны в высшей точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.38. Под каким углом к горизонту и с какой скоростью нужно бросить тело с поверхности земли, чтобы радиус кривизны траектории в высшей точке R = 10 м оказался равен максимальной высоте подъема тела над поверхностью земли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.39. Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \alpha t^3 \vec{i} + \beta t \vec{j}\,[\text{м}]$, где $\alpha = 0{,}03\,\text{м}/\text{с}^2$, $\beta = 0{,}02\,\text{м}/\text{с}$. Чему будет равен радиус кривизны траектории в момент времени $t_1 = 2\,\text{с}$.

1.40.С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту нужно бросить камень, чтобы выбросить его из колодца глубиной h радиуса R, находясь на дне колодца около его стены? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.41.Автомобиль прошел путь S = 100 км. В течение первого часа он двигался со скоростью v = 80 км/ч , затем остановился на полчаса , и продолжил движение до конечного пункта со скоростью в два раза меньшей начальной. Определить среднюю путевую скорость на всем пути.

1.42.Найти среднюю путевую скорость мотоциклиста, если на прохождение трех участков трассы, длины которых относятся как 3:5:7 , он затратил промежутки времени, находящиеся в отношении 5:7:9. Скорость на первом участке пути v = 100 км/ч, на последующих участках он также двигался равномерно.

1.43.Материальная точка совершила три последовательных перемещения вдоль оси *X,* величины которых относятся как 1:2:3, поворачивая в конце каждого участка на угол α = 30° к предыдущему направлению движения со скоростями v_3 = 30 м/с, v_2 = 20 м/с и v_1 = 10 м/с соответственно. Найти среднюю путевую скорость и вектор средней скорости.

1.44.Материальная точка движется по закону $\vec{r} = \left(1 - 3t + t^2\right)\vec{i}\,[\text{м}]$. Найти среднюю путевую скорость за три секунды после начала движения.

1.45.Точка движется по криволинейной траектории так, что криволинейная координата меняется по закону $s = 2 + t - 3t^2[\text{м}]$. Найти среднюю путевую скорость в промежутке времени от $t_1 = 0{,}5\,\text{с}$ до $t_2 = 1\,\text{с}$.

1.46.Радиус-вектор частицы меняется по закону $\vec{r} = \vec{\tau}\left(t - \alpha t^2\right)$, где α - постоянная, $\vec{\tau}$ - постоянный вектор. Через какое время после начала движения частица вернется в исходную точку, и какой путь она при этом пройдет?

1.47.Частица начала движение из начала координат так, что ее скорость меняется по закону $\vec{v} = \vec{v}_0\left(1 - t/\tau\right)$, где $\vec{v}_0$ - начальная скорость, $v_0 = 0{,}1\,\text{м/с}$, $\tau = 5\,\text{с}$. В какие моменты времени частица будет находиться на расстоянии 0,1 м от начала координат?

1.48. Камень падает с высоты h_0 = 3000 м так, что скорость меняется по закону $v = g\sqrt{\alpha t}$, где $\alpha = 1\,\text{с}, g = 9{,}81\,\text{м/с}$. Найти высоту, на которой ускорение камня станет равно $a = 0{,}1g$.

1.49.Материальная точка движется с начальной скоростью $v_0 = 18\,\text{м/с}$. Ее ускорение начинает изменяться по закону $\vec{a} = -\dfrac{\alpha v_0}{\left(t + \alpha\right)^2}\vec{i}\,\left[\text{м/с}^2\right]$, $\alpha = 1\,\text{с}$. Какой путь пойдет точка до остановки?

1.50.Материальная точка начинает движение по окружности радиуса R в момент времени t_0 = 0. Какой путь пройдет точка к тому моменту времени, когда угол между векторами скорости и ускорения станет равным $\alpha = 45°$, если скорость точки меняется по закону $v = kt^2$, где k - положительная постоянная?

1.51.Точка начинает движение из начала координат со скоростью, закон изменения которой представлен в виде $\vec{v} = \alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + \beta\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\vec{j}\,[\text{м/с}]$, где $\alpha = 2\beta = \pi[\text{м/с}]$. Найти угол между вектором ускорения и радиус-вектором в момент времени $t_1 = 1\,\text{с}$.

1.52.Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α - положительная постоянная. Найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы.

1.53.Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $\vec{v}_0$. За какое время она остановится, и какой путь до остановки пройдет, если начнет торможение с ускорением, величина которого изменяется по закону $a = \beta\sqrt{v}, \beta = const, \beta > 0$?

1.54.Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли с постоянной вертикальной скоростью v_0. При этом дует горизонтальный ветер, благодаря которому шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $v_x = \alpha y$, где α - постоянная, y - высота подъема. Найти на какое расстояние s по горизонтали будет снесен ветром шар к моменту времени, когда он поднимется на высоту h.

1.55.В условиях предыдущей задачи найти зависимость от высоты подъема величины нормального, тангенциального и полного ускорений шара.

1.56.Материальная точка начинает движение из начала координат в плоскости XOY со скоростью $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$, где α, β - постоянные. Найти зависимость радиус-вектора точки от времени.

1.57.В условиях предыдущей задачи найти уравнение траектории точки.

1.58.В условиях задачи 1.56 найти радиус кривизны траектории в зависимости от x.

1.59.Частица движется по дуге окружности радиуса R. Ее скорость зависит от пройденного пути s по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, где α - постоянная. Найти угол между векторами ускорения и скорости в зависимости от s.

1.60.Материальная точка начинает движение по плоскости в момент $t = 0$ с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = \alpha$ и нормальным ускорением, изменяющимся по закону $a_n = \beta t^4$. Найти зависимость величины полного ускорения точки от пройденного пути s.

1.61.Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}2\,\text{рад/с}$. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент времени $t = 2{,}5\,\text{с}$, если скорость этой точки в этот момент равна $v = 0{,}65\,\text{м/с}$.

1.62.Колесо радиуса $R = 0{,}1\,\text{м}$ вращается вокруг неподвижной оси так, что его угол поворота меняется по закону $\varphi = 1 + 2t - t^2 [\text{рад}]$. Найти зависимость от времени угловой скорости, углового ускорения и линейной скорости точек, лежащих на ободе колеса.

1.63.Диск радиуса $R = 0{,}1\,\text{м}$ вращается вокруг закрепленной оси так, что его угол поворота меняется по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - t [\text{рад}]$. Найти нормальное, тангенциальное и полное ускорения точек, лежащих на расстоянии $R/4$ от края диска в момент времени $t = 10\,\text{с}$.

1.64. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = 6\pi(2t - t^3)[\text{рад}]$. Сколько полных оборотов сделает диск до момента изменения направления вращения ?

1.65. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 40\,\text{м}$ так, что длина дуги траектории, пройденная точкой, зависит от времени по закону $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 [\text{м}]$, где $\alpha = 5\text{м}, \beta = 12\,\text{м/с}, \gamma = -0{,}5\,\text{м/с}^2$. Найти скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорения точки в момент времени $t_1 = 4\,\text{с}$.

1.66. Частица движется по окружности радиуса R так, что пройденный ею путь зависит от времени по закону $s = \alpha t + \beta t^3 [м]$, где $\alpha = 10\,\text{м/с}, \beta = 0{,}1\,\text{м/с}^2$. Найти линейную и угловую скорости, полное линейное и угловое ускорения в момент времени $t_1 = 2\,\text{с}$.

1.67.Точка *А* начала двигаться вслед за точкой *В* по окружности радиуса $R = 10\,\text{м}$ со скоростью $v_A = 3\,\text{м/с}$, когда расстояние между ними по дуге было равно четверти длины окружности. Скорость точки *В* равна $v_B = 4t\,\text{м/с}$. Через какое время расстояние между ними увеличится до трети длины окружности? Чему будет равен в этот момент угол между ускорениями точек?

1.68. Два диска, соединенные невесомым нерастяжимым ремнем, равномерно вращаются без скольжения ремня на дисках. Первый диск радиуса $R = 0{,}2\,\text{м}$ вращается с частотой n = 60 об/мин, второй – с угловой скоростью $\omega_2 = 251{,}2$ рад/с. Найти линейную скорость точек ремня и радиус второго диска.

1.69.Автомобиль въезжает на закругленный участок дороги радиуса $R = 1\,\text{км}$ с начальной скоростью $v_0 = 54\,\text{км/ч}$, и двигаясь с постоянным тангенциальным ускорением, проходит за $t_1 = 30\,\text{с}$ путь $s = 600\,\text{м}$. Найти скорость и ускорение автомобиля в конце участка пути.

1.70.Колесо радиуса $R = 0{,}5\,\text{м}$ начинает вращаться вокруг закрепленной оси с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 57{,}7\,\text{см}/\text{с}^2$. Через сколько времени ускорение точки на ободе колеса составит угол $\alpha = 30°$ со скоростью?

1.71.Мотоцикл начинает двигаться по закруглению радиуса $R = 800\,\text{м}$ и, пройдя путь $s = 600\,\text{м}$, приобретает скорость $v_1 = 36\,\text{км}/\text{ч}$. Определить скорость и ускорение мотоцикла в середине этого участка.

1.72.Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \alpha t - \beta t^3[\text{рад}]$, где $\alpha = 6\,\text{рад}/\text{с}, \beta = 2\,\text{рад}/\text{с}^3$. Найти среднее значение угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от t = 0 до остановки.

1.73. В условиях предыдущей задачи найти угловое ускорение в момент остановки тела.

1.74.Вал, вращающийся вокруг закрепленной оси с частотой n = 90 об/мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через $t_1 = 40\,\text{с}$. Сколько оборотов вал сделал до остановки?

1.75.Маховик начинает вращаться по закону $\varphi = 9t^3/32[\text{рад}]$. Найти линейную скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0{,}8\,\text{м}$ от оси вращения, в тот момент, когда её тангенциальное ускорение будет равно нормальному. Найти t_1.

1.76. Груз приводит во вращение вал (рис. 1.8) радиуса r и соосную с ним шестерню радиуса R_1. Определить по какому закону будет изменяться со временем угол поворота второй шестерни радиуса R_2, находящейся в зацеплении с первой. Движение груза начинается из состояния покоя и происходит с постоянным ускорением a.

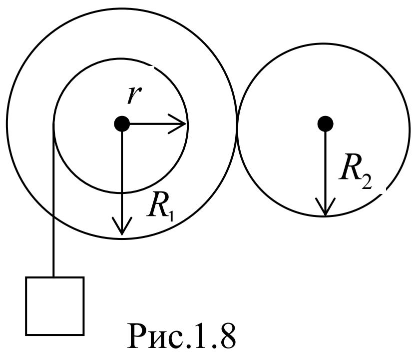


Рис.1.8

1.77.Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}02t\,\text{рад}/\text{с}$. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела составит угол $\varphi = 60°$ с вектором скорости?

1.78.Твердое тело, имеющее в начальный момент угловую скорость ω_0, начинает замедляться с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha\sqrt{\omega}$. Найти среднюю угловую скорость тела за промежуток времени до остановки.

1.79.Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что угловая скорость зависит от угла поворота по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где ω_0, α - положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол поворота $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени угла поворота.

1.80. В условиях предыдущей задачи найти зависимость от времени угловой скорости.

1.81.Диск начинает вращаться вокруг закрепленной оси с угловым ускорением, изменяющимся по закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\varphi$, где ε_0 - постоянная, φ - угол поворота из начального положения. Найти зависимость угловой скорости от угла поворота.

1.82.Колесо радиуса $R = 1\,\text{м}$ катится без скольжения по горизонтальной дороге (рис. 1.9). Скорость центра колеса O меняется по закону $v_0 = 2t\,[\text{м/с}]$. Найти в момент времени $t_1 = 0{,}5\,\text{с}$ линейные скорости и ускорения четырех точек A, B, C, D, лежащих на концах взаимно перпендикулярных диаметров.

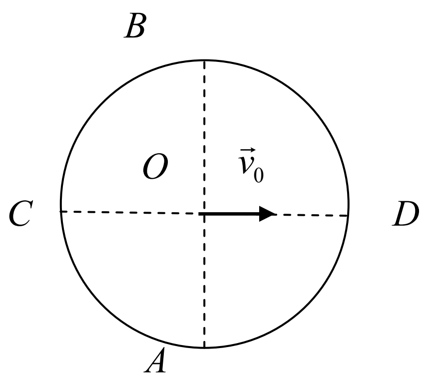


Рис. 1.9

1.83.Автомобиль движется равномерно и прямолинейно по сухой дороге. Максимальная скорость точки колеса $v = 200\,\text{км/ч}$. С какой скоростью движется автомобиль?

1.84.Колесо радиуса $R = 0{,}5\,\text{м}$ катится без скольжения по горизонтальной дороге (рис. 1.9) со скоростью $v_0 = 1\,\text{м/с}$. Найти величину и направление ускорения точки B.

1.85. В условиях предыдущей задачи найти путь s, проходимый точкой B между двумя последовательными моментами ее касания поверхности.

1.86. В условиях предыдущей задачи найти радиусы кривизны траектории точек B и D.

1.87. Твердое тело вращается так, что зависимость угловой скорости от времени имеет вид $\vec{\omega} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2 \vec{j}\,[\text{рад/с}]$, где $\alpha = 0{,}5\,\text{рад/с}, \beta = 0{,}06\,\text{рад/с}^2$. Найти в момент времени $t_1 = 10\,\text{с}$ величины угловой скорости и углового ускорения точки.

1.88.Две материальные точки одновременно начинают двигаться по окружности радиуса $R = 2$ м так, что углы поворота изменяются со временем по законам $\varphi = 2(t+1)[\text{рад}], \varphi = -(3+4t)[\text{рад}]$. Найти величину относительной скорости точек в момент их встречи.

1.89.Определить скорость центра C подвижного блока (рис. 1.10) радиуса R и его угловую скорость ω, если первый груз поднимается со скоростью v_1, а второй груз опускается со скоростью v_2. Нить при своем движении по подвижному блоку не проскальзывает.

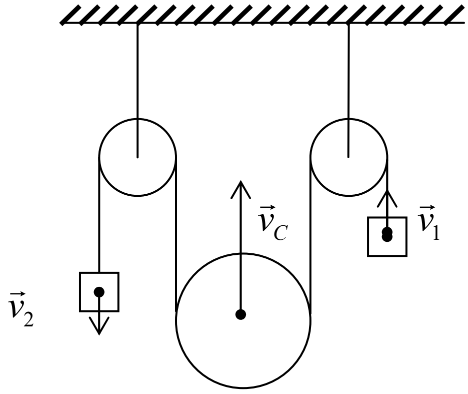


Рис.1.10

1.90.Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных осей с постоянными угловыми скоростями $\omega_1 = 3\,рад/с$, $\omega_2 = 4\,рад/с$. Найти угловое ускорение и угловую скорость одного тела относительно другого.

1.91.Колесо радиуса $r = 0{,}75\,м$ катится по окружности радиуса $R = 6\,м$ в горизонтальной плоскости. Центр колеса движется с постоянной скоростью $v = 1{,}5\,м/с$. Найти угловую скорость и угловое ускорение колеса.

1.92. В условиях предыдущей задачи найти угол между вектором угловой скорости колеса и вертикалью.

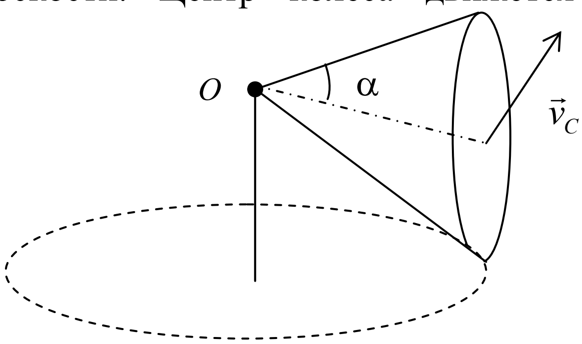


Рис. 1.11

1.93.Круглый конус с углом полураствора $\alpha = 30°$ и радиусом основания $R = 5\,м$ катится равномерно по горизонтальной плоскости. Вершина конуса O закреплена и находится на одной высоте с точкой C – центром основания конуса (рис. 1.11). Скорость точки $v_C = 10\,м/с$. Найти модули угловой скорости и углового ускорения конуса.

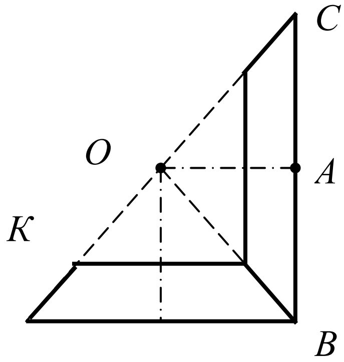


Рис.1.12

1.94.Найти скорости точек B и C конического катка (рис. 1.12), если скорость движения центра катка A по его траектории v_A. Каток катится без скольжения по неподвижной конической поверхности K.

1.95.Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг горизонтальной оси. В момент $t = 0$ ось начали поворачивать вокруг вертикальной оси с постоянным угловым ускорением $\varepsilon_0 = 0{,}1\,рад/с^2$. Найти модули угловой скорости и углового ускорения через $t = 3{,}5\,с$.

2.Динамика точки

2.1.Основные понятия и законы

Как отмечалось в предисловии, описание динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела совпадают.

Законы динамики справедливы в инерциальных системах отсчета. В большинстве задач система отсчета, связанная с Землей, считается инерциальной. Любая система отсчета, движущаяся равномерно относительно Земли, также будет инерциальной. В таких системах отсчета тело приобретает ускорение только благодаря действию на него некоторых сил.

Первый закон Ньютона: если на тело (точку) не действуют силы, оно сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения.

Импульс материальной точки – это произведение ее массы на скорость

$$\vec{p} = m\vec{v} .$$

Второй закон Ньютона или основное уравнение динамики : скорость изменения импульса материальной точки (тела) равна векторной сумме приложенных сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} .$$

В частном случае, если масса тела не изменяется в процессе движения, второй закон Ньютона имеет вид в векторной форме записи

$$m\vec{a} = \vec{F} .$$

В координатной форме

$$ma_x = F_x ,$$

$$ma_y = F_y ,$$

$$ma_z = F_z .$$

Третий закон Ньютона: два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположно направленными.

2.2.Примеры решения задач

Задача 2.1. Два тела массами m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг связаны невесомой, нерастяжимой нитью и движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F = 10 н, направленной под углом α = 30° к горизонту и приложеннной к телу m_1. Определить ускорение, с которым движутся тела и силу натяжения нити, если коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью равен μ = 0,2.

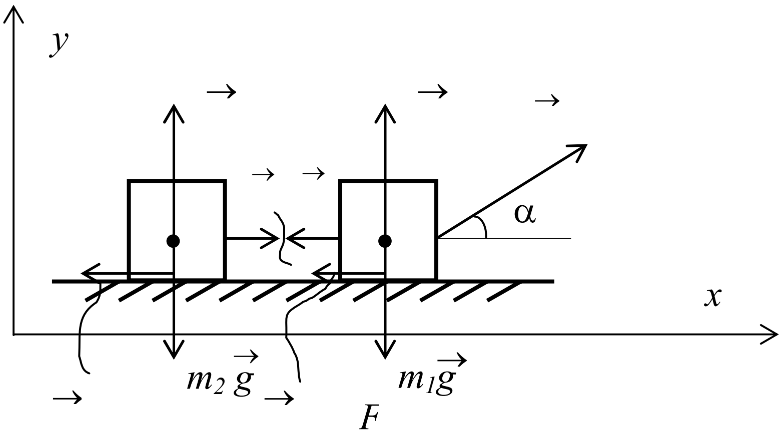


Рис.2.1

Решение. Силы, действующие на тела m_1, m_2, показаны на рис.2.1. Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекциях на координатные оси

Груз m_1: $F\cos\alpha - F_{mp1} - T = m_1 a$,

$$F\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0.$$

Груз m_2: $T - F_{mp2} = m_2 a$,

$$N_2 - m_2 g = 0,$$

$$F_{mp1} = \mu N_1,\ F_{mp2} = \mu N_2,$$

откуда $F_{mp1} = \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right)$,

$$F_{mp2} = \mu m_2 g\ .$$

$$\begin{cases} F\cos\alpha - \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right) - T = m_1 a \\ T - \mu m_2 g = m_2 a. \end{cases}$$

Решая эти уравнения совместно, находим $F\cos\alpha - \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right) - \mu m_2 g = \left(m_1 + m_2\right)a$, откуда

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu\left(m_1 g - F\sin\alpha\right) - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = 1{,}26\,\text{м}/\text{с}^2\ .$$

Сила натяжения нити: $T = \mu m_2 g + m_2 a = m_2\left(\mu g + a\right) = 6{,}44\,\text{Н}$.

Задача 2.2. На столе (рис. 2.2) лежит доска массой M = 1 кг, а на доске – груз массой m = 2кг. Какую горизонтальную силу надо приложить к доске, чтобы она выскользнула из-под груза?

Коэффициент трения между грузом и доской $\mu_1 = 0{,}25$, а между доской и столом $\mu_2 = 0{,}5$.

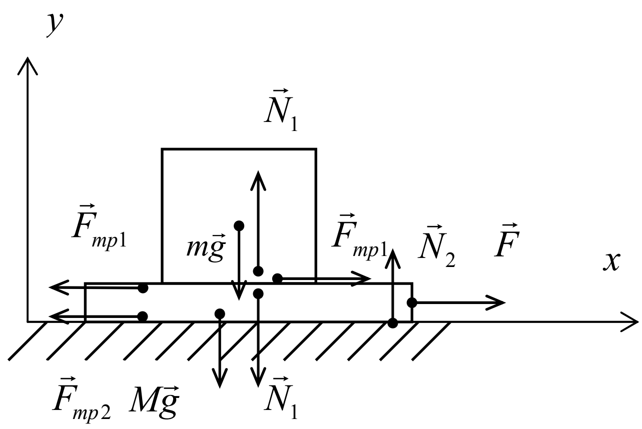


Рис. 2.2

Решение. На рисунке показаны силы, приложенные к доске и грузу.

Ускорение грузу m сообщает сила трения $F_{тр1}$.

Пока доска и груз движутся вместе с ускорением $\vec{a}$, груз не скользит, $\vec{F}_{тр1}$ - это сила трения покоя. Скольжение начинается при её максимальном значении $F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg$. Второй закон Ньютона $\mu_1 mg = ma$, т.е. максимальное ускорение, с которым может двигаться груз: $a_{\max} = \mu_1 g$. С таким максимальным ускорением должна двигаться и доска

$$F - F_{тр1} - F_{тр2} = Ma_{\max} = M\mu_1 g,$$

$$F_{тр2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (N_1 + Mg) = \mu_2 (mg + Mg) = \mu_2 g(m + M),$$

$$F = F_{тр1} + F_{тр2} + M\mu_1 g = \mu_1 mg + \mu_2 g(m + M) + \mu_1 Mg =$$

$$= \mu_1 g(m + M) + \mu_2 g(m + M) = g(\mu_1 + \mu_2)(m + M) = 22\,\text{Н}.$$

Задача 2.3. В механической системе, показанной на рис. 2.3, массы тел равны m_1, m_2, m_3, угол α известен, трения нет, массы блока и нити пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_3 относительно тела m_2.

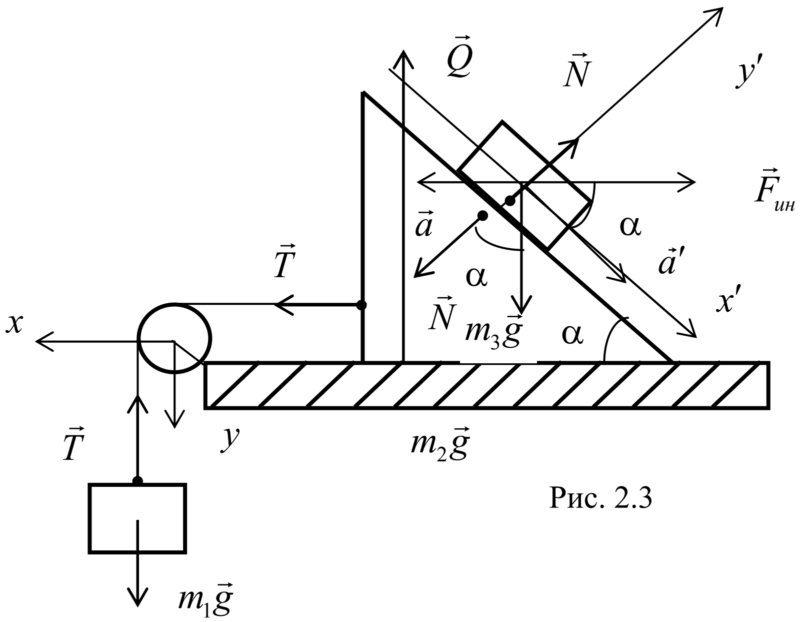


Рис. 2.3

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тел m_1 и m_2 сначала в векторном виде

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T},$$
$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{Q} + \vec{T} + \vec{N},$$

а затем в проекциях на координатные оси

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T + N\sin\alpha \\ 0 = m_2 g - Q. \end{cases}$$

Последнее уравнение в данной задаче не используется, т.к. оно служит для определения нормальной реакции Q опоры и, соответственно, силы трения между телом m_2 и поверхностью опоры, но по условию трения нет.

Для тела m_3: $m_3(\vec{a}' + \vec{a}) = m_3\vec{g} + \vec{N}$

$$\begin{cases} m_3(a' - a\cos\alpha) = m_3 g\sin\alpha \\ -m_3 a\sin\alpha = -m_3 g\cos\alpha + N. \end{cases}$$

При составлении векторного уравнения движения для тела m_3 учитывалось, что оно участвует одновременно в двух независимых движениях: относительно тела m_2 с ускорением $\vec{a}'$ (система отсчета *x'*, *y'*) и вместе с телом m_2 с ускорением $\vec{a}$ (система отсчета *x*, *y*). Результирующее движение в неподвижной системе отсчета *x*, *y* будет происходить с ускорением $\vec{a}_3 = \vec{a}' + \vec{a}$.

Рассмотрим совместно уравнения

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T + N\sin\alpha \\ m_3(a' - a\cos\alpha) = m_3 g\sin\alpha \\ -m_3 a\sin\alpha = -m_3 g\cos\alpha + N. \end{cases}$$

Эта система содержит четыре неизвестных: *T*, *N*, *a'*,*a*. Сложив первые два уравнения системы, исключим *T*:

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g + N\sin\alpha.$$

Из последнего уравнения найдем *N* и подставим найденное значение $N = m_3(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$ в предыдущее уравнение, откуда получим $(m_1 + m_2)a = m_1 g + m_3(g\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\alpha$.

Решая его относительно *a*, получаем: $a = \dfrac{m_1 + m_3\cos\alpha\sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3\sin^2\alpha}$.

Теперь, подставляя найденное значение *a*, находим искомое ускорение $a' = \dfrac{m_1(1 + ctg\alpha) + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3\sin^2\alpha} g\sin\alpha$.

Задача 2.4. К неподвижной перекладине *AB* прикреплена нить и ось блока, как показано на рис. 2.4. Определить результирующую силу, действующую на перекладину, если массы грузов m_1 = 80 кг, m_2 = 60 кг. Трением, массами блоков и растяжением нити пренебречь.

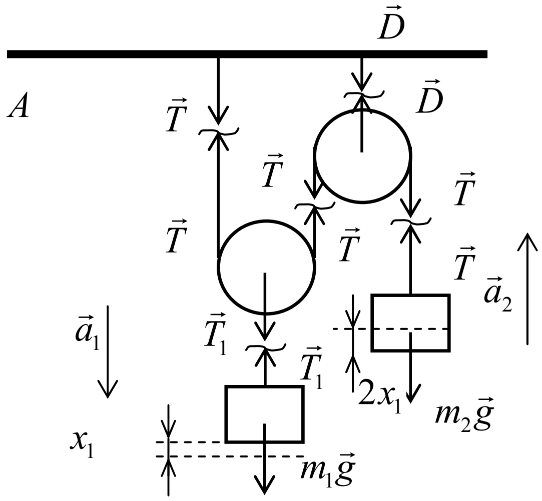


Рис 2.4

Решение. Нить и связь перекладины с блоком растянуты. Разрезаем мысленно связи, как показано на рисунке. Тогда силы будут направлены на разрез, в том числе $\vec{T}$ и $\vec{D}$. Результирующая сила, действующая на перекладину *AB*, будет равна $R = T + D$. Здесь T – натяжение нити, D – нагрузка на ось неподвижного блока во время движения грузов. Поскольку блок невесом $D = 2T$, поэтому $R = 2T + T = 3T$.

Записываем второй закон Ньютона применительно к движущимся грузам $m_1 g - 2T = m_1 a_1$, $T - m_2 g = m_2 a_2$.

Ускорения a_1 и a_2 связаны между собой. При смещении оси подвижного блока вниз на x_1 груз m_2 подвинется на расстояние $x_2 = 2x_1$, и так как $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, то $|\vec{a}_2| = 2|\vec{a}_1|$. Решая уравнения совместно:

$$\begin{cases} m_1 g - 2T = m_1 a_1, \\ T - m_2 g = m_2 2a_1, \end{cases} \qquad \frac{m_1 g - 2T}{T - m_2 g} = \frac{m_1}{2m_2},$$

$$2m_1 m_2 g - 4m_2 T = m_1 T - m_1 m_2 g,$$

$$T(m_1 + 4m_2) = 3m_1 m_2 g, \text{ получим}$$

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{m_1 + 4m_2} = 441{,}45\,\text{Н. Откуда } R = 3T = 1324{,}3\,\text{Н.}$$

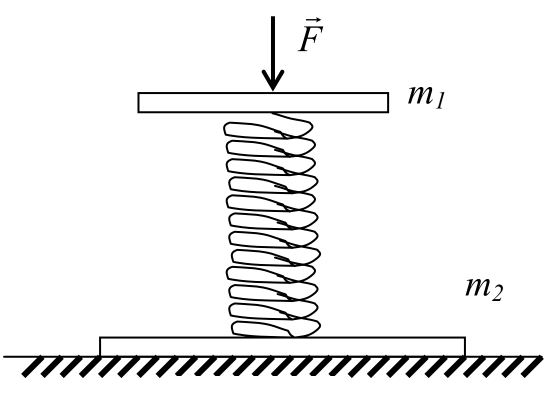


Рис.2.5

Задача 2.5. Две пластины массами m_1 и m_2 соединили пружиной (рис.2.5). С какой силой F надо надавить на верхнюю пластину, чтобы после прекращения действия силы верхняя пластина, подпрыгнув, приподняла и нижнюю? Массой пружины пренебречь.

Решение. Пружина в начальный момент сжата на величину $x_1 = m_1 g/k$ по сравнению со своей длиной в недеформированном состоянии. Чтобы пружина могла приподнять при своем растяжении нижнюю пластину, она должна быть растянута по сравнению с нормальной своей длиной на величину, большую, чем $x_2 = m_2 g/k$. Следовательно, надо надавить на верхнюю пластину с силой

$$F \geq k(x_1 + x_2) = (m_1 + m_2)g.$$

Задача 2.6. Тело массой m = 1 кг, брошенное под углом α к горизонту, имеет в верхней точке траектории полное ускорение, равное $a = 12\, м/с^2$ (рис 2.6). Определить силу сопротивления среды в этой точке.

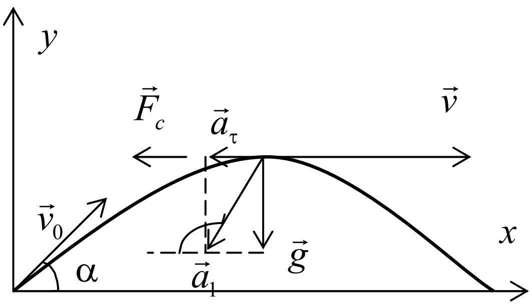


Рис.2.6

Решение. Судя по условиям задачи, при движении тела на него действует постоянная сила тяжести и переменная сила сопротивления. В верхней точке траектории скорость тела горизонтальна $v = v_x$. В противоположную сторону направлена сила сопротивления $\vec{F}_c$ и ускорения $\vec{a}_\tau$. Перпендикулярно $\vec{a}_\tau$ направлено нормальное ускорение $\vec{a}_n = \vec{g}$. Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{a_\tau^2 + g^2}$.

Сила сопротивления $\vec{F}_c = m\vec{a}_\tau$. Сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. Равнодействующая этих сил $\vec{R} = m\vec{g} + \vec{F}_c = m\vec{a}$.

В результате

$$\vec{F}_c = \sqrt{R^2 - (mg)^2} = \sqrt{(ma)^2 - (mg)^2} = m\sqrt{a^2 - g^2} = 6{,}9 \text{ Н}.$$

Задача 2.7. С каким ускорением должен ехать автомобиль массой m вниз по настилу массой M на наклонной плоскости с углом наклона α, чтобы настил скользил по наклонной плоскости

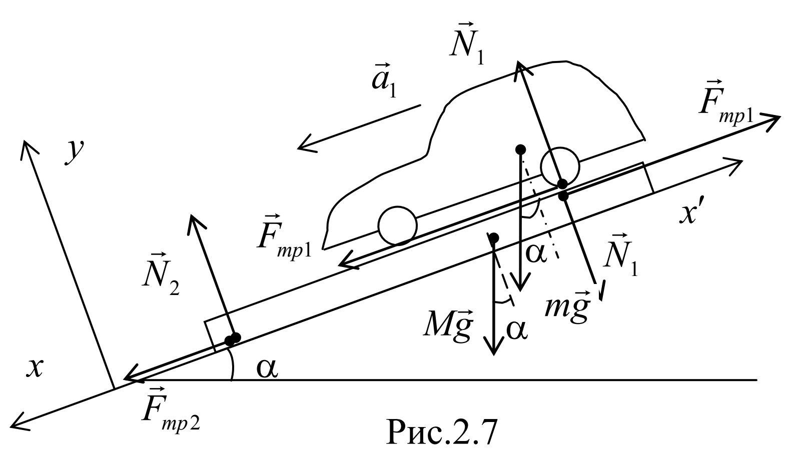


Рис.2.7

равномерно вверх? Коэффициент трения автомобиля о настил равен k_1, настила о наклонную плоскость k_2 (рис.2.7).

Решение. На рис.2.7 показаны силы, действующие на движущийся автомобиль: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр1}$, которая является силой трения покоя, препятствующей проскальзыванию ведущих колёс автомобиля о поверхность дороги, т.е. это и есть сила тяги, движущая автомобиль $\vec{F}_{тр1} < k_1 N_1$.

На настил действуют силы: сила тяжести $M\vec{g}$, силы со стороны автомобиля $\vec{F}_{тр1}$, $\vec{N}_1$ и со стороны наклонной плоскости - силы $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{тр2}$.

Второй закон Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат *x*, *y* для автомобиля, движущегося с ускорением a_1, примет вид

$$mg\sin\alpha + F_{тр1} = ma_1,$$

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0.$$

В проекции на оси координат *x, y* для настила, движущегося равномерно вверх, второй закон Ньютона имеет вид

$$F_{тр2} + Mg\sin\alpha - F_{тр1} = 0,$$

$$N_2 - N_1 - Mg\cos\alpha = 0,$$

$$F_{тр2} = k_2 N_2.$$

Решая систему уравнений, получим

$$a_1 = g\left(1 + \frac{M}{m}\right)(\sin\alpha + k_2\cos\alpha).$$

При реализации условий задачи ускорение автомобиля не зависит от k_1, т.е. от трения между автомобилем и настилом.

Задача 2.8. Система, изображённая на рис. 2.8 находится в лифте, поднимающимся вверх с ускорением *a*. Найти натяжение нити, если коэффициент трения между грузом m_1 и опорой равен *k*.

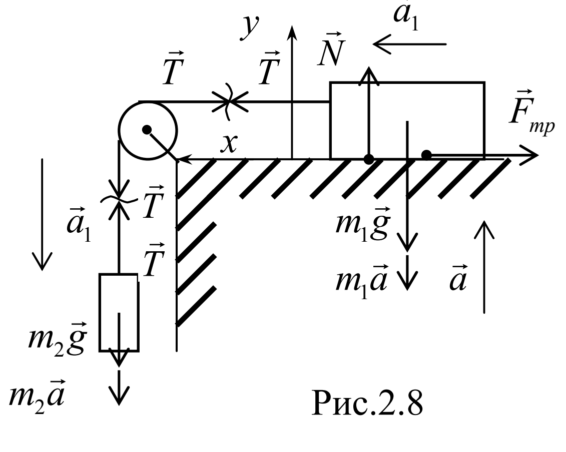


Рис.2.8

Решение. Движущийся с ускорением *a* лифт является неинерциальной системой. Свяжем систему координат с лифтом и, чтобы использовать законы Ньютона, приложим к телам системы силы инерции $m_1 a$

и m_2 a, рис.2.8. Мысленно разрежем нить и запишем второй закон Ньютона для каждого из тел

$$\begin{cases} N - m_1 g - m_1 a = 0 \\ T - F_{тр} = m_1 a_1 \\ m_2 a + m_2 g - T = m_2 a_1 \\ F_{тр} = kN. \end{cases}$$

Откуда $N = m_1 g + m_2 a, F_{тр} = k m_1 (g + a)$,

$$\begin{cases} T - k m_1 (g + a) = m_1 a_1 \\ m_2 a + m_2 g - T = m_2 a_1. \end{cases}$$

$$\frac{T - k m_1 (g + a)}{m_2 a + m_2 g - T} = \frac{m_1}{m_2}, \quad T m_2 - k m_1 m_2 (g + a) = m_2 m_1 (a + g) - T m_1,$$

$$T(m_2 + m_1) = m_1 m_2 (g + a)(k + 1),$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 (g + a)(k + 1)}{m_2 + m_1}, \text{ если } k m_1 < m_2.$$

Если $k m_1 > m_2$, $T_2 = m_2 (g + a)$, грузы неподвижны.

Задача 2.9. На покоившуюся частицу массы m в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $\vec{F} = \vec{b} t(\tau - t)$, где $\vec{b}$ - постоянный вектор, τ - время, в течение которого действует данная сила. Найти: 1) импульс частицы после окончания действия силы; 2) путь, пройденный частицей за время действия силы.

Решение. Так как $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, то $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{b} t(\tau - t)$, а $d\vec{v} = \frac{\vec{b}}{m} t(\tau - t) dt$.

Так как масса частицы $m = const$, то $m d\vec{v} = d(m\vec{v}) = \vec{b} t(\tau - t) dt$.

Количество движения $m d\vec{v} = \int_0^\tau \vec{b} t(\tau - t) dt$. Вектор $\vec{b} = const$.

$$\vec{b} \int_0^\tau t(\tau - t) dt = \vec{b}\left(\frac{\tau t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^\tau = \vec{b}\left(\frac{\tau^3}{2} - \frac{\tau^3}{3}\right) = \frac{\vec{b}\tau^3}{6}.$$

Время действия силы $t = \tau$, т.к. при $t = \tau$ $\vec{F} = 0$. Определим время остановки тела $v = 0$. Для этого проинтегрируем выражение $d\vec{v} = \frac{\vec{b}}{m} t(\tau - t) dt$. Отсюда $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{m} \int t(\tau - t) dt = \frac{\vec{b}}{m}\left(\frac{\tau t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) + const$.

Так как при $t = 0$ $v_0 = 0$, то $const = 0$.

Определим момент остановки тела.

$$\frac{\tau t^2}{2}-\frac{t^3}{3}=t^2\left(\frac{\tau}{2}-\frac{t}{3}\right)=0,\quad \frac{\tau}{2}-\frac{t}{3}=0\ ,\ 3\tau=2t_{ост}\ ,\ t_{ост}=\frac{3}{2}\tau .$$

Отсюда следует, что до момента $t=\tau$ частица двигалась в одну сторону и модуль вектора перемещения частицы равен пройденному ею пути $|\vec{v}|=\frac{ds}{dt}=\frac{b}{m}\left(\frac{\tau t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right), ds=\frac{b}{m}\left(\frac{\tau t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)dt$.

$$s=\int\frac{b}{m}\left(\frac{\tau t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)dt=\frac{b}{m}\left(\frac{\tau t^3}{6}-\frac{t^4}{12}\right)+const=\frac{b}{12m}\left(2\tau t^3-t^4\right)+const\ .$$

При $t=0\quad s=0,\quad const=0$, следовательно, $s=\frac{bt^3}{12m}(2\tau-t)$.

При $t=\tau\quad s(\tau)=\frac{b\tau^3}{12m}(2\tau-\tau)=\frac{b\tau^4}{12m}$.

Задача 2.10. Как будет изменяться скорость тела массой *m*, движущегося вверх с начальной скоростью v_0, если можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела ($F_c=-rv$)? Считать коэффициент *r* известным.

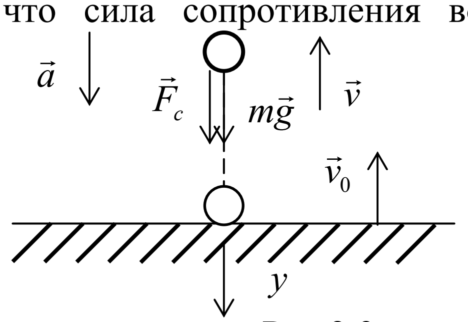


Рис.2.9

Решение. Целью задачи является нахождение скорости тела как функции времени. Рассмотрим движение тела в момент времени t (скорость *v*, сила тяжести *mg*, действующая на него, сила сопротивления $F_c=-rv$). Тогда основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) в проекции на ось *y* имеет вид

$$mg+rv=-m\frac{dv}{dt},\quad r\left(\frac{mg}{r}+v\right)=-m\frac{dv}{dt}\text{ , разделяя переменые,}$$

$$\frac{r}{m}dt=-\frac{dv}{\frac{mg}{r}+v}=-\frac{d\left(\frac{mg}{r}+v\right)}{\frac{mg}{r}+v}\text{ , и интегрируя, получим}$$

$$\frac{r}{m}t=-\left[\ln\left(\frac{mg}{r}+v\right)-\ln\left(\frac{mg}{r}+v_0\right)\right]=-\ln\left(\frac{\frac{mg}{r}+v}{\frac{mg}{r}+v_0}\right),$$

$$-\frac{r}{m}t=\ln\left(\frac{\frac{mg}{r}+v}{\frac{mg}{r}+v_0}\right), \qquad \frac{\frac{mg}{r}+v}{\frac{mg}{r}+v_0}=e^{-\frac{r}{m}t},$$

$\frac{mg}{r}+v=\left(\frac{mg}{r}+v_0\right)e^{-\frac{r}{m}t}$. Откуда окончательно находим зависимость скорости от времени

$$v=\left(\frac{mg}{r}+v_0\right)e^{-\frac{r}{m}t}-\frac{mg}{r}=\frac{mg}{r}e^{-\frac{r}{m}t}-\frac{mg}{r}+v_0e^{-\frac{r}{m}t}=v_0e^{-\frac{r}{m}t}+\frac{mg}{r}\left(e^{-\frac{r}{m}t}-1\right)=$$

$$=\frac{mg}{r}\left[\frac{rv_0}{mg}e^{-\frac{r}{m}t}+e^{-\frac{r}{m}t}-1\right]=\frac{mg}{r}\left[\left(\frac{rv_0}{mg}+1\right)e^{-\frac{r}{m}t}-1\right].$$

При $t=0$ $v=v_0$. Это и есть искомая формула.

2.3.Задачи для самостоятельного решения

2.11. Два тела с массами M и m ($M>m$) падают с одинаковой высоты без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха для каждого тела постоянна и равна F. Сравнить время падения тел.

2.12. Брусок массой m тянут по горизонтальной поверхности под действием силы F, направленной под углом α к горизонту. При этом брусок за время t изменил свою скорость от v_0 до v, двигаясь ускоренно в одну сторону. Определить коэффициент трения f бруска о поверхность.

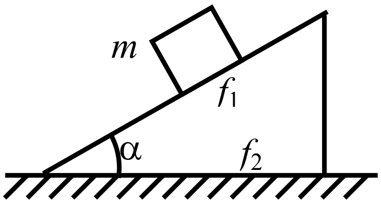


Рис.2.10

2.13. Небольшое тело массой m расположено на клине массой M (рис.2.10). Коэффициент трения между телом и клином равен f_1, а между клином и горизонтальной поверхностью равен f_2. При каком угле α клина он будет двигаться равномерно?

2.14. Через какое время скорость тела, которому сообщили вверх по наклонной плоскости скорость v_0, снова будет равна v_0? Коэффициент трения равен f, угол между плоскостью и горизонтом α, $\mathrm{tg}(\alpha) > f$.

2.15. По наклонной плоскости составляющей угол α с горизонтом, движутся две материальные точки с массами m_1 и m_2 (рис.2.11) под действием силы $\vec{F}$, приложенной к телу m_2 и направленной под углом α к наклонной плоскости. Нить, связывающая тела m_1 и m_2 невесома и нерастяжима. Определить ускорение системы, если коэффициент трения каждого тела о плоскость равен f.

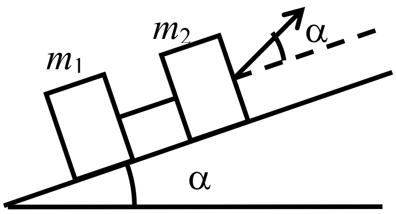


Рис.2.11

2.16. Найти силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положили груз массой m (рис.2.12). Угол при основании клина α. Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина f. Трения между полом и клином нет.

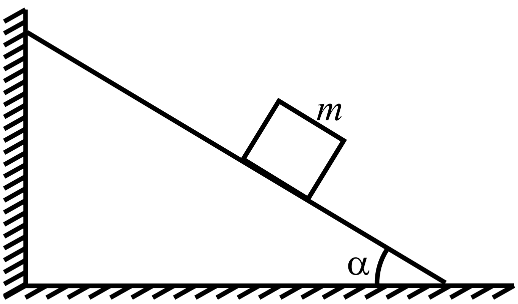


Рис.2.12

2.17. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 30 % всей его длины. Определить коэффициент трения каната о стол.

2.18. Ракета, масса которой M = 6 т, поднимается вертикально вверх. Двигатель ракеты развивает силу тяги F = 500 кН. Определить ускорение a ракеты и силу натяжения T троса, свободно свисающего с ракеты, на расстоянии, равном 1/4 его длины от точки прикрепления троса. Масса троса m = 10 кг. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

2.19. Через легкий вращающийся без трения блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить. На одном ее конце привязан груз массой m_1. По другому концу нити с постоянным относительно нее ускорением a_2 скользит кольцо с массой m_2 (рис.2.13). Найти ускорение a_1 тела массы m_1 и силу трения кольца о нить.

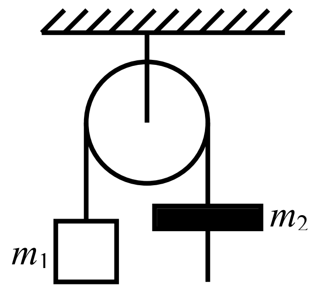


Рис.2.13

2.20. Невесомая и нерастяжимая нить перекинута через невесомый блок и пропущена через щель. На концах нити подвешены грузы, масса которых m_1 и m_2. При движении на нить со стороны щели действует постоянная сила трения $F_{тр}$ (рис.2.14). Определить ускорение системы и разность сил натяжения нити.

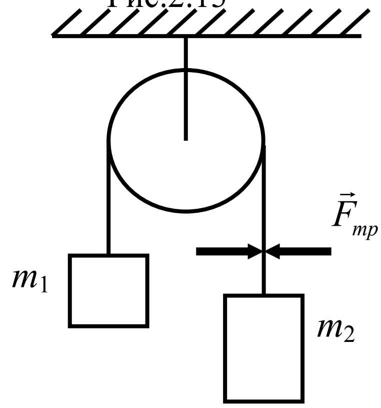


Рис.2.14

2.21. Тело массой m прикреплено к 2 соединенным последовательно пружинам жесткости k_1 и k_2 и расположено на гладкой горизонтальной поверхности. К свободному концу цепочки пружин приложена постоянная сила F (рис.2.15). Каково суммарное удлинение пружин при установившемся движении системы?

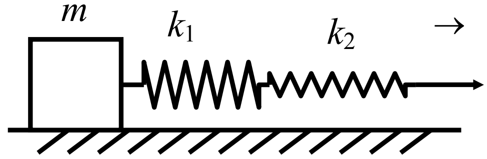


Рис.2.15

2.22. На горизонтальной плоскости лежат два бруска m_1 и m_2, соединенные недеформированной пружиной жесткости k (рис. 2.16). Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость равен f.

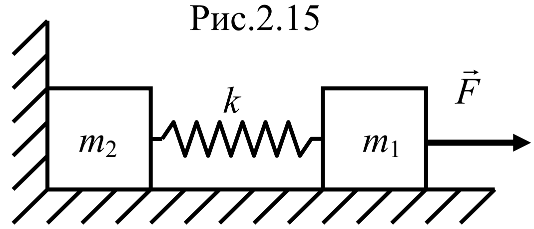


Рис.2.16

2.23. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика

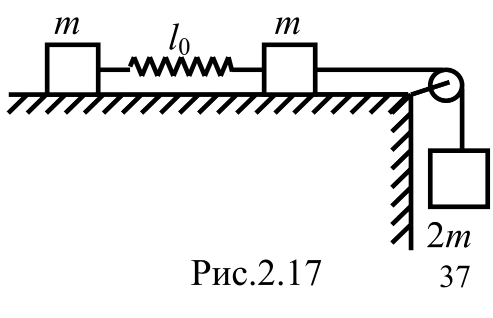


Рис.2.17

массой m, соединенные невесомой пружиной жесткости k. Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0 (рис.2.17). К правому кубику привязана невесомая и нерастяжимая нить с грузом массой $2m$ на конце. В некоторый момент времени этот груз отпускают, и система начинает двигаться без начальной скорости. Найти максимальное расстояние между кубиками при движении системы. Блок невесом.

2.24. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m_1 = 2$ кг. Коэффициент трения f_1 бруска о поверхность равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2 = 8$ кг. Коэффициент трения f_2 верхнего бруска о нижний равен 0,3. К верхнему бруску приложена горизонтальная сила F. Определить: 1) значение силы F_1, при которой начнется совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы F_2 при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.

2.25. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, ускоренно скользит доска массой M. Коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен f. На доску кладут тело массой m, которое скользит по доске без трения. Какова должна быть минимальная масса тела m_{min}, чтобы движение доски по наклонной плоскости стало равномерным?

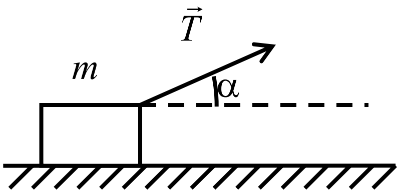


Рис.2.18

2.26. Брусок массы m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f (рис. 2.18). Найти угол α, при котором натяжение нити будет наименьшим. Чему оно равно?

2.27. Тело пущено вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0. Коэффициент трения между телом и плоскостью f. Определить угол α, при котором время подъема минимально, а также это минимальное время.

2.28. На наклонной плоскости расположен груз массой m. Под каким углом (рис.2.19) следует тянуть за веревку, чтобы равномерно тащить груз вверх по наклонной плоскости с наименьшим усилием? Какова должна быть величина этой силы? Наклонная плоскость составляет угол α с горизонтом. Коэффициент трения равен f.

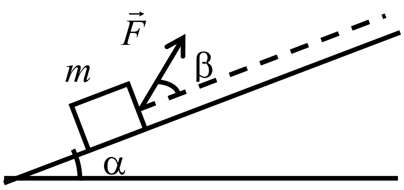


Рис.2.19

2.29. Груз положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0. Коэффициент трения между плоскостью и грузом равен f. При каком значении угла наклона α груз пройдет вверх по плоскости

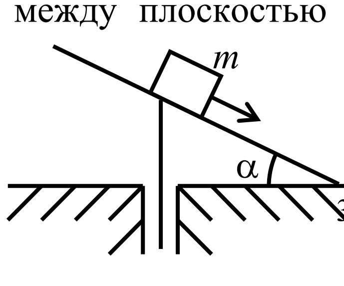


Рис.2.20

наименьшее расстояние? Чему оно равно?

2.30. Небольшое тело m начинает скользить по наклонной плоскости из точки, расположенной над вертикальным упором A (рис.2.20). Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен $f = 0{,}14$. При каком значении угла α время соскальзывания будет наименьшим?

2.31. Груз массой m лежит на гладкой поверхности клина с острым углом α и удерживается посредством легкой нити, закрепленной у его верхнего ребра (рис. 2.21). Каково натяжение нити и давление груза на клин, если он станет двигаться вправо с ускорением $\vec{a}$?

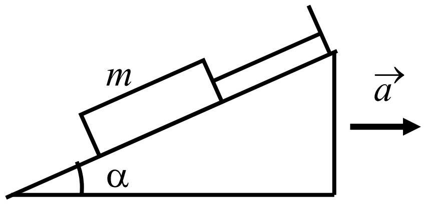


Рис.2.21

2.32. Система грузов, изображенная на рис.2.22, находится в лифте, который движется вверх с ускорением $\vec{a}$. Найти силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массы m_1 и опорой равен f. Блок невесом.

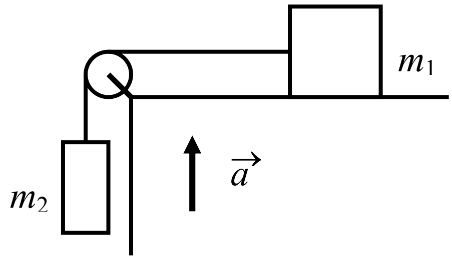


Рис.2.22

2.33. В условиях предыдущей задачи (2.32) найти силу натяжения нити, если система движется с ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально вправо.

2.34. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2, $m_2 > m_1$. Кабина поднимается с ускорением $\vec{a}$. Пренебрегая массами блока и нити, а также трением, найти силу, с которой блок действует на потолок кабины.

2.35. Небольшое тело массой $m = 1$кг движется без начальной скорости под действием силы $\vec{F} = (\beta - \gamma t)\vec{i}$, где $\beta = 2$Н, $\gamma = 1$Н/с. Найти максимальную скорость тела в промежутке времени $0 < t < 4$с.

2.36. В условиях задачи 2.35. определить путь S, который тело пройдет до остановки.

2.37. Определить закон движения материальной точки массой m, если на нее действует сила $\vec{F} = \alpha\vec{j} + \beta t\vec{k}$, где α, β постоянные и при $t = 0$, $\vec{r} = 0$, $\vec{v} = v_0\vec{i}$.

2.38. Определить траекторию материальной точки с массой $m = 3$ кг, движущейся под действием силы $\vec{F} = \alpha\vec{i} + \beta t\vec{j}$, где $\alpha = 2$ Н, $\beta = 3$ Н/с и при $t = 0$ $\vec{r} = 0$, $\vec{v} = 0$.

2.39. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f лежит небольшое тело массой m.. В момент времени $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, изменяющуюся по закону $\vec{F} = \vec{a}\,t$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд после начала действия силы.

2.40. На небольшое тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = at$, где a - положительная постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Определить момент времени, в который тело оторвется от плоскости, а также вектор скорости тела в любой момент времени до и после отрыва.

2.41. На материальную точку массой m действует сила $\vec{F} = kt\vec{i}$, где k - положительная постоянная. В начальный момент времени скорость точки $\vec{v} = v_0\vec{i}$. В какой момент времени модуль скорости точки будет в два раза больше первоначального модуля скорости?

2.42. Санки массой m в течение времени t_0 тянут с горизонтальной силой $F = kt$, где k - положительная постоянная. Коэффициент трения между санками и дорогой равен f. Какое расстояние пройдут санки от начала движения до полной остановки? Начальная скорость санок равна нулю.

2.43. Два тела массами m_1 и m_2 связаны невесомой и нерастяжимой нитью, выдерживающей силу натяжения T, расположены на гладкой горизонтальной поверхности (рис.2.23). К телам приложены силы $F_1 = \alpha t^2$, $F_2 = 2\alpha t^2$, где α - положительная постоянная. Найти, в какой момент времени нить оборвется.

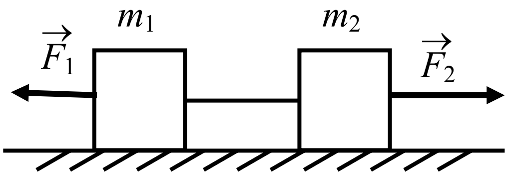


Рис.2.23

2.44. В условиях предыдущей задачи (2.43) найти скорость системы в момент обрыва нити, если при $t = 0$ $v_0 = 0$.

2.45. К бруску массой m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k - постоянная, s - пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α.

2.46. Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r} = \alpha t^3\vec{i} + \beta t\vec{j}$, где α и β - положительные постоянные. При каком соотношении между α и β в момент времени t = 1 с угол φ между вектором скорости $\vec{v}$ и вектором силы $\vec{F}$, действующей на точку, равен 60°?

2.47. Материальная точка массой m = 1 кг движется по закону $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta\sin(\omega t)\vec{j}$. Определить модуль силы, действующей на материальную точку в момент времени t = 1 с, если α = 2 м/с, β = 3 м, $\omega = \pi/2$ рад/с.

2.48. Частица массы m в момент t = 0 начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$, где $\vec{F}_0$ и ω - постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от t.

2.49. В момент t = 0 частица массы m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin(\omega t)$, где $\vec{F}_0$ и ω - постоянные. Сколько времени будет двигаться частица до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

2.50. На материальную точку массой m действует сила $\vec{F}_c = m\omega^2 R \sin(\omega t)\vec{i} + m\omega^2 R \cos(\omega t)\vec{j}$. Определить путь, пройденный материальной точкой за время отсчитываемое от начала действия силы, если при $t = 0$ $\vec{v} = 0$.

2.51. Стальной шарик радиусом r = 0,5 мм падает в широкий сосуд, наполненный глицерином. Найти скорость v установившегося (равномерного) движения шарика. Коэффициент внутреннего трения в глицерине равен η = 1,4 Н с/м^2, плотность глицерина ρ_1 = 1260 кг/м^3, плотность стали ρ_2 = 7800 кг/м^3. Указание. Для решения задачи необходимо воспользоваться гидродинамической формулой Стокса, выражающей силу сопротивления, испытываемую шариком в вязкой жидкости: $F_c = 6\pi r\eta v$.

2.52. Найти ускорение тела, движущегося вертикально вверх с начальной скоростью v_0, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела ($\vec{F}_c = -kv_y\vec{j}$, где $k=mg/v_0$ – положительная постоянная).

2.53. Снаряд массой m вылетает из ствола со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Считая, что сила сопротивления воздуха меняется по закону $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, определить время подъема снаряда на максимальную высоту. Коэффициент пропорциональности k таков, что при скорости $v = v_0$ $F_c = mg$.

2.54. В условиях задачи (2.53) определить максимальную высоту подъема снаряда.

2.55. В условиях задачи (2.53) найти закон движения снаряда.

2.56. В условиях задачи (2.53) вывести уравнение траектории движения снаряда

2.57. Материальная точка массой $m = 2$кг движется под действием силы $\vec{F} = -\frac{\alpha}{v}\vec{i}$, где $\alpha = 1\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}$, v - модуль скорости точки. В какой момент времени скорость точки уменьшится вдвое, если ее начальная скорость $v_0 = 2\text{м/с}$?

2.58. В условиях задачи 2.57 найти в какой момент времени материальная точка на мгновение остановится.

2.59. Скорость тела массой m в вязкой жидкости убывает с пройденным расстоянием l по закону $v = v_0 - \beta l$, где v_0 - начальная скорость, а β - положительная постоянная. Как зависит сила вязкого трения, действующая на тело со стороны жидкости, от скорости тела?

2.60. В условиях предыдущей задачи (2.59) определить закон изменения скорости тела от времени t.

2.61. В условиях задачи (2.59) определить путь, пройденный телом за первую секунду его движения в вязкой жидкости, если в начальный момент времени начальная скорость тела равна v_0.

2.62. Моторная лодка массой m двигалась по озеру со скоростью v_0. Считая силу сопротивления воды пропорциональной квадрату скорости, определить зависимость скорости лодки от времени после выключения мотора $F_{\text{с}} = -\alpha v^2$, где α - постоянная.

2.63. В условиях задачи (2.62) определить зависимость пройденного лодкой пути от времени после выключения мотора.

2.64. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли дождя, пропорциональна произведению квадрата скорости капель на квадрат их радиуса: $F_{\text{с}} = \rho_0 r^2 v^2$, где $\rho_0 \approx 1{,}3$ кг/м^3 - плотность воздуха. Какие капли, крупные или мелкие, падают на Землю с большей скоростью? Оцените скорость капли радиуса $r = 1$ мм при ее падении с большой высоты.

2.65. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

2.66. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана, пропорциональна произведению радиуса на скорость: $F_{\text{с}} = \gamma r v$, где γ - положительная постоянная. Капли радиуса $r = 0{,}1$ мм, падая с большой высоты, у Земли имеют скорость около 1 м/с. Какую скорость будут иметь капли, радиус которых в два раза меньше? В десять раз меньше?

2.67. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути z по закону $f = \gamma z$, где γ - постоянная. Найти максимальную скорость бруска.

3.Динамика системы. Импульс. Работа и энергия. Законы сохранения импульса и энергии

3.1.Основные понятия и законы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек.

Центром масс системы называется точка *С*, радиус-вектор которой задается соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \qquad (3.1)$$

где m_i - масса i-ой частицы, или в координатной форме

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Импульсом системы называется векторная величина, равная векторной сумме импульсов всех входящих в систему частиц

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{v}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \quad , \qquad (3.2)$$

где $\vec{v}_i$ - скорость i-ой частицы в инерциальной системе отсчета, $\vec{v}_c$ - скорость центра масс системы, равная

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} \quad . \qquad (3.3)$$

Запишем основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) для каждой частицы

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \ldots \vec{F}_{in} + \vec{F}_i^{внеш} , \qquad (3.4)$$

где $\vec{F}_{ij}$ - сила, действующая на i-ую частицу со стороны j-ой, $\vec{F}_i^{внеш}$ - внешняя сила, действующая на i-ую частицу.

Просуммировав по всем точкам системы с учетом того, что по третьему закону Ньютона сумма внутренних сил системы равна нулю, получим второй закон Ньютона для системы взаимодействующих частиц в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_j^{внеш} . \qquad (3.5)$$

Скорость изменения полного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на точки системы. В частном случае, когда масса системы постоянна, его можно записать

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_c = \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_j^{внеш}, \tag{3.6}$$

где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс системы, равное

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}. \tag{3.7}$$

Система материальных точек называется *замкнутой*, если входящие в систему частицы взаимодействуют между собой и не взаимодействуют с другими телами, т.е. на систему не действуют внешние силы $\sum_{j=1}^{k} \vec{F}_j^{внеш} = 0$.

Закон сохранения импульса

$$\vec{P} = const \tag{3.8}$$

выполняется в замкнутой системе.

Из закона сохранения импульса следует, что скорость центра масс $\vec{v}_c$ замкнутой системы постоянна. А если $\vec{v}_c = 0 = const$, то и координата центра масс не изменяется в процессе движения.

Пусть на тело (материальную точку) действует сила F.

Элементарная работа силы F на пути ds

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F ds \cos\alpha, \tag{3.9}$$

где α - угол между векторами силы $\vec{F}$ и элементарного перемещения $d\vec{r}$, $|d\vec{r}| = ds$

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$, равна

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos\alpha \, ds. \tag{3.10}$$

Работа постоянной силы

$$\Delta A = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right) = FS\cos\alpha. \tag{3.11}$$

Средняя мощность за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{3.12}$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = F\frac{ds}{dt}\cos\alpha = Fv\cos\alpha = \left(\vec{F}, \vec{v}\right). \tag{3.13}$$

Кинетическая энергия материальной точки массы m (тела, движущегося поступательно)

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad . \qquad (3.14)$$

Если частица массы m движется под действием k сил $F_1, F_2, F_3, ...F_k$, то приращение ее кинетической энергии при перемещении из точки *1* в точку *2* равно алгебраической сумме работ *всех* сил на этом пути

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \sum_{j=1}^{k} A_{12}\left(F_j\right). \qquad (3.15)$$

Сила называется *консервативной*, если работа силы равна нулю при перемещении по замкнутой траектории, или работа этой силы при перемещении из точки *1* в точку *2* не зависит от формы траектории.

Поле консервативных сил *потенциально*. Любое однородное стационарное силовое поле потенциально. Для частицы, находящейся в потенциальном поле, можно ввести понятие потенциальной энергии.

Потенциальная энергия частицы, находящейся в точке поля с координатами (x,y,z), - это скалярная величина $U = U\left(x, y, z, x_0, y_0, z_0\right)$, равная взятой со знаком минус работе консервативных сил поля по перемещению частицы с уровня принятого за ноль отсчета потенциальной энергии $U\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$ в данную точку.

$$U\left(x, y, z\right) = -A_{конс} \quad . \qquad (3.16)$$

Следовательно, работа консервативной силы при перемещении из точки *1* в точку *2* равна убыли (взятому со знаком минус приращению) потенциальной энергии

$$A_{12конс} = -\Delta U = -\left(U_2 - U_1\right) = U_1 - U_2 \quad . \qquad (3.17)$$

Связь консервативной силы и потенциальной энергии

$$\vec{F}_{конс} = -\mathrm{grad}U \quad , \qquad (3.18)$$

где $\mathrm{grad}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$ в декартовой прямоугольной системе координат, или $\mathrm{grad}U = \frac{dU}{dr}$, если поле сферически симметрично.

В однородном поле сил тяжести $F = mg$,

$$U = mgh \quad . \qquad (3.19)$$

Потенциальная энергия растянутой (сжатой) силой $F = kx$ пружины

$$U = \frac{kx^2}{2}. \qquad (3.20)$$

Полная механическая энергия

$$E = E_K + U \quad . \qquad (3.21)$$

Из соотношений (3.15) и (3.17) следует, что *приращение полной механической энергии частицы равно работе неконсервативных (или сторонних) сил*

$$\Delta E = \Delta E_K + \Delta U = A_{12} - A_{12\,конс} = A_{12\,неконс}^{стор},$$

$$\Delta E = A_{12\,неконс}^{стор}. \qquad (3.22)$$

Закон сохранения полной механической энергии

$$E = E_K + U = const \qquad (3.23)$$

выполняется, если на систему действуют только *консервативные* силы. В частном случае, если система замкнута, а внутренние силы консервативны, полная механическая энергия сохраняется.

При *абсолютно упругом* ударе выполняются одновременно закон сохранения импульса и закон сохранения полной механической энергии.

В случае прямого центрального упругого удара частиц, импульсы которых до столкновения $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$, а после столкновения – $\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1'$, $\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2'$, законы сохранения импульса и полной механической энергии примут вид

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2', \qquad (3.24)$$

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1'^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2'^{\,2}}{2m_2}, \qquad (3.25)$$

откуда получим скорости частиц после удара

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad (3.26)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.27)$$

При *абсолютно неупругом* ударе закон сохранения импульса выполняется, а закон сохранения полной механической энергии – нет, часть энергии переходит в тепло Q.

Для неупругого центрального столкновения тех же частиц, импульс которых после удара $\vec{p}' = (m_1 + m_2)\vec{u}$, где $\vec{u}$ - скорость после удара, получим

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}', \qquad (3.28)$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2}{2(m_1 + m_2)} + Q. \qquad (3.29)$$

Откуда скорость частиц после столкновения

$$\vec{u} = \frac{m_2\vec{v}_2 + m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.30)$$

3.2.Примеры решения задач

Задача 3.1. Тело массой m_1 = 2 кг, движущееся со скоростью $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,[\text{м/с}]$, испытывает абсолютно неупругое соударение с другим телом массой m_2 = 3 кг, движущимся со скоростью $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\,[\text{м/с}]$. Найти скорость получившейся составной частицы.

Решение. Закон сохранения количества движения в векторной форме $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$.

Отсюда $\vec{v} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = 2\left(\vec{j} + \vec{k}\right)[\text{м/с}]$.

Задача 3.2. Ракета движется, выбрасывая струю газов с постоянной относительно ракеты скоростью $\vec{v}_1$ (рис. 3.1). Секундный массовый расход истекающего газа равен μ, начальная масса ракеты - m_0. Какую скорость относительно земли приобретет ракета через время t_1 после старта, если начальная скорость ракеты равна нулю? Действием внешних сил пренебречь.

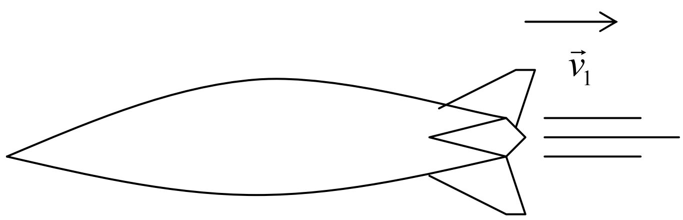


Рис.3.1

Решение. В отсутствие внешних сил механическая система ракета–газ замкнута, поэтому справедлив закон сохранения импульса. Т.к. вначале ракета покоилась и газ не истекал, суммарный импульс системы равен нулю.

Обозначим $d\vec{p}_1$ и $d\vec{p}_2$ изменения импульса ракеты и порции газа за время dt. Из закона сохранения импульса $d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0$.

Если $\vec{v}$ - скорость ракеты в некоторый момент времени t, а $m = m_0 - \mu t$ ее масса в этот момент, и за время dt скорость ракеты изменится на $d\vec{v}$, то $d\vec{p}_1 = (m_0 - \mu t)d\vec{v}$. Порция газа массой m двигалась вместе с ракетой со скоростью $\vec{v}$. Покинув ракету за промежуток времени dt эта масса приобрела относительно земли скорость $\vec{v} + \vec{v}_1$. Следовательно, импульс порции газа, выброшенного из ракеты за время dt, изменился на $d\vec{p}_2 = \mu dt\vec{v}_1$.

Подставим $d\vec{p}_1, d\vec{p}_2$ в закон сохранения импульса в векторной форме $(m_0 - \mu t)d\vec{v} + \mu\vec{v}_1 dt = 0$.

В проекции на ось координат, совпадающую с направлением движения ракеты, закон сохранения импульса примет вид $\left(m_0-\mu t\right)dv-\mu v_1 dt=0$. Отсюда $dv=\dfrac{\mu v_1 dt}{m_0-\mu t}$.

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до t_1, получим

$$v=v_1\int_0^t\frac{\mu dt}{m_0-\mu t}=-v_1\int_0^{t_1}\frac{d\left(m_0-\mu t\right)}{m_0-\mu t}=v_1\ln\left(\frac{m_0}{m_0-\mu t_1}\right).$$

Задача 3.3. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v=b\sqrt{s}$, где $b=const$, а s - пройденный путь. Найти работу сил, действующих на локомотив, за первые *t* секунд после начала движения.

Решение. Работа указанных в условии сил равна приращению кинетической энергии $A=\Delta E_K=E_{K2}-E_{K1}$. Т.к. в начальный момент $v_0=0$, то $E_{K1}=\dfrac{mv_0^2}{2}=0$ и $A=E_{K2}=\dfrac{mv^2}{2}$, или: $A=\dfrac{m}{2}b^2 s$.

Т.к. $v=b\sqrt{s}$, то $\dfrac{ds}{dt}=b\sqrt{s}$ и $\dfrac{ds}{\sqrt{s}}=bdt$.

Интегрируем обе стороны этого уравнения $\int\dfrac{ds}{\sqrt{s}}=b\int dt$.

Отсюда $2\sqrt{s}=bt+c$. При $t=0$ $s=0$, следовательно, $c=0$;

$\sqrt{s}=\dfrac{bt}{2}$; $s=\dfrac{b^2t^2}{4}$ и $A=\dfrac{m}{2}b^2\dfrac{b^2t^2}{4}=\dfrac{mb^4t^2}{8}$.

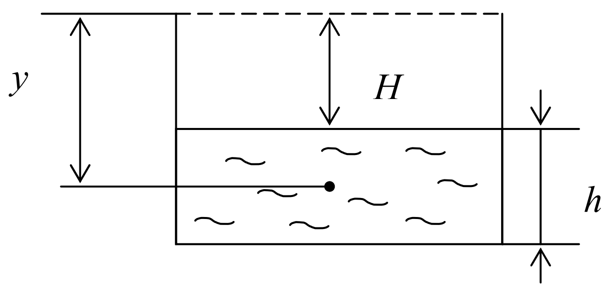


Рис.3.2

Задача 3.4. Из залитого подвала, площадь которого равна $S=50\,\text{м}^2$, требуется выкачать воду на мостовую. Глубина воды в подвале $h=1{,}5\,\text{м}$, а расстояние от уровня воды в подвале до мостовой $H=5\,\text{м}$. Какую работу необходимо совершить для откачки воды.

Решение. Работа будет равна $A=\Delta U$, где U - потенциальная энергия массы воды в подвале

$\Delta U=U_2-U_1=mgy$.

Масса воды $m=hS\rho$; y - изменение положения центра масс,

$y=H+\dfrac{h}{2}$

Работа $A = hS\rho g\left(H + \frac{h}{2}\right) = \frac{hS\rho g(2H + h)}{2} = 4312500\,\text{Дж} \approx 4{,}3\,\text{МДж}$.

Задача 3.5. Определить среднюю полезную мощность $\langle N \rangle$ при выстреле из ружья, если известно, что пуля массы *m* вылетает из ствола со скоростью *v*, а длина канала ствола *l*. Давление пороховых газов во время движения пули в стволе считать постоянным.

Решение. Работу пороховых газов будем считать равной кинетической энергии вылетающей пули $A = E_K = \frac{mv^2}{2}$, трение не учитываем.

Тогда средняя полезная мощность $\langle N \rangle = A/t$, где t - время движения пули в стволе.

Так как давление пороховых газов постоянно, сила, действующая на пулю $F = ma = const$, значит $a = const$.

Тогда $l = \frac{at^2}{2}$, а $v = at$; $a = \frac{v}{t}$; $l = \frac{v}{2t}t^2 = \frac{vt}{2}$; $t = \frac{2l}{v}$.

Отсюда $\overline{N} = \frac{mv^2 v}{2 \cdot 2l} = \frac{mv^3}{4l}$.

Задача 3.6. Потенциальная энергия частицы в силовом поле определяется выражением $U = x + 2y^2 + 3z^3$. Частица совершает переход из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ в точку с радиус -вектором $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти: 1) силу $\vec{F}$, действующую на частицу со стороны поля; 2) работу A_{1-2}, совершаемую над частицей силой $\vec{F}$.

Решение. Воспользуемся связью между силой, действующей на частицу и потенциальной энергией частицы в поле этой силы

$F_l = -\frac{\partial U}{\partial l}$. Тогда $F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -1$; $F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = -4y$; $F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = -9z^2$

и вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\vec{i} - 4y\vec{j} - 9z^2\vec{k}$.

Работа, совершаемая над частицей силой поля $\vec{F}$,

$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, $A_{1-2} = \int\limits_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int\limits_{z_1}^{z_2} F_z dz$.

Из формул $\vec{r}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $z_1 = 1$; $z_2 = 2$. Тогда

$$A_{1-2} = -\int\limits_1^2 dx - \int\limits_1^2 4y\,dy - \int\limits_1^2 9z^2 dz = -x\Big|_1^2 - 2y^2\Big|_1^2 - 3z^3\Big|_1^2 = -28\,\text{Дж}.$$

Знак «минус» говорит о том, что при переходе работа совершается против силы поля $\vec{F}$.

Задача 3.7. В брусок массой M =1 кг, находящийся в покое на горизонтальной плоскости, попадает пуля m = 10г, летевшая горизонтально со скоростью $v_1 = 1000\,\text{м/с}$ и застревает в нем. Определить путь, пройденный бруском после удара до остановки, если коэффициент трения между ним и поверхностью $\mu = 0{,}2$.

Решение. Учитывая, что удар пули о брусок неупругий, воспользуемся сначала законом сохранения импульса $mv_1 = (M+m)u_1$,

$u_1 = \dfrac{mv_1}{m+M}$ - скорость бруска с пулей после удара.

Из соотношения (3.15) $\Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = A_{тр}$. Дальнейшее движение бруска с пулей равнозамедленное $F_{тр} = const$, поэтому $0 - \dfrac{(M+m)u_1^2}{2} = -F_{тр}l$, $\dfrac{(M+m)u_1^2}{2} = \mu(M+m)gl$. Откуда

$$l = \frac{u_1^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v_1^2}{2(M+m)^2 \mu g} = 2{,}5\,\text{м}.$$

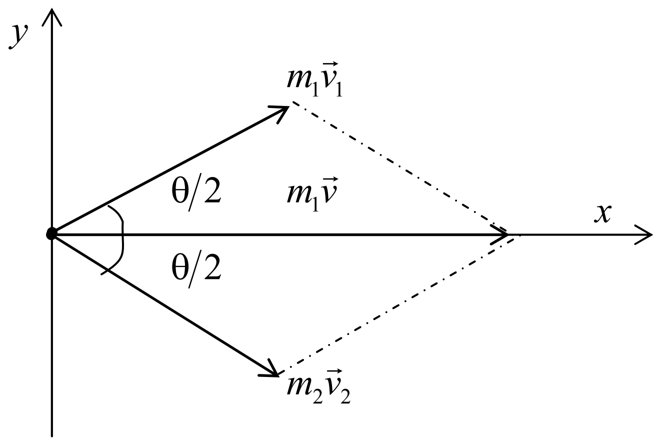


Рис.3.3

Задача 3.8. Частица 1 испытала абсолютно упругое столкновение с покоившейся частицей 2. Найти отношение их масс m_1/m_2, если частицы разлетаются симметрично по отношению к первоначальному направлению движения частицы 1 и угол между их направлением разлета $\theta = 60°$.

Решение. Обозначим скорость первой частицы до соударения v, а после соударения v_1, а второй частицы - v_2. Удар абсолютно упругий, запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси x и y и закон сохранения энергии

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\frac{\theta}{2} + m_2 v_2 \cos\frac{\theta}{2}, \quad m_1 v_1 \sin\frac{\theta}{2} = m_2 v_2 \sin\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Введем обозначение $c = m_1/m_2$. Тогда из второго уравнения получим $c = v_2/v_1$. Отсюда получим $cv = 2v_2\cos(\theta/2)$, $cv^2 = v_2^2(1+1/c)$. Исключая из этих уравнений v_2/v, получим $1 + c = 4\cos^2(\theta/2)$. Отсюда $c = 4\cos^2(\theta/2) - 1 = 2;$ $\quad m_1/m_2 = 2$.

Задача 3.9. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, в котором ее потенциальная энергия $U = kr^2$, где k - положительная постоянная, r - расстояние частицы до центра поля O. Найти массу частицы, если ее наименьшее расстояние до центра поля равно r_1, а скорость на наибольшем расстоянии от этой точки равна v_2.

Решение. Момент сил, действующих на частицу в центральном поле, всегда равен нулю, т.к. сила всегда параллельна радиус-вектору. Поэтому для такой частицы справедлив закон сохранения момента импульса $m[\vec{r}_1\vec{v}_1] = m[\vec{r}_2\vec{v}_2]$.

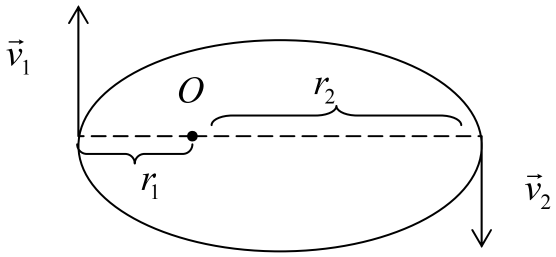


Рис.3.4

Закон сохранения энергии $\dfrac{mv_1^2}{2} + kr_1^2 = \dfrac{mv_2^2}{2} + kr_2^2$.

Здесь v_1 – скорость частицы при наименьшем расстоянии до точки O, а r_2 - наибольшее расстояние частицы до этой точки.

Векторное уравнение закона сохранения момента импульса превращается в $v_1 r_1 = v_2 r_2$, т.к. $r_1 \perp v_1$ и $r_2 \perp v_2$. Выразим $r_2 = v_1 r_1 / v_2$.

Подставляя r_2 в закон сохранения энергии $\dfrac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = k\left(r_2^2 - r_1^2\right)$, получим $m = \dfrac{2kr_1^2}{v_2^2}$.

Задача 3.10. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие одинаковые шайбы массой m. Шайбы соединены легкой недеформированной пружиной, длина которой l_0 и жесткость χ. В некоторый момент одной из шайб сообщают скорость v_0 в горизонтальном направлении перпендикулярно к пружине.

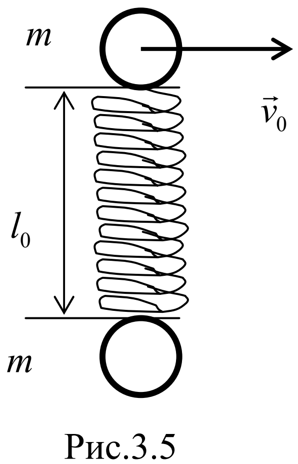


Рис.3.5

Найти максимальное относительное удлинение пружины ($\frac{\Delta l}{l} << 1$), если трение отсутствует.

Решение. Воспользуемся законом сохранения импульса $mv_0 = 2mv_c$, где v_c – скорость движения центра масс. Отсюда $v_c = v_0/2$.

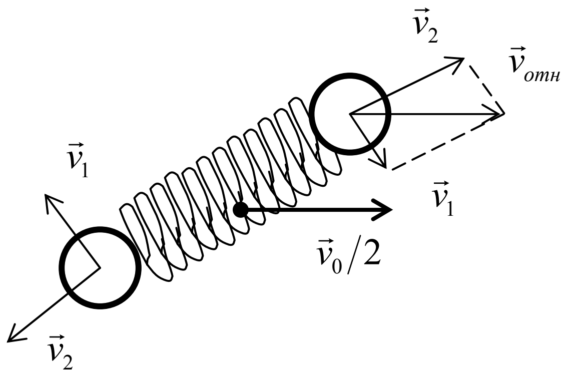


Рис.3.6

Последующее движение можно представить как совокупность двух движений: равномерное поступательное движение центра инерции со скоростью $v_c = v_0/2$ и движение шайб относительно центра масс со скоростью $v_{отн}$, представляющее собой наложение вращения вокруг центра инерции со скоростью v_1 и колебания со скоростью v_2.

Запишем законы сохранения энергии (3.23) и момента импульса (4.10), приравнивая составляющие величины в начальный момент времени и момент, когда растяжение пружины максимально (т.е. $v_2 = 0$) и $v_{отн}$ перпендикулярна линии, соединяющей шайбы ($v_{отн} = v_1$). Обозначим через x максимальное удлинение пружины, т.е. $l_1 = l_0 + x$; относительное удлинение пружины $\alpha = x/l_0$. Закон сохранения момента импульса в системе центра инерции:

$$mv_0 \frac{l_0}{2} = 2mv_1 \frac{l_1}{2} = mv_1 l_0 (1+\alpha). \text{ Отсюда } \alpha = \frac{v_0}{2v_1} - 1.$$

Запишем закон сохранения энергии в системе центра масс

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\chi x^2}{2} + 2\frac{mv_1^2}{2}, \text{ откуда выразим } v_1 = \frac{v_0}{2}\sqrt{1 - \frac{2\chi l_0^2 \alpha^2}{mv_0^2}}.$$

Подставим найденное v_1 в выражение для α, получим

$$\alpha = \left(1 - \frac{2\chi l_0^2 \alpha^2}{mv_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1.$$

Так как $\alpha << 1$, то воспользовавшись формулой $(1+x)^n \approx 1 + nx \ (x << 1)$, получим $\alpha = 1 - \frac{\chi l_0^2 \alpha^2}{mv_0^2} - 1 = \frac{\chi l_0^2 \alpha^2}{mv_0^2}$.

Тогда $\alpha = \frac{mv_0^2}{\chi l_0^2}$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.11. Материальная точка массой m = 3 кг, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом R = 2 м в течение времени t = 3 с. Найти изменение Δp импульса точки.

3.12. Тело массой m = 5 кг брошено под углом α = 30° к горизонту с начальной скоростью v_0 = 20 м/с. Найти изменение импульса тела за время полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.13. Лодка массы M с находящимся в ней человеком массы m неподвижно стоит на спокойной воде. Человек начинает идти вдоль по лодке со скоростью $\vec{u}$ относительно лодки. С какой скоростью $\vec{w}$ будет двигаться человек относительно воды? Сопротивление воды движению лодки не учитывать.

3.14. Снаряд, выпущенный под углом α = 30° к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на высоте h = 40 м на три одинаковые части, импульсы которых оказались расположенными в одной плоскости. Одна часть снаряда падает на Землю через t_1 = 1 с после взрыва под точкой взрыва, вторая - там же через t_2 = 4 с. На каком расстоянии l от места выстрела упадет третий осколок?

3.15. С какой скоростью должен прыгнуть человек массой m, стоящий на краю неподвижной тележки массой M и длиной l, чтобы попасть на ее конец? Трением между горизонтальной дорогой и поверхностью пренебречь. Вектор начальной скорости человека составляет угол α с горизонтом.

3.16. Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость v снаряда для того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость v снаряда через его массу m, массу пушки M и угол α наклона плоскости к горизонту. Учесть, что $m \ll M$ и что выстрел происходит практически мгновенно.

3.17. Из пушки массой M = 1000 кг, ствол которой составляет угол α = 60° с вертикалью, производят выстрел снарядом массы m = 10 кг со скоростью v_0= 180 м/с относительно ствола. После выстрела пушка откатывается назад. На каком расстоянии от места выстрела упадёт снаряд?

3.18. На материальную точку массой m = 1 кг действовала сила, изменяющаяся по закону $\vec{F} = At\vec{i} + (At+Bt^2)\vec{j}$ [Н], A=1Н/с, B=1Н/с^2. В начальный момент времени точка имела скорость $\vec{v} = \alpha\vec{j}$, где α = 2 м/с. Определить импульс тела спустя время t = 1 с после начала действия силы.

3.19. В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углем, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги, если на нее погружают m = 10 т угля за t = 2 с и за это время она проходит равномерно путь S=10 м? Трением при движении платформы можно пренебречь.

3.20. Материальная точка массой m = 2 кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси OX, по закону $x = \alpha + \beta t + \gamma t^2$, где α = 3 м, β = 2 м/с ^{2}, γ = 1м/с^2. Определить работу этой силы за первые 2 с.

3.21. Льдина площадью поперечного сечения S = 1 м^2 и высотой H = 0,4 м плавает воде. Плотность воды $\rho_в$= 1000 кг/м^3, плотность льда $\rho_л$ = 900 кг/м^3. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

3.22. На столе, свисая на 1/3 в небольшое отверстие стола, лежит на грани скольжения цепочка массой m и длиной $3l$. Какую работу нужно совершить, чтобы цепочку втащить на стол горизонтальной силой, прикладывая ее к концу цепочки?

3.23. Цепочка массой m = 0,8 кг и длины l = 1,5 м лежит на шероховатом столе так, что один ее конец свешивается у его края. Цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет η = 1/3 длины цепочки. Какую работу совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола?

3.24. Потенциальная энергия частицы имеет вид: а) $U = \alpha/r$, б) $U = kr^2/2$, где r - модуль радиуса-вектора $\vec{r}$ частицы; α и k - постоянные (k>0). Найти силу F, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей силами поля при переходе ее из точки M_1 = {1, 2, 3} м, в точку M_2 = {2, 3, 4} м.

3.25. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = \alpha(x^2/y - y^2/z)$ [Дж], где $\alpha = const$. Определить: силу $\vec{F}$, действующую на частицу; работу A, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки M_1 = {3, 2, 1} [м], в точку M_2 = {1, 2, 3} [м].

3.26. Частица массы m = 4 кг движется в двумерном поле, ее потенциальная энергия $U = \alpha xy$, где α = 0,19 мДж/м^2. В точке M_1 = {3, 4} м, частица имела скорость v_1= 3 м/с, а в точке M_2 = {5, - 6} м скорость v_2 = 4 м/с. Найти работу сторонних сил на пути между точками M_1 и M_2.

3.27. На частицу массой m = 100 г действует сила

$\vec{F} = \dfrac{\alpha}{x^2}\vec{i} + \dfrac{\alpha}{y^2}\vec{j} + \dfrac{\alpha}{z^2}\vec{k}$, где, $\alpha = 5$ Н·м ^{2}. Определить работу этой силы по перемещению частицы из точки $M_1 = \{1, 3, 2\}$ м, в точку $M_2 = \{3, 2, 1\}$ м.

3.28. Частице массой $m = 1$кг сообщили начальную скорость $v_0 = 1$ м/с и она начинает двигаться по шероховатой горизонтальной поверхности, причем коэффициент трения f ее об эту поверхность линейно зависит от координаты x: $f = \alpha x$, где $\alpha = 10^{-3}$м$^{-1}$. Какую работу совершит сила трения к моменту, когда частица будет иметь координату $x = 5$ м?

3.29. В условиях задачи 3.28 найти скорость частицы в этот момент времени.

3.30. В условиях задачи 3.28 определить время движения частицы до остановки.

3.31. В условиях задачи 3.28 найти, какой путь пройдет частица до остановки.

3.32. На частицу массой m действует сила $\vec{F} = \alpha \sin(\omega t)\vec{i}$, где α и ω - положительные постоянные. При $t = 0$ скорость частицы $\vec{v} = 0$. Найти работу силы к моменту времени $t_0 = \pi/(2\omega)$ с.

3.33. На частицу массой m действует сила $F = \alpha \exp(-\beta t)$, где α и β - положительные постоянные. При $t = 0$ скорость частицы $\vec{v} = 0$. Найти работу силы за очень большой промежуток времени ($t \to \infty$).

3.34. На материальную точку массой m, движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v} = v_0\vec{i}$ начинает действовать сила сопротивления $\vec{F}_c = -\alpha v\vec{i}$, где α - положительная постоянная, а v - модуль скорости материальной точки. Определить работу сил сопротивления за первую секунду ее действия.

3.35. Материальная точка массы $m = 1$ кг движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\vec{v} = v_0\vec{i}$, где $v_0 = 1$ м/с. В некоторый момент на нее начинает действовать сила сопротивления $\vec{F}_с = -\alpha t^2\vec{i}$, где $\alpha = 1$ Н/с ^{2}. Определить работу сил сопротивления за первую секунду ее действия.

3.36. Частица движется вдоль оси OX под действием силы $\vec{F} = (\alpha/v)\vec{i}$, где v - модуль скорости частицы, α - положительная постоянная. В начальный момент времени скорость частицы была равна v_0. Определить работу силы за первую секунду движения точки.

3.37. Частица движется вдоль оси OX под действием силы

$\vec{F} = -(\alpha t/v)\vec{i}$, где t - время, v - модуль скорости частицы, α - положительная постоянная. В начальный момент времени скорость частицы была равна v_0. Определить работу силы за первую секунду движения точки.

3.38. Частица движется вдоль оси OX с начальной скоростью v_0 под действием некоторой силы так, что $vx = \alpha$, где v - модуль скорости частицы, x - ее координата, α - положительная постоянная. Найти работу силы за первую секунду движения точки. Масса частицы m.

3.39. Частица массы m движется вдоль оси OX с начальной скоростью под действием некоторой силы так, что $av^2 = \beta$, где а - модуль ускорения частицы, v - модуль ее скорости, β - положительная постоянная. Определить работу силы за первую секунду движения точки.

3.40. На частицу массой m действует сила $\vec{F} = \beta\sqrt{v}\,\vec{i}$, где β - положительная постоянная, v - модуль скорости частицы. При $t = 0$ скорость частицы $\vec{v} = 0$. Определить работу силы за первую секунду движения частицы.

3.41. Определить работу при построении правильной усеченной пирамиды высотой h, если нижнее и верхнее основания ее - квадраты со сторонами a и b соответственно. Плотность материала ρ.

3.42. Частица массы m попадает в область, где на нее действует встречная тормозящая сила. Глубина x проникновения частицы в эту область зависит от импульса p частицы по закону: $x = \alpha p$, где α - заданная постоянная. Определить работу тормозящей силы на начальном отрезке пути длиной l.

3.43. Материальная точка массы m начинает двигаться из состояния покоя в направлении оси OX так, что ее скорость v связана с координатой x соотношением $v = \alpha\sqrt{x}$, где $\alpha = const$. Определить суммарную работу всех сил, действующих на материальную точку, за первую секунду после начала ее движения.

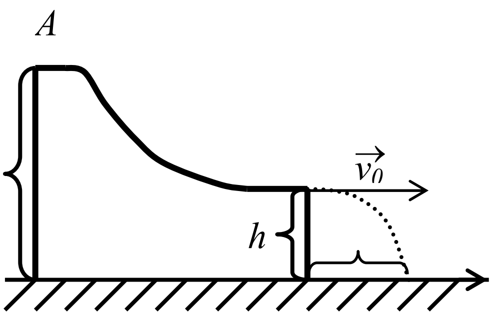


Рис.3.7

3.44. Материальная точка A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис.3.7). При какой высоте h трамплина материальная точка пролетит наибольшее расстояние S? Чему оно равно?

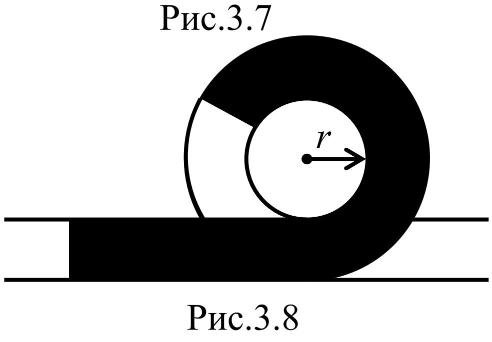


Рис.3.8

3.45. В горизонтальной гладкой трубе имеется кольцевая петля радиуса

r (рис.3.8), расположенная в вертикальной плоскости. С какой минимальной скоростью должен двигаться на горизонтальном участке трубы тонкий гибкий канат длины $l > 2\pi r$, чтобы пройти через петлю? Считать радиус петли r много большим радиусов трубы и каната.

3.46. Частица массой m со скоростью v_0 влетает в область действия тормозящей силы F под углом α_1 к направлению этой силы. Под каким углом α_2 (рис.3.9) она вылетит из этой области? Ширина области действия силы F равна l. При каком условии частица не сможет пересечь эту область?

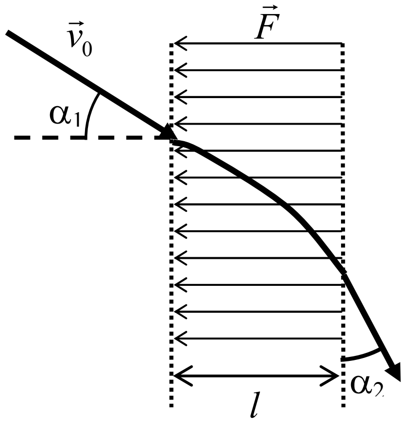


Рис.3.9

3.47. В условиях задачи 3.46 тормозящая сила линейно зависит от l: $F = kl$, где k - положительная постоянная. Найти α_2. При каком условии частица не вылетит из этой области?

3.48. В шар массой M= 200 г свободно расположенный на горизонтальной подставке на высоте h = 20 м от поверхности Земли, попадает пуля массой m = 10 г, летевшая горизонтально со скоростью v_1 = 500 м/с и, пройдя через шар, продолжает двигаться в том же направлении со скоростью v_2 = 200 м/с (рис.3.10). Определить, с какой скоростью шар упадет на землю. Пуля проходит через центр шара. Сопротивлением воздуха пренебречь.

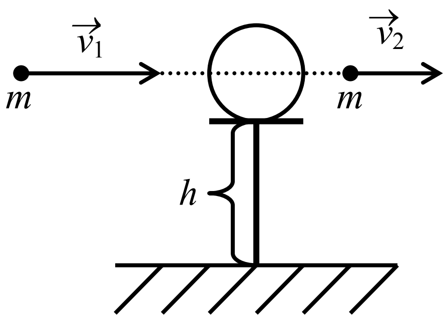


Рис.3.10

3.49. Два неупругих шара с массами m_1 = 2 кг и m_2 = 3 кг движутся со скоростями соответственно v_1 = 8 м/с и v_2 = 4 м/с. Определить увеличение ΔU внутренней энергии шаров при их столкновении в двух случаях: 1) меньший шар нагоняет больший; 2) шары двигаются навстречу друг другу.

3.50. Два куска глины одинаковой массы начали двигаться по вертикали одновременно навстречу друг другу: один с Земли с начальной скоростью v_0, а другой с высоты $h = v_0^2/2g$ = 20 м без начальной скорости. Через сколько времени после абсолютно неупругого удара они упадут на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.51. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара m_1 = 0,2 кг, масса второго - m_2 = 100 г. Первый шар отклоняют так, что его центр поднимается на высоту h_1 = 4,5 см и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если: 1) удар упругий; 2) удар неупругий?

3.52. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули m_1 = 5 г, масса шара m_2 = 0,5 кг. Скорость пули v_0 = 500 м/с. При какой предельной длине стержня (расстояние от точки подвеса до центра шара) шар от удара пули поднимается до верхней точки окружности?

3.53. Определить максимальную часть ω кинетической энергии, которую может передать частица массой $m_1 = 2 \cdot 10^{-25}$ кг сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 6 \cdot 10^{-25}$ кг, которая до столкновения покоилась.

3.54. Материальная точка массой m_1 = 2 кг, движущаяся со скоростью $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ [м/с], испытывает неупругое столкновение с материальной точкой массой m_2 = 3 кг, имеющей в момент столкновения скорость $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ [м/с]. Определить скорость u тел после удара.

3.55. Найти приращение кинетической энергии ΔE_K системы из двух частиц с массами m_1 и m_2 при их абсолютно неупругом соударении. До соударения скорости частиц составляли v_1 и v_2.

3.56. Три лодки одинаковой массы m идут друг за другом с одинаковой скоростью v. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массы m_1. Каковы будут скорости лодок v_1, v_2, v_3 после переброски грузов?

3.57. Навстречу друг другу летят два шара с массами m_1 и m_2. Между шарами происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия одного шара в n раз больше кинетической энергии другого. При каком условии шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладающего меньшей энергией?

3.58. Определить долю энергии, теряемую частицей массы m_1 при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массы m_2, если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда $m_1 > m_2$) или прямо противоположном (когда $m_1 < m_2$) направлениях. При каком соотношении масс m_1/m_2 потеря энергии максимальна?

3.59. Частица *1* столкнулась с частицей *2*, в результате чего возникла составная частица. Найти ее скорость $\vec{v}$ и модуль v, если масса у частицы *2* в η = 2 раза больше, чем у частицы *1*, а их скорости перед столкновением равны $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ [м/с] и $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j}$ [м/с].

3.60. Два шарика одинаковых масс налетают друг на друга со скоростями v_1, и v_2 под углом α и разлетаются после абсолютно упругого удара со скоростями u_1 и u_2. Найти угол β между скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$.

3.61. Движущаяся частица претерпевает упругое нелобовое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Найти угол, между векторами скоростей частиц после столкновения.

3.62. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, попадает по линии центра в однородный шар массой M и радиусом r, находящийся в покое на гладкой горизонтальной поверхности. Происходит неупругий удар, в результате чего пуля проходит по диаметру через весь шар и застревает у его поверхности. Определить $\langle F \rangle$ среднюю силу сопротивления движению пули.

3.63. В баллистический маятник, состоящий из материальной точки массы M, подвешенной на невесомой и нерастяжимой нити длины l, попадает снаряд (материальная точка) массой m, летевший горизонтально с некоторой скоростью v_0, и в результате взаимодействия с M снаряд падает вниз, потеряв свою скорость. Каков максимальный угол α отклонения нити маятника от вертикали?

3.64. Пуля массы m, летевшая с начальной скоростью v, пробивает один подвешенный груз массы m и застревает во втором подвешенном грузе той же массы. Пренебрегая временем взаимодействия пули с грузом, найти количество теплоты Q_1, выделившееся в первом грузе, если во втором выделилось количество теплоты Q_2.

3.65. На тросе висит небольшой ящик с песком, в котором застревают пули, летящие горизонтально со скоростью v. Масса пули m_1, много меньше массы ящика m_2. Трос отклоняется от вертикали на угол α. Какое число пуль n попадает в песок за единицу времени?

3.66. От груза, висящего на пружине жесткости k, отрывается часть массы m. На какую высоту поднимается после прекращения колебаний оставшаяся часть груза?

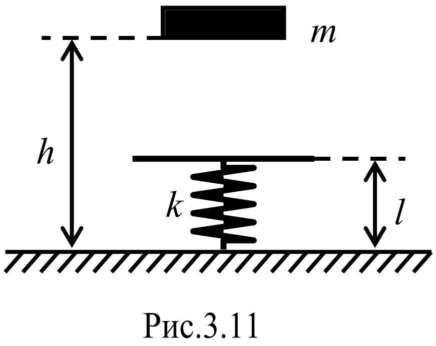


Рис.3.11

3.67. Тело массы m падает с высоты h без начальной скорости на стоящую вертикально на полу пружину жесткости k и длины l (рис.3.11). Найти максимальную силу давления на пол.

3.68. Два тела массами m = 0,1 кг и m = 0,2 кг, связанные нитью и невесомой сжатой пружиной жесткостью k = 100 Н/м, лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Затем нить пережигают. В процессе последующего движения максимальная скорость первого тела v = 2 м/с. На сколько была первоначально сжата пружина?

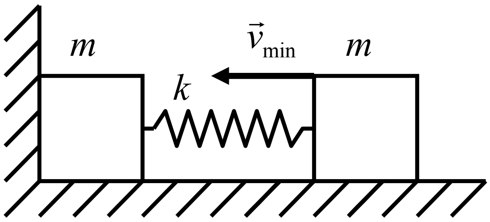


Рис.3.12

3.69. Два одинаковых тела массы m каждое, соединенные пружиной жесткости k, лежат на горизонтальной плоскости (рис.3.12). Левое тело касается вертикальной стенки. Какую минимальную скорость, направленную к стенке, надо сообщить правому телу, чтобы при обратном движении от стенки оно сдвинуло левое тело? Коэффициент трения каждого тела о плоскость равен f. Пружина в начальный момент не деформирована.

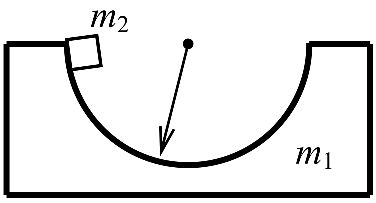


Рис.3.13

3.70. Подставка массы m_1 с полуцилиндрической выемкой радиуса R стоит на гладком столе (рис.3.13). Тело массой m_2 кладут на край выемки и отпускают. Определить скорость тела и подставки, когда тело проходит нижнюю точку полусферы.

3.71. На покоящееся тело массой m_1 налетает со скоростью v тело массой m_2. Сила, возникающая при взаимодействии, линейно растет за время τ от нуля до значения F_0, а затем линейно убывает до нуля за то же время. Определить скорости тел после взаимодействия и количество выделившейся теплоты Q.

3.72. Ракета сечения S, двигаясь в космическом пространстве со скоростью u, попадает в облако неподвижной пыли плотностью ρ. Какую силу тяги F должны развивать двигатели ракеты, чтобы та могла продолжать двигаться с той же постоянной скоростью? Удары пылинок о ракету считать абсолютно неупругими. Изменением массы ракеты пренебречь.

4.Динамика вращательного движения
4.1.Основные понятия и законы

Моментом силы относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O к точке приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис.4.1).

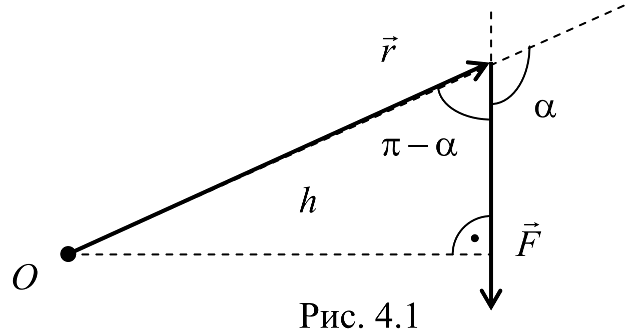


Рис. 4.1

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \quad (4.1)$$

Модуль этой величины равен

$$M = rF\sin\alpha = Fh, \qquad (4.2)$$

где $h = r\sin\alpha$ - плечо силы, т.е. кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы, α - угол, между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (см. рис.4.1). Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и направлен по правилу векторного произведения.

Моментом импульса материальной точки m относительно неподвижной точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс точки $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right]. \qquad (4.3)$$

Его модуль равен

$$L = rmv\sin\alpha, \qquad (4.4)$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Чтобы получить связь момента импульса $\vec{L}$ и момента силы $\vec{M}$, продифференцируем момент импульса по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}, m\vec{v}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt}\right]. \qquad (4.5)$$

Поскольку $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$,первое слагаемое в соотношении (4.5) равно нулю, а второе слагаемое можно записать в виде

$$\left[\vec{r}, \frac{d(m\vec{v})}{dt}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}. \qquad (4.6)$$

Подставив (4.5) в (4.6), получим *основное уравнение динамики вращательного движения* материальной точки

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим систему из n материальных точек, на которую действуют k моментов внешних сил.

Моментом импульса системы материальных точек (тела) относительно неподвижной точки O называется сумма моментов импульса всех точек

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \ . \qquad (4.8)$$

Записав для каждой входящей в систему точки основное уравнение динамики вращательного движения (4.7) и просуммировав по всем точкам системы с учетом того, что сумма моментов внутренних сил равна нулю, получим *основное уравнение динамики вращательного движения для системы материальных точек*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \vec{M}_{j\text{внеш}} \ , \qquad (4.9)$$

т.е. скорость изменения момента импульса системы относительно точки O равна векторной сумме моментов внешних сил относительно этой точки, действующих на систему. Если система материальных точек замкнута, то сумма моментов внешних сил равна нулю.

Закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const$ (4.10)

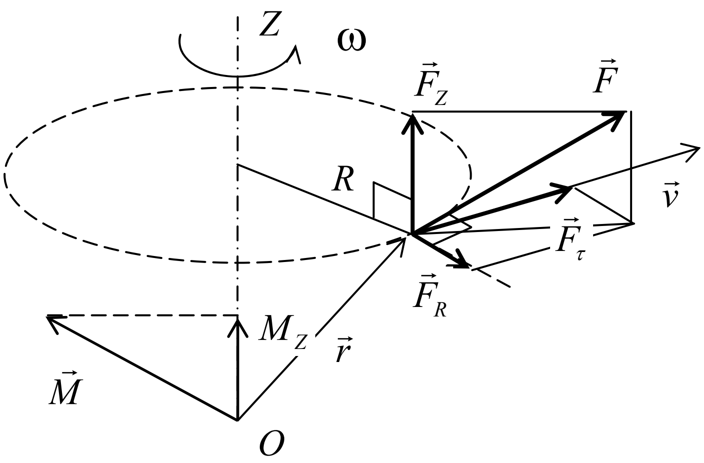


Рис. 4.2

выполняется в замкнутой системе, что следует из (4.9). Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси Z.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно неподвижной оси Z* называется проекция вектора $\vec{M}$ на эту ось (рис.4.2)

$$M_Z = \vec{M}_{пр\,Z} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_{пр\,Z} = R \cdot F_\tau \ , \qquad (4.11)$$

где F_τ - касательная (тангенциальная) составляющая силы $\vec{F}$.

Моментом импульса системы материальных точек (тела) относительно неподвижной оси Z называется проекция вектора на эту ось (см. рис.4.2)

$$L_Z = \vec{L}_{пр\,Z} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i\right]_{пр\,Z} = \sum_{i=1}^{n} R_i m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} R_i m_i \omega R_i = \omega \sum_{i=1}^{n} R_i^2 m_i \ . \qquad (4.12)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, имеет вид

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z \ . \qquad (4.13)$$

Если материальная точка массы m вращается вокруг неподвижной оси Z по окружности радиуса R, *моментом инерции I материальной точки* относительно данной оси называется произведение массы точки на квадрат расстояния до оси вращения

$$I = mR^2 \ . \qquad (4.14)$$

Моментом инерции системы материальных точек (тела) относительно неподвижной оси Z называется сумма моментов инерции всех точек системы (тела)

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \ . \qquad (4.15)$$

Подставив в уравнение (4.12) выражение (4.15), момент импульса относительно неподвижной оси представим в виде

$$L_Z = I\omega \ . \qquad (4.16)$$

Продифференцировав соотношение (4.16) по времени, получим *основное уравнение динамики вращательного движения* тела, вращающегося вокруг неподвижной оси в виде

$$M_Z = \frac{d(I\omega)}{dt} \ . \qquad (4.17)$$

Если момент инерции вращающегося тела постоянен, *основное уравнение динамики вращательного движения* тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, в этом частном случае можно записать

$$M_Z = I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon \ . \qquad (4.18)$$

Теорема Штейнера: момент инерции тела I_0 относительно произвольной оси OO' (рис.4.3) равен сумме момента инерции тела I_C относительно оси CC', параллельной данной, проходящей через центр масс (точку C), и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями

$$I_0 = I_C + md^2 \ . \qquad (4.19)$$

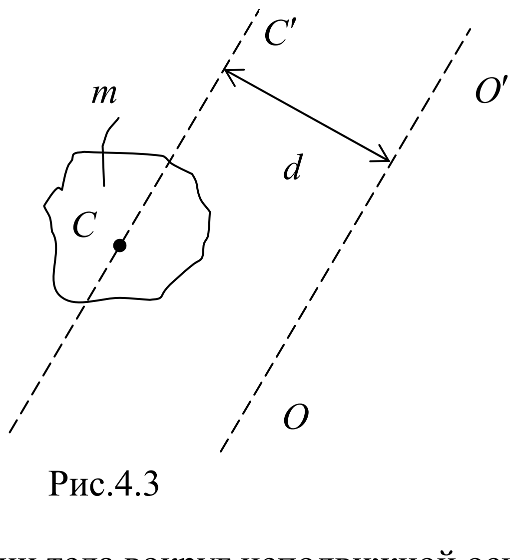


Рис.4.3

Кинетическая энергия при вращении тела вокруг неподвижной оси:

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2} \quad . \qquad (4.20)$$

Кинетическая энергия тела, катящегося без скольжения, имеет вид

$$E_K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \quad , \qquad (4.21)$$

где v - скорость центра масс тела.

Элементарная работа при вращении твердого тела

$$dA = M_Z d\varphi , \qquad (4.22)$$

где $d\varphi$ - угол поворота, M_Z - момент сил, действующих на тело (вращающий момент).

Работа постоянного момента сил равна

$$\Delta A = M_Z \Delta\varphi . \qquad (4.23)$$

Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t} = M_Z \langle \omega \rangle$. (4.24)

Мгновенная мощность $N = M_Z \omega$. (4.25)

Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение кинетической энергии связаны соотношением

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} \quad . \qquad (4.26)$$

<table>
<tr><td>Поступательное движение вдоль OX
масса m
сила $\vec{F}$
импульс $\vec{p} = m\vec{v}$</td><td>Вращение тела вокруг неподвижной оси Z
момент инерции $I = mR^2$
момент силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$, $M_Z = R \cdot F_\tau$
момент импульса $L = I\omega$, $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основное уравнение динамики</td></tr>
<tr><td>$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, $m\vec{a} = \vec{F}$</td><td>$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, $I\varepsilon = M$, $\frac{dL_Z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = M$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Закон сохранения</td></tr>
<tr><td>импульса
$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = const$</td><td>момента импульса
$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const$, $I\omega = const$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Работа, мощность</td></tr>
<tr><td>$dA = Fds\cos\alpha$
$N = Fv$</td><td>$dA = Md\varphi$
$N = M\omega$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кинетическая энергия</td></tr>
<tr><td>$E_K = \frac{mv^2}{2}$</td><td>$E_K = \frac{I\omega^2}{2}$</td></tr>
</table>

4.2.Примеры решения задач

Задача 4.1. Шайба *A* (рис.4.4) может свободно скользить вдоль гладкого стержня в форме полукольца радиуса *R*. Полукольцо вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO'. Найти угол α, который соответствует устойчивому положению шайбы.

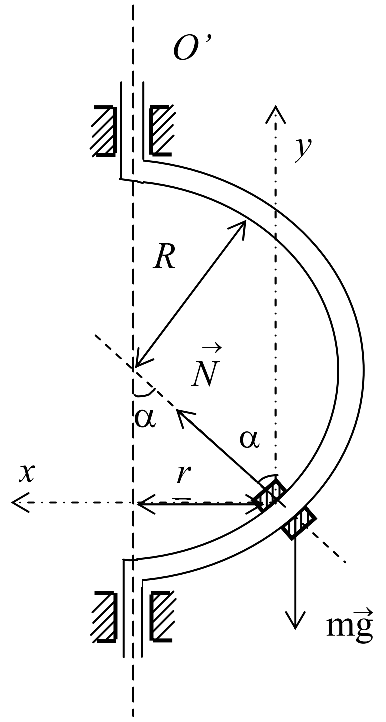


Рис.4.
4

Решение. При отсутствии трения на шайбу действует сила нормальной реакции опоры со стороны кольца $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. В проекциях на оси x и y второй закон Ньютона примет вид

$$N\cos\alpha - mg = 0,$$

$$N\sin\alpha = ma_n,$$

где a_n - нормальное ускорение,

$$a_n = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\alpha .$$

Решая уравнения совместно, получим

$$\frac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{m\omega^2 R\sin\alpha}{mg};\ \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

Если $g < \omega^2 R$,то $\alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}$. Если $g > \omega^2 R$, то $\alpha = 0$.

Задача 4.2. Определить момент инерции круглого диска радиуса *R*, массой *m* относительно оси *Z*, перпендикулярной плоскости диска, проходящей через его геометрический центр.

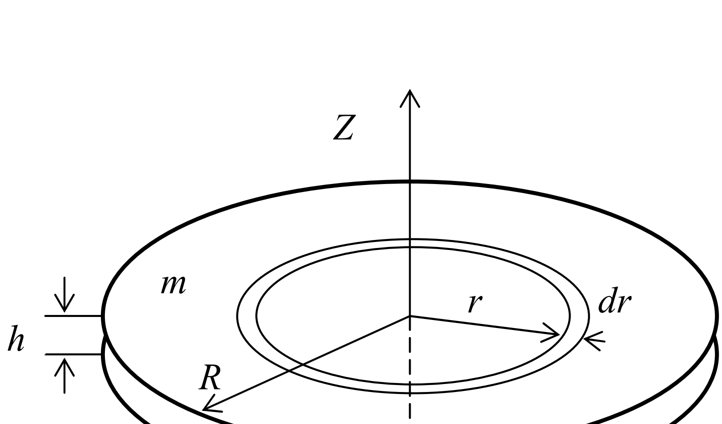


Рис. 4.5

Решение. Плотность кольца равна (рис.4.5) $\rho = \dfrac{m}{\pi R^2 h}$.

Выделим мысленно кольцо радиуса r шириной dr. Все элементы этого кольца находятся на одинаковом расстоянии от оси Z. Тогда момент инерции кольца относительно оси Z равен

$dI_Z = dmr^2; \quad dm = \rho h 2\pi r dr$.

Подставив выражение массы кольца dm, получим

$dI_Z = \rho h 2\pi r dr r^2 = 2\pi\rho h r^3 dr$.

Момент инерции диска найдем интегрированием

$$I_Z = \int_0^R dI_Z = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho h R^4}{2}.$$

Подставив выражение плотности, найдем момент инерции диска $I_Z = mR^2/2$.

Задача 4.3. Найти момент инерции тонкой однородной пластины массы m относительно оси OO', проходящей через одну из вершин пластины перпендикулярно к ее плоскости, если стороны пластины равны a и b (рис.4.6).

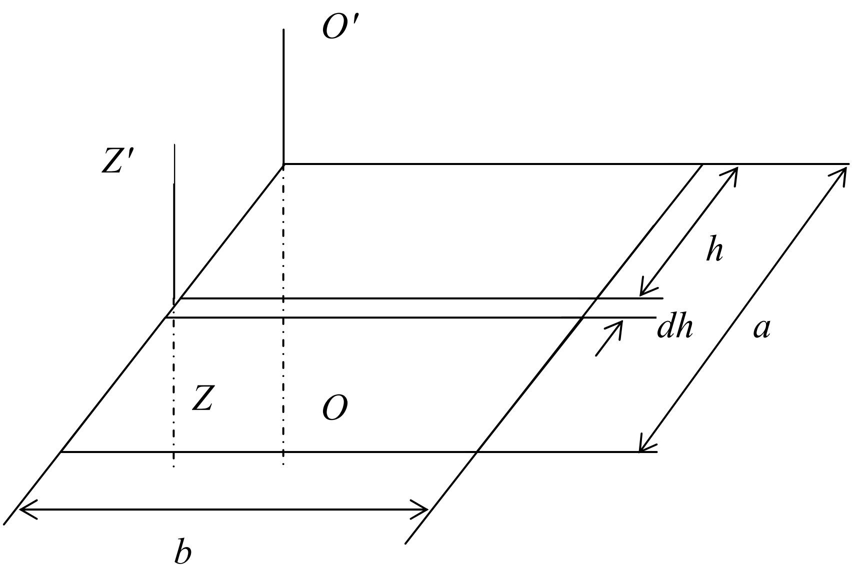


Рис.4.6

Решение. Обозначим σ - поверхностную плотность массы пластины $\sigma = \dfrac{m}{ab}$. Выделим пластинку шириной dh (стержень) и найдем момент инерции стержня относительно оси OO' с помощью теоремы Штейнера. Учитывая, что масса стержня равна $dm = bdh\sigma$.

Момент инерции стержня относительно оси ZZ' равен

$dI_Z = 1/3 \cdot dmb^2 = 1/3 \cdot bdh\sigma b^2 = 1/3 \cdot \sigma b^3 dh$.

По теореме Штейнера момент инерции стержня относительно оси OO' $dI_O = dI_Z + dmh^2$.

Проинтегрировав полученное выражение, найдем момент инерции стержня относительно оси OO'

$$I_O=\int_0^a dI_O=\int_0^a\left(\frac{1}{3}b^3\sigma+b\sigma h^2\right)dh=\int_0^a\frac{1}{3}b^3\sigma dh+\int_0^a b\sigma h^2dh=$$

$$=\frac{1}{3}b^3\sigma h\Big|_0^a+\frac{1}{3}b\sigma h^3\Big|_0^a=\frac{m}{3}\left(a^2+b^2\right).$$

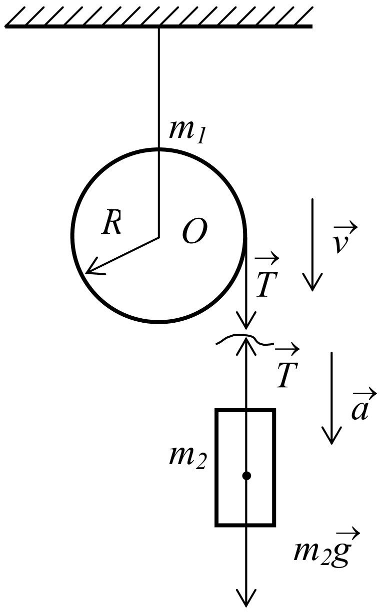


Рис.4.7

Задача 4.4. На однородный сплошной цилиндр массы m_1 радиуса R намотана легкая нить, к концу которой прикреплено тело массы m_2 (рис.4.7). В момент времени t = 0 система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени угловой скорости цилиндра.

Решение. Рассмотрим движение двух связанных тел: вращающегося цилиндра m_1 и тела m_2, совершающего поступательное движение. На тело действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона для тела m_2 имеет вид $m_2g-T=m_2a$.

Основное уравнение динамики вращательного движения для цилиндра $M=I\varepsilon$.

Момент инерции цилиндра $I=m_1R^2/2$. Угловое ускорение $\varepsilon=a/R$.

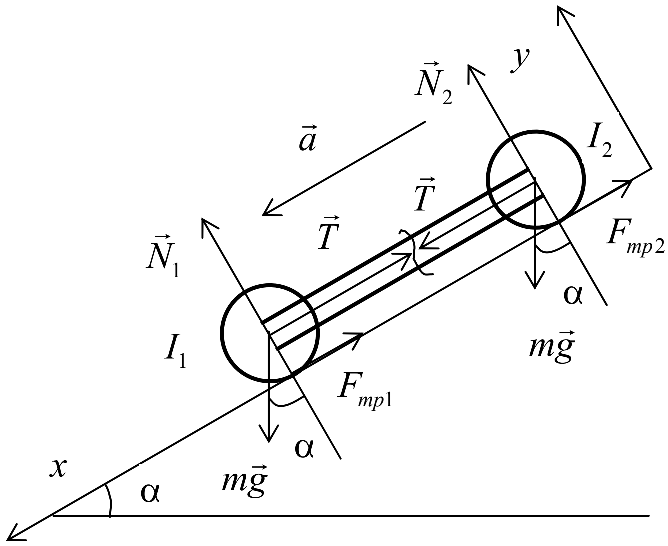
Тогда $TR=\dfrac{m_1R^2}{2}\dfrac{a}{R}$. Откуда $T=\dfrac{m_1a}{2}$. Подставив T в уравнение второго закона Ньютона, получим $m_2g-m_1a/2=m_2a$.

Линейное ускорение тела и точек на ободе диска равно

$$a=g\frac{2m_2}{m_1+2m_2}$$

Угловое ускорение диска $\varepsilon=a/R$. Подставив выражения a, найдем $\varepsilon=\dfrac{2m_2g}{(m_1+2m_2)R}$.

Угловое ускорение не зависит от времени. Следовательно, вращение равноускоренное, поэтому $\omega(t)=\varepsilon t=\dfrac{2m_2gt}{(m_1+2m_2)R}$.



Рис

Задача 4.5. Два катка, связанные штангой , скатываются с наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом (рис.4.8). Катки имеют одинаковые массы $m = 5$кг и одинаковые радиусы $r = 5$ см. Момент инерции первого катка относительно оси, проходящей через его центр $I_1 = 80 \text{кг} \cdot \text{см}^2$, второго - $I_2 = 40 \text{кг} \cdot \text{см}^2$. Штанга невесома. Определить: 1) угловое ускорение, с которым скатываются катки без скольжения; 2) силу натяжения штанги, если каток с большим моментом инерции движется впереди.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для каждого катка, мысленно разрезав штангу и заменив ее действие на каждый каток силой натяжения T

$$ma = mg\sin\alpha - T - F_{тр1} \ ,$$

$$ma = mg\sin\alpha + T - F_{тр2} \ .$$

Моменты сил трения, действующие на катки, приводят к возникновению угловых ускорений. Основное уравнение динамики вращательного движения для каждого катка имеет вид

$$F_{тр1}r = I_1\varepsilon, \ \ F_{тр2}r = I_2\varepsilon, \text{ откуда } F_{тр1} = I_1\varepsilon/r, \ \ F_{тр2} = I_2\varepsilon/r \ .$$

Линейное и угловое ускорение катка связаны соотношением $a = \varepsilon r$. Подставив выражения ускорения и сил трения в уравнения второго закона Ньютона, запишем

$$m\varepsilon r = mg\sin\alpha - T - I_1\varepsilon/r \ ,$$

$$m\varepsilon r = mg\sin\alpha + T - I_2\varepsilon/r \ .$$

Сложив уравнения, получим $2m\varepsilon r = 2mg\sin\alpha - (I_1 + I_2)\varepsilon/r$. Откуда

$$\varepsilon = \frac{2mgr\sin\alpha}{2mr^2 + I_1 + I_2} = 66\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; \ T = \frac{\varepsilon(I_1 - I_2)}{2r} = 2{,}64 \text{ Н} \ .$$

Задача 4.6. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_0 и осторожно положили на шероховатую горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ (см.рис.4.5). Сколько времени диск будет вращаться до остановки? Давление диска на поверхность считать равномерным.

Решение. Введем поверхностную плотность массы $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$.

Найдем момент сил трения M, действующих на диск.

Выделим кольцо радиуса r шириной dr. Сила трения, действующая на кольцо, равна $dF = \mu dN = \mu g dm = \mu g \sigma 2\pi r dr$.

Момент действующей на кольцо силы трения

$dM = dF \cdot r = \mu g \sigma 2\pi r^2 dr$.

Проинтегрировав выражение dM, получим момент сил трения, действующих на диск

$$M = \int_0^R dM = \int_0^R \mu g \sigma 2\pi r^2 dr = \mu g \sigma 2\pi \int_0^R r^2 dr = \mu g \sigma 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\mu g m R.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения для диска $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$. При торможении диска $I\, d\omega/dt = -M$, откуда $d\omega = -(M/I)dt$. Проинтегрировав полученное выражение, найдем угловую скорость $\omega = -(M/I)t + const$.

Постоянную интегрирования найдем из начальных условий. Поскольку при $t = 0$ $\omega = \omega_0$, зависимость угловой скорости от времени имеет вид $\omega = \omega_0 - (M/I)t$. В момент остановки $\omega = 0$, т.е. время до остановки $t_0 = \omega_0 I/M$.

Момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через его центр, равен $I = mR^2/2$.

Окончательно получим $t_0 = 3\omega_0 R/(4\mu g)$.

Задача 4.7. На неподвижный блок массой m_1 намотана легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой подвешено тело массой m_2 (см. рис.4.7). В момент времени $t = 0$ система пришла в движение. Найти зависимость момента импульса системы относительно оси блока от времени.

Решение. Момент импульса системы относительно оси складывается из момента импульса блока и тела $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ или

$L_{00} = I\omega + m_2 v R = I\omega + m_2 \omega R^2 = \omega\left(I + m_2 R^2\right)$,

где I - момент инерции блока, ω - угловая скорость вращения блока $\omega = v/R$.

Запишем второй закон Ньютона для тела m_2 : $m_2 g - T = m_2 a$ и основное уравнение динамики вращательного движения для блока : $TR = I\varepsilon$, где $\varepsilon = a/R$. Отсюда $I\varepsilon = Rm_2(g - a) = m_2 R(g - \varepsilon R)$,

$\varepsilon = m_2 gR/\left(I + m_2 R^2\right)$. Угловое ускорение ε не зависит от времени. Это значит, что $\omega = \varepsilon t$, $(\omega_0 = 0)$. Следовательно, угловая скорость равна $\omega = m_2 gRt/\left(I + m_2 R^2\right)$,а момент импульса

$$L = \frac{m_2 gRt}{I + m_2 R^2} \cdot \left(I + m_2 R^2\right) = m_2 gRt\,.$$

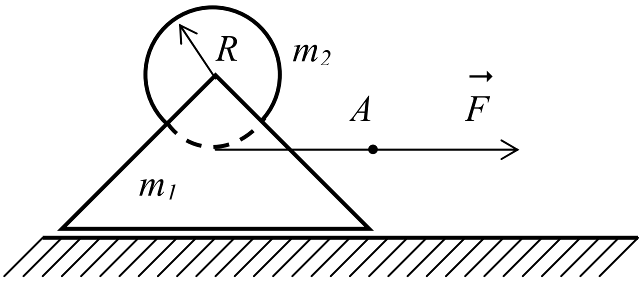


Рис.4.9

Задача 4.8. На подставке массы m_1 укреплена ось с цилиндром радиуса R массы m_2 . На цилиндр намотана веревка, к которой приложена постоянная сила F . Найти ускорения тела массы m_1, цилиндра m_2 и точки A веревки. Трением пренебречь. Веревку считать идеальной невесомой нерастяжимой нитью.

Решение. Линейное ускорение подставки и оси цилиндра

$$a_1 = \frac{F}{m_1 + m_2}\,.$$

Угловое ускорение цилиндра

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{FR}{0{,}5 \cdot m_2 R^2} = \frac{2F}{m_2 R}\,.$$

Соответствующее линейное ускорение веревки $a_2 = \varepsilon R = \dfrac{2F}{m_2}$.

Результирующее ускорение точки A веревки

$$a_A = a_1 + a_2 = \frac{F}{m_1 + m_2} + \frac{2F}{m_2} = \frac{F\left(m_2 + 2m_1 + 2m_2\right)}{m_2\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{F\left(2m_1 + 3m_2\right)}{m_2\left(m_1 + m_2\right)}\,.$$

4.3.Задачи для самостоятельного решения

4.9 Тонкий однородный стержень длины $3l$ = 30 см согнут под прямым углом, как показано на рис.4.10 и может вращаться относительно вертикальной оси O_1O_2. Определить момент инерции стержня относительно оси O_1O_2, если масса единицы длины стержня m_0 = 3 кг/м.

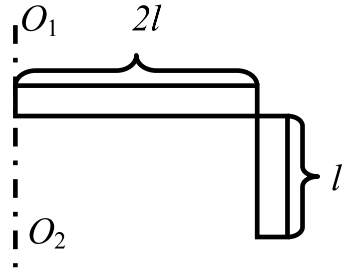


Рис.4.10

4.10. Тонкий однородный стержень длины $2l$ = 20 см согнут под прямым углом (α = 90°) и может вращаться относительно вертикальной оси (рис.4.11). Определить момент инерции стержня относительно оси O_1O_2, если масса единицы длины стержня m_0 = 6 кг/м.

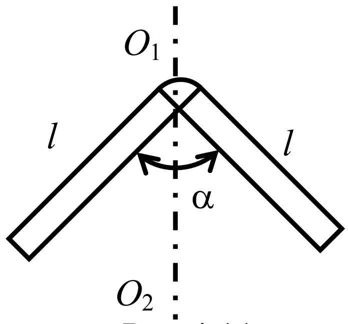


Рис.4.11

4.11. Найти момент инерции плоской однородной прямоугольной пластины массой m = 900 г относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина другой стороны a = 40 см.

4.12. Найти момент инерции прямоугольного треугольника массой m = 6 кг относительно оси, совпадающей с одним из его катетов, если другой катет a = 60 см.

4.13. На рис.4.12 AC - диагональ прямоугольника $ABCD$. Во сколько раз момент инерции J_2 треугольника ACD больше момента инерции J_1 треугольника ABC относительно оси O_1O_2, совпадающей со стороной AB?

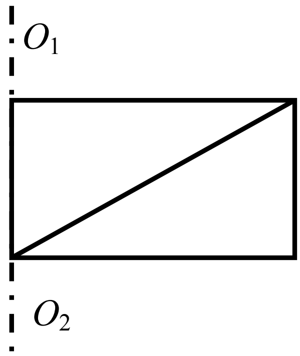


Рис.4.12

4.14. Определить момент инерции полого шара относительно касательной. Масса шара m, его внешний радиус R, а внутренний - r.

4.15. Найти момент инерции прямоугольной пластины массы m со сторонами a и b, расположенной в плоскости XOY, относительно оси OX и OY (рис.4.13).

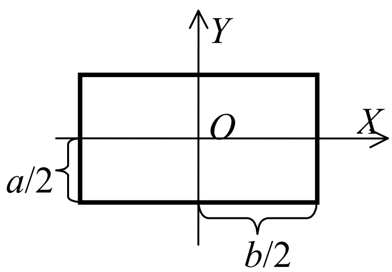


Рис.4.13

4.16. В условиях задачи 4.15. определить момент инерции пластины относительно оси OZ, проходящей через центр симметрии пластины точку O перпендикулярно плоскости пластины.

4.17. Найти момент инерции однородного куба относительно оси, проходящей через центры противолежащих граней. Масса куба m, длина ребра a.

4.18. Определить момент инерции тонкого обруча массой m и радиусом R относительно оси, касательной к обручу и лежащей в плоскости обруча.

4.19. Найти момент инерции тонкого диска массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с его диаметром.

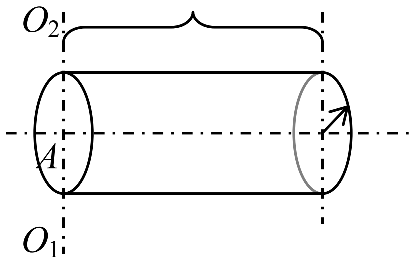


Рис.4.14

4.20. Ось симметрии сплошного однородного цилиндра массой m с радиусом основания R и длиной l расположена горизонтально. Определить момент инерции цилиндра относительно вертикальной оси O_1O_2 (рис.4.14), проходящей через центр основания цилиндра (точка A).

4.21. К ободу однородного диска радиусом $R = 0{,}2$м приложена постоянная тангенциальная сила $F = 100$Н. При вращении на диск действует сила трения, момент которой $M_{тр} = 5\text{Н}\cdot\text{м}$. Определить массу диска, если он вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 100\,\text{рад}/\text{с}^2$.

4.22. С какой силой следует прижать тормозную колодку к колесу, делающему $n = 30\,\text{об}/\text{с}$, для его остановки в течение $t = 20$с, если масса колеса распределена по объему и равна $m = 10$кг, диаметр колеса $d = 20$см? Коэффициент трения между колодкой и ободом колеса $f = 0{,}5$.

4.23. Маховик в форме сплошного диска имеет массу $m = 50$кг и радиус $R = 0{,}2$м. Маховику сообщили начальную угловую скорость $\omega_0 = 16\pi\,\text{рад}/\text{с}$. Под влиянием силы трения, приложенной по касательной к ободу, маховик останавливается. Найти силу трения, если маховик останавливается через время $t = 50$с.

4.24. Сплошной однородный диск радиуса R = 10 см, имевший начальную угловую скорость ω_0 = 50 рад/с (относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр масс), кладут основанием на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов диск сделает до остановки, если коэффициент трения между основанием диска и горизонтальной поверхностью f = 0,1 и не зависит от угловой скорости вращения диска?

4.25. С наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^0$, скатывается обруч. Длина наклонной плоскости $l = 4$м . Найти скорость обруча в конце наклонной плоскости.

4.26. В условиях задачи 4.25 скатывается шар. Определить время скатывания шара с наклонной плоскости.

4.27. В условиях задачи 4.25 скатывается диск. Найти ускорение центра масс диска.

4.28. Шар массой m = 10 кг и радиусом R = 20 см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид: $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где B = 4 рад/с^2, C = –1 рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил в момент времени t = 2 с.

4.29. К точке, радиус-вектор которой относительно начала координат O равен $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$, где $a, b, A, B =$ *const*. Найти момент $\vec{M}$ силы $\vec{F}$ относительно точки O.

4.30. Кольцо с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами, толщиной h и плотностью ρ вращается на горизонтальной шероховатой плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Найти момент сил трения, действующий на кольцо, если коэффициент трения кольца о плоскость равен f.

4.31. Однородный стержень массой m и длиной l (рис.4.15) падает без начальной скорости из положения *1*, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти горизонтальную $F_{гор}$ и вертикальную $F_{верт}$ составляющие силы, с которыми ось действует на стержень в горизонтальном положении *2*.

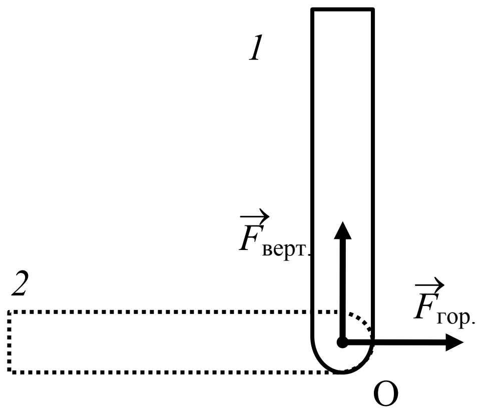


Рис.4.15

4.32. Абсолютно твердая однородная балка массой m и длиной L лежит на двух абсолютно твердых симметрично расположенных опорах, расстояние между которыми равно l (рис.4.16) Одну из опор выбивают. Найти начальное значение силы давления F_1, действующей на оставшуюся опору. Рассмотреть частный случай, когда $l = L$.

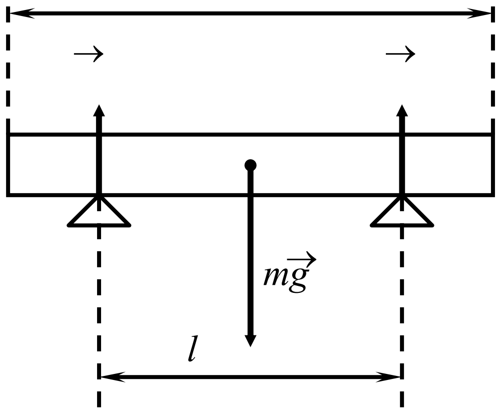


Рис.4.16

4.33. Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т.е. вращается не сгибаясь вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

4.34. Определить момент импульса тонкого обруча массой m и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через его центр.

4.35. Вычислить момент импульса Земли L_0, обусловленный ее вращением вокруг своей оси. Сравнить этот момент с моментом импульса L, обусловленным движением Земли вокруг Солнца. Землю считать однородным шаром, а орбиту Земли - окружностью.

4.36. Шарик массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти величину момента импульса шарика относительно точки бросания L_0 в зависимости от времени движения. Вычислить L в вершине траектории, если $m = 130$ г, $\alpha = 45°$, $v_0 = 25$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.37. Тонкий однородный стержень массы $m = 1$ кг и длины $l = 1$ м падает без начальной скорости из вертикального положения в горизонтальное. Найти момент импульса стержня, когда он составляет с вертикалью угол $\beta = 60$ °.

4.38. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены невесомой и нерастяжимой нитью и перекинуты через блок массой $m_3 = 1$ кг. Найти: 1) ускорение a, с которым движутся гири; 2) натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

4.39. На барабан массой $M = 9$ кг намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Найти ускорение груза. Барабан считать сплошным однородным цилиндром. Трением пренебречь.

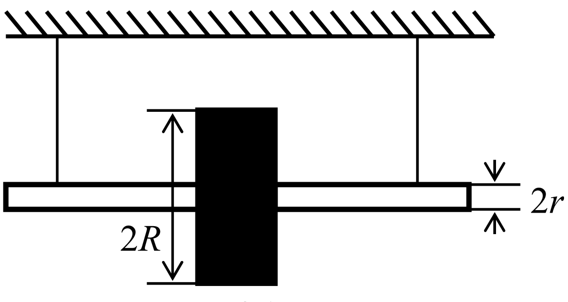


Рис.4.17

4.40. Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображена на рис. 4.17. На валик радиусом r наглухо насажен сплошной диск радиуса R и массой M. Валик и диск сделаны из одного материала, причем выступающие из диска части оси имеют массу m. К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается, а затем предоставляют диску свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

4.41. Когда диск Максвелла (см. задачу 4.40) достигает нижнего положения, он начинает подниматься вверх. С каким ускорением поднимается диск? Найти натяжение нити во время опускания и поднятия диска. Масса диска $M =$ 1 кг, его радиус $R =$ 10 см, радиус валика $r =$ 1 см. Массой валика пренебречь.

4.42. К шкиву креста Обербека (рис.4.18) прикреплена невесомая нить, к которой подвешен груз массы M = 1 кг. Груз опускается до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массой m = 250 г каждый на расстоянии R = 10 см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментами инерции грузов.

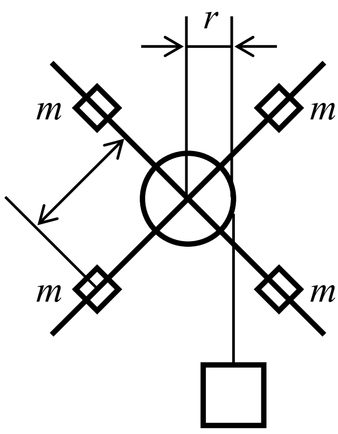


Рис.4.18

4.43. По наклонной плоскости составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения полый цилиндр, масса которого равна m = 0,5 кг. Внешний радиус цилиндра в два раза больше внутреннего радиуса. Найти величину силы трения цилиндра о плоскость.

4.44. На однородный сплошной цилиндр массы M и радиуса R плотно намотана легкая нить, концу которой прикреплен груз массой m (рис.4.19). В момент времени t = 0 система пришла в движение без начальной скорости. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени: а) модуля угловой скорости цилиндра,
б) кинетической энергии всей системы.

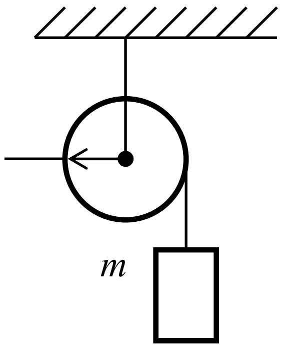


Рис.4.19

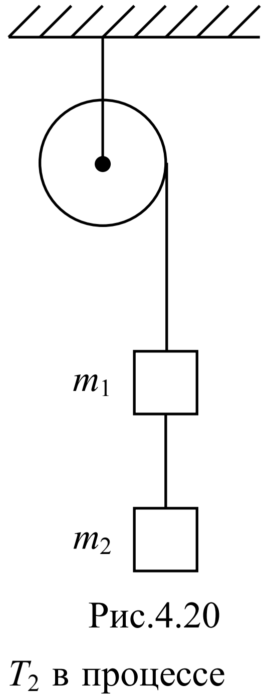


Рис.4.20

4.45. В системе, изображенной на рис.4.20, считать блок массой M сплошным цилиндром, тела m_1 и m_2 - материальные точки, нити невесомы и нерастяжимы. Трение не учитывать. Найти силы натяжения нитей T_1 и T_2 в процессе движения.

4.46. В системе, изображенной на рис. 4.21, считать блок массой M

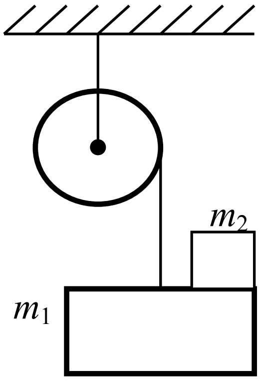


Рис.4.21

сплошным цилиндром, тела m_1 и m_2 - материальные точки, нить невесома и нерастяжима. Трение не учитывать. Определить силу давления груза m_2 на m_1 в процессе движения.

4.47. В системе, изображенной на рис.4.22, считать блок массой M сплошным цилиндром, тела m_1 и m_2 - материальные точки, нить невесома и нерастяжима. Трение не учитывать. Клин с углами α_2 и α_2 закреплен. Найти ускорение системы.

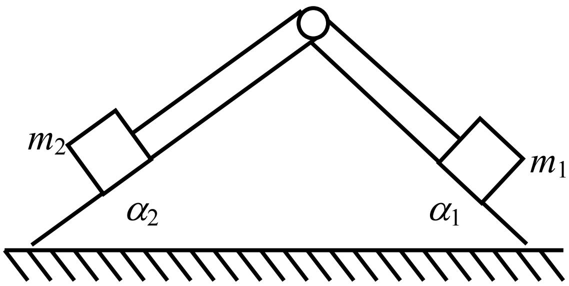


Рис.4.22

4.48. В системе, изображенной на рис.4.23, известны масса m груза A, масса M ступенчатого блока B, момент инерции J последнего относительно его оси и радиусы ступеней блока R и $2R$. Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорение груза a.

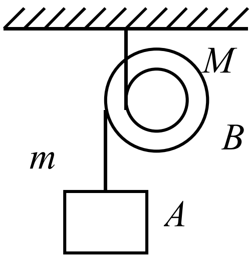


Рис.4.23

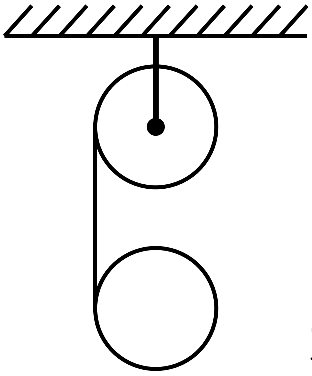


Рис.4.24

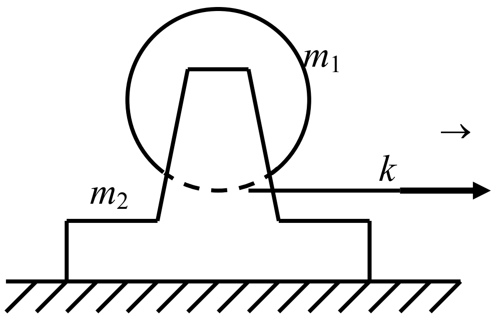


Рис.4.25

4.49. Система состоит из двух одинаковых однородных цилиндров, на которые симметрично намотаны две легкие нити (рис.4.24). Найти ускорение оси нижнего цилиндра в процессе движения. Трения в оси верхнего цилиндра нет.

4.50. Сплошной однородный цилиндр A массы m_1 может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, которая укреплена на подставке В массы m_2 (рис.4.25). На цилиндр плотно намотана легкая нить, к концу k которой приложили горизонтальную силу F. Трения между подставкой и опорной горизонтальной плоскостью нет. Найти кинетическую энергию этой системы через t секунд после начала движения.

4.51. На шероховатой доске на расстоянии l от ее конца находится сплошной цилиндр (рис.4.26). Доску начинают двигать с ускорением $\vec{a}_0$ влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр масс цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски? Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

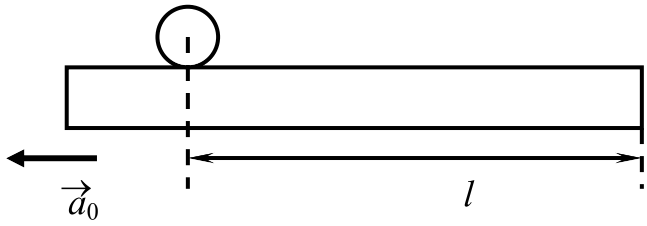


Рис.4.26

4.52. На полый тонкостенный цилиндр массы m намотана тонкая и невесомая нить (рис.4.27). Свободный конец нити прикреплен к потолку лифта, движущегося вниз с ускорением $\vec{a}_1$. Цилиндр предоставлен сам себе. Найти ускорение цилиндра относительно лифта и силу натяжения нити. Во время движения нить считать направленной вертикально.

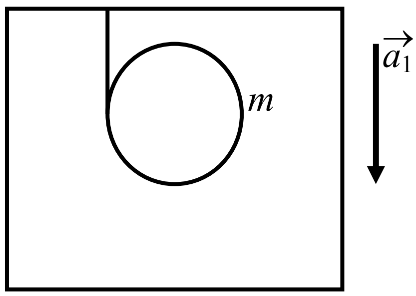


Рис.4.27

4.53. Горизонтальный тонкий однородный стержень AB массы m и длины l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. В некоторый момент на конец В начала действовать постоянная сила F, которая все время перпендикулярна к первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения.

4.54. Однородный шар массой m движется поступательно по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\vec{F}$, приложенной, как показано на рис. 4.28 под углом α к горизонту. Коэффициент трения между шаром и плоскостью f. Определить силу F и ускорение шара.

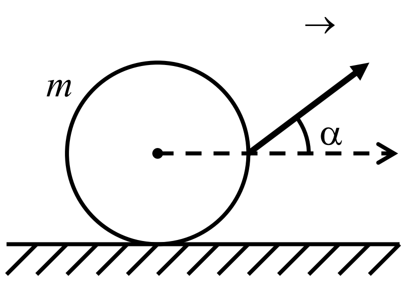


Рис.4.28

4.55. Маховик, имеющий начальную угловую скорость ω_0, начинает тормозиться силами, момент которых относительно его оси пропорционален квадратному корню из его угловой скорости. Найти среднюю угловую скорость маховика за все время торможения.

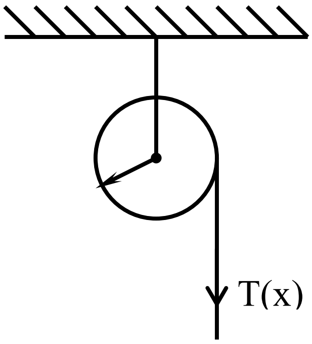


Рис.4.29

4.56. Однородный сплошной цилиндр радиуса R и массой m может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис.4.29). На цилиндр в один ряд намотан тонкий шнур длины l и массы m. Найти угловое ускорение цилиндра в зависимости от длины x свешивающейся части шнура. Считать, что центр масс намотанной части шнура находится на оси цилиндра.

4.57. Шар диаметром d = 10 см катится без скольжения на горизонтальной плоскости, делая n = 4 об/с. Масса шара m = 2 кг. Определить кинетическую энергию шара.

4.58. Карандаш длиной l = 10 см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую и линейную скорость будет иметь в конце падения: 1) середина карандаша, 2) верхний его конец?

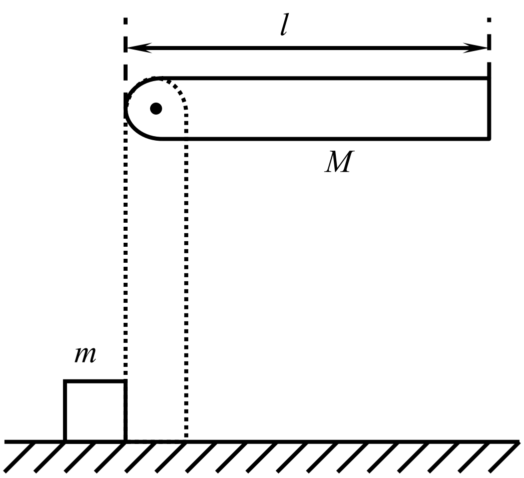


Рис.4.30

4.59. На гладкой горизонтальной плоскости лежит тонкий однородный стержень длины l = 1 м и массы m_1. По плоскости перпендикулярно стержню со скоростью v = 20 м/с скользит шарик (материальная точка) массы $m = m_1/3$. Как и с какой скоростью будет двигаться после удара стержень, если шарик после удара останавливается? Рассмотреть два случая: 1) шарик ударяется в середину стержня; 2) точка удара отстоит от середины стержня на расстояние x = l/4. Найти долю η энергии, которая израсходовалась на работу против сил неупругой деформации. 4.60. Стержень массы M и длины l, который может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное (рис.4.30). Проходя через вертикальное положение, нижний конец стержня упруго ударяет о малое тело массы m, лежащее на гладком горизонтальном столе. Определить скорость тела m после удара.

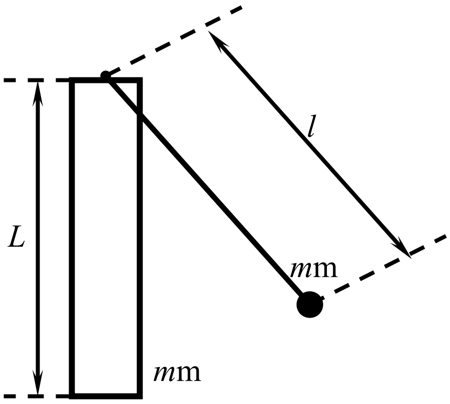


Рис.4.31

4.61. Тонкий стержень массой m и длиной

L подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длиной l шарик такой же массы m. Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити
шарик после удара о стержень остановится? Считать удар абсолютно упругим (рис.4.31).

4.62. Математический маятник массы m и стержень массы M (рис.4.32) подвешены к точке A. Длина нити маятника l, длина стержня l. Маятник отклоняют, так что шарик поднимается на высоту h, Затем шарик отпускают и он сталкивается неупруго со стержнем. Как будут двигаться шарик и нижний конец стержня после удара и на какие высоты поднимутся?

4.63. Решить задачу 4.62, если до удара нижний конец стержня был поднят на высоту h.

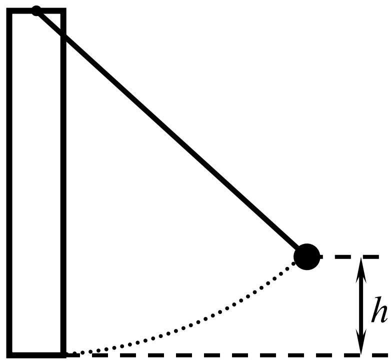


Рис.4.32

4.64. Вертикально висящая однородная доска длины $L =$ 1,5 м и массой $M =$ 10 кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля массы m = 10 г, летящая горизонтально с начальной скоростью v_0 = 600 м/с, пробивает доску и вылетает со скоростью v. Определить скорость v, если после удара доска стала колебаться с угловой амплитудой $\alpha =$ 0,1 рад.

4.65. Тонкая прямоугольная пластина может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси AA_1 (рис.4.33), совпадающей с одной из ее длинных сторон. Короткая сторона b = 0,6 м. В точку B, находящуюся ниже оси вращения на расстоянии x = 0,5 м, ударяет пуля массы m_1 = 10 г, летевшая горизонтально перпендикулярно пластине со скоростью v = 200 м/с. Масса пластины m_2 = 8 кг. Какую угловую скорость приобретет пластина, если удар абсолютно упругий? При каком значении x в момент удара не возникнет горизонтальная сила реакции оси, действующей на пластину?

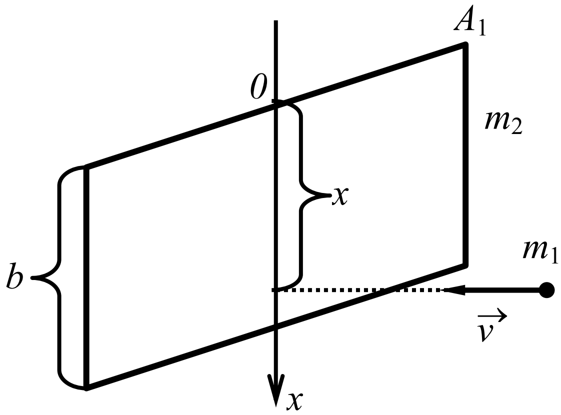
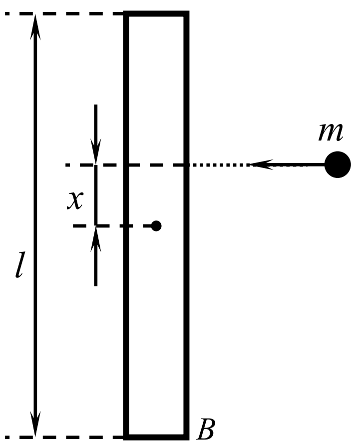


Рис.4.33



Рис

4.66 На гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M (рис.4.34). В точку, на расстоянии x от середины стержня абсолютно упруго ударяет шарик массы m, движущийся перпен-дикулярно ему. Найти x и соотношение масс M и m, при котором шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию.

4.67. Горизонтальная платформа массой m_1 = 120 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая n_1 = 8 об/мин. Человек массой m_2 = 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы в точку, расположенную от центра платформы на расстоянии половины ее радиуса? Считать платформу круглым однородным диском, а человека - материальной точкой.

4.68. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_1, падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью ω_2. Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны J_1 и J_2. Удар абсолютно неупругий. На сколько изменится кинетическая энергия системы после падения второго диска?

4.69. Человек массой m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массы m_2 и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ_1 относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

4.70. Однородный стержень длиной l висит на горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. Какую угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню, чтобы он повернулся на 90 °?

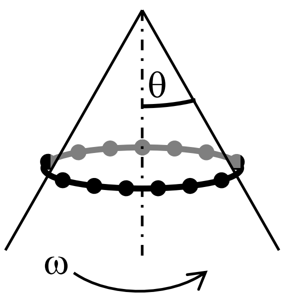


Рис.4.35

4.71. Частица массы M начинает двигаться со скоростью v_0, составляющей угол α с горизонтом, по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра.

4.72. Цепочка массой m, образующая окружность радиуса R, надета на гладкий круговой конус с углом полураствора θ, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (рис.4.35). Найти натяжение цепочки.

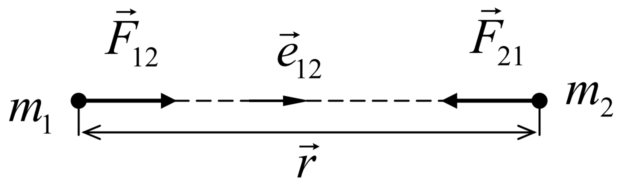
5.Гравитационное поле

5.1.Основные понятия и законы

По современным представлениям, в природе существует четыре вида фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, ядерное и слабое. Последние два из них предмет изучения ядерной физики. Большинство сил, с которыми оперирует механика относятся к нефундаментальным – сила упругости, сила трения. Важными фундаментальными силами являются гравитационные силы, выражение для которых дает *закон всемирного тяготения*: сила, с которой две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу, прямо пропорциональны массам этих точек и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2},\ \vec{F}_{12}=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{e}_{12},\ \vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12},\ \left|\vec{F}_{21}\right|=\left|\vec{F}_{12}\right|=F, \qquad (5.1)$$

где $\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\,\text{м}^3/\left(\text{кг}\cdot\text{с}^2\right)$ - гравитационная постоянная, $\vec{e}_{12}$ - единичный вектор, направленный от первой точки ко второй (рис.5.1).



Рис

Гравитационное взаимодействие осуществляется через гравитационное поле. Тело массы M создает в пространстве вокруг себя гравитационное поле.

Напряженностью гравитационного поля называется

$$\vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}, \qquad (5.2)$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на точку массы m, помещенную в гравитационное поле, созданное телом массы M. Напряженность – это сила, действующая на единичную массу со стороны поля.

Как всякое стационарное поле центральных сил, гравитационное поле является потенциальным, гравитационные силы – консервативными. Напомним, что работа консервативных сил при перемещении по замкнутому контуру равна нулю. Например, при движении спутника по орбите вокруг Земли работа гравитационных сил равна нулю.

Используя определение потенциальной энергии, данное в третьем разделе, получим выражение для потенциальной энергии гравитационного поля.

Работа консервативной гравитационной силы равна убыли потенциальной энергии $dA = -dU$. Проинтегрировав это соотношение получим выражение для потенциальной энергии

$$U = -\int F(r)dr = -\int \frac{\alpha}{r^2}dr = \frac{\alpha}{r} + C, \qquad (5.3)$$

где α - постоянная, C - постоянная интегрирования. За ноль отсчета потенциальной энергии можно принять любой уровень. Обычно считают, что при $r \to \infty$ $U = 0$, следовательно, $C = 0$.

Поскольку $\vec{F} = \gamma \frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$, т.е. $\alpha = -\gamma Mm$, *потенциальная энергия* частицы массы m в гравитационном поле, созданном телом массы M определяется выражением

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r} . \qquad (5.4)$$

Потенциалом гравитационного поля называется величина, равная потенциальной энергии частицы единичной массы в данной точке поля

$$\varphi = \frac{U}{m}. \qquad (5.5)$$

Работа, совершаемая силами гравитационного поля над частицей массы m при перемещении ее из точки 1 поля в точку 2, равна убыли потенциальной энергии

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (5.6)$$

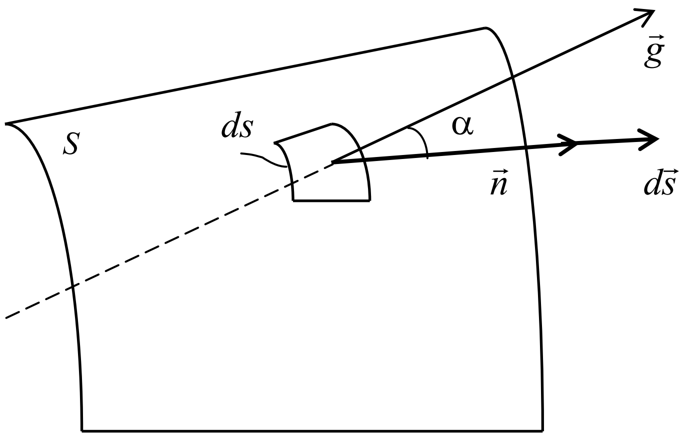


Рис. 5.2

В случае центрально симметричного поля $F = F(r)$ очевидно, что продифференцировав U или φ по r, мы получим соответственно выражения силы (5.1) и напряженности поля (5.2). Соотношения (5.1)-(5.6), записанные для материальных точек массами M и m, будут справедливы и для системы, состоящей из однородного шара массы M и частицы массы m, и для двух однородных шаров, если под r понимать расстояние между их центрами.

Рассмотрим в качестве примера гравитационное поле Земли, считая Землю однородным шаром массы M. В этом случае *напряженность* $\vec{g}$ - это *ускорение свободного падения* в гравитационном поле Земли. Получим выражение для него.

Элементарным потоком вектора $\vec{g}$ сквозь поверхность ds называется скалярное произведение

$$d\Phi_g = \left(\vec{g}d\vec{s}\right) = gds\cos\alpha\,, \qquad (5.7)$$

где $d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности, α - угол между векторами $\vec{g}$ и $\vec{n}$ (рис.5.2).

Потоком вектора $\vec{g}$ сквозь произвольную поверхность называется

$$\Phi_g = \oint_S d\Phi_g = \oint_S \vec{g}d\vec{s} = g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma M'\,.$$

Теорема Гаусса: поток Φ_g вектора напряжённости гравитационного поля $\vec{g}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность равен с множителем ($4\pi\gamma$) суммарной массе M', заключённой внутри этой поверхности

$$\Phi_g = \oint_S d\Phi_g = 4\pi\gamma M' \qquad (5.8)$$

Выберем в качестве гауссовой поверхности поверхность сферы радиуса *r* (рис.5.3).

Если $r < R, r = R - h$ масса, заключенная внутри поверхности *S*, M' - это масса шара

$$M' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{R^3}r^3, \qquad (5.9)$$

где масса Земли $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$, ρ - плотность Земли.

Из соотношений (5.8), (5,9) получим $g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma\frac{M}{R^3}r^3$, откуда внутри Земли (при $r < R$)

$$g = \frac{\gamma M}{R^3}r = \frac{\gamma M}{R^3}\left(R - h\right)\,. \qquad (5.10)$$

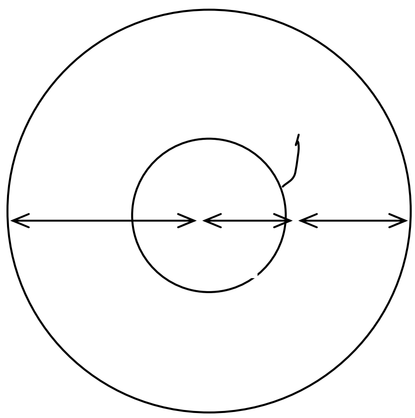


Рис.5.3

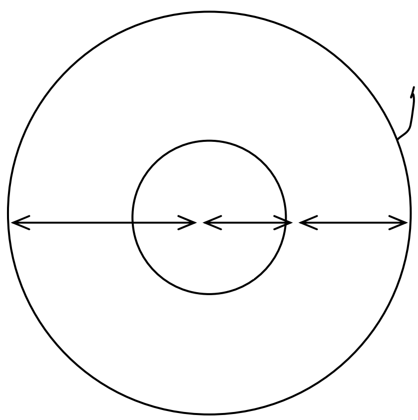


Рис. 5.4

Если при $r > R, r = R + h$ (рис.5.4) также применить теорему Гаусса с учетом того, $M = M'$, получим

$$\Phi_g = \oint_S d\Phi_g = \oint_S \vec{g}d\vec{s} = g \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\gamma M \ . \qquad (5.11)$$

Откуда над поверхностью Земли (при $r > R$)

$$g = \frac{\gamma M}{r^2} = \frac{\gamma M}{(R+h)^2} . \qquad (5.12)$$

Из формул (5.10),(5,12) при $r = R, \ h = 0$ следует, что ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$g_0 = \frac{\gamma M}{R^2} \ . \qquad (5.13)$$

Первая космическая скорость v_I – это скорость, которую нужно сообщить телу массы *m*, чтобы оно двигалось вокруг Земли по круговой орбите радиуса $R \ (h \approx 0)$.

Запишем второй закон Ньютона, учитывая, что сила тяготения сообщает телу центростремительное ускорение

$$\frac{mv_I^2}{R} = \frac{\gamma Mm}{R^2} \ . \qquad (5.14)$$

Откуда получим

$$v_I = \sqrt{\gamma M/R} = \sqrt{g_0 R} \approx 7{,}9 \text{ км/с}. \qquad (5.15)$$

Вторая космическая скорость v_{II} - это скорость, которую необходимо сообщить телу массы *m* на поверхности Земли, чтобы оно покинуло пределы поля тяготения Земли, т.е. удалилось на расстояние от центра Земли $r = \infty$.

Запишем закон сохранения механической энергии $E_1 = E_2$ применительно к этому случаю. На поверхности Земли полная механическая энергия

$$E_1 = E_{K1} + U_1 = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} \ . \qquad (5.16)$$

На расстоянии $r = \infty$

$$E_2 = E_{K2} + U_2 = 0 + 0 = 0 \ . \qquad (5.17)$$

Следовательно $\frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = 0$. (5.18)

Откуда получим

$$v_{II} = \sqrt{2\gamma M/R} = \sqrt{2g_0 R} \approx 11 \text{км/с} \qquad (5.19)$$

Если массы взаимодействующих тел соизмеримы, например две звезды (два однородных шара), то они будут двигаться под действием сил тяготения вокруг из общего центра масс точки *C*, который находится на прямой, соединяющей их центры, но не совпадает с центром ни одной из них. Такая задача о движении двух взаимодействующих частиц называется задачей двух тел. Ее решение сводится к рассмотрению движения воображаемой частицы, масса которой называется приведенной массой частиц

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad (5.20)$$

в центральном силовом поле

$$\mu\vec{a} = \vec{F}. \qquad (5.21)$$

В рассматриваемом случае под $\vec{F}$ понимается сила тяготения (5.1).

Поскольку масса Земли $M >> m$, центр масс C системы двух тел M и m совпадает с центром Земли. Следовательно, тело массы m, являющееся спутником Земли, будет двигаться вокруг нее по круговой орбите .Если высота орбиты h (см.рис.5.4), в соответствии со вторым законом Ньютона для спутника на орбите получим

$$\frac{mv^2}{(R+h)} = \frac{\gamma Mm}{(R+h)^2}, \qquad (5.22)$$

откуда скорость спутника на круговой орбите высоты h равна $v = \sqrt{\gamma M/(R+h)}$.

Аналогично, если считать массу Земли значительно меньшей массы Солнца, Земля как спутник движется вокруг Солнца по круговой орбите, центром которой является их общий центр масс C – центр Солнца.

В общем случае движение планет в поле тяготения Солнца описывается *законами Кеплера*:

1.Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

2.Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

3.Квадраты периодов обращения двух планет относятся как кубы больших полуосей их орбит (рис.5.5) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$.

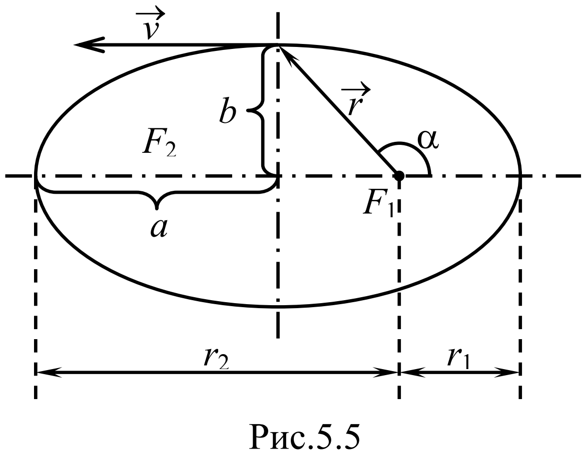


Рис.5.5

Законы Кеплера справедливы также для движения спутников вокруг планет.

5.2.Примеры решения задач

Задача 5.1. Спутник, движущийся в плоскости экватора, по круговой орбите в сторону вращения Земли будет оставаться неподвижным относительно поверхности Земли, если период обращения спутника T равен 24 часам. Найти радиус R орбиты такого стационарного спутника (рис.5.6). Радиус Земли $R_0 = 6400\,км$.

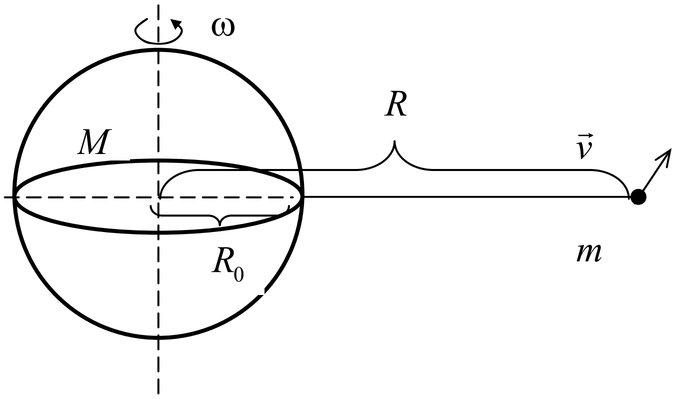


Рис. 5.6

Решение.

Сила тяготения, действующая на спутник, равна произведению его массы на нормальное (центростремительное) ускорение

$$F = ma_n,\ \ a_n = \omega^2 R,\ T = \frac{2\pi}{\omega},\ \text{следовательно,}\ \gamma\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R\ .$$

Подставив в это уравнение известное соотношение $\gamma M_З = g_0 R_0^2$, получим $\frac{g_0 R_0^2}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R$. Откуда $R = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_0^2 T^2}{4\pi^2}} = 42370км$.

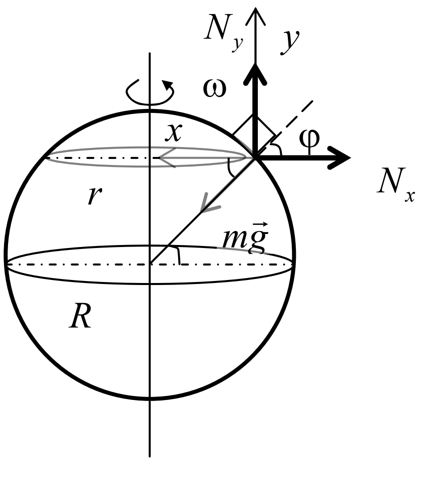


Рис. 5.7

Задача 5.2. Найти зависимость веса тела массы m от географической широты φ (рис.5.7).

Решение. Вес тела – это сила, с которой тело действует на связь (Землю). По третьему закону Ньютона, она равна силе реакции опоры N, действующей со стороны Земли на тело. Ее можно определить через проекции N_x, N_y, на оси координат.

Для тела массы m запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y

$$mg\cos\varphi - N_x = m\omega^2 r,$$
$$N_y - mg\sin\varphi = 0.$$

Откуда получим

$$N_x = mg\cos\varphi - m\omega^2 R\cos\varphi = m\cos\varphi\left(g - \omega^2 R\right),$$

$N_y = mg\sin\varphi$.

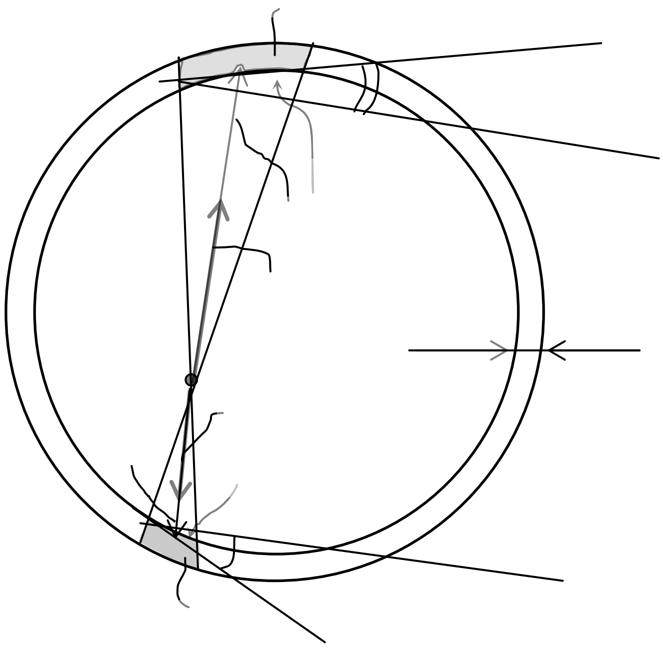
В итоге вес тела на широте φ равен

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{m^2\cos^2\varphi\left(g - \omega^2 R\right)^2 + m^2 g^2 \sin^2\varphi} =$$

$$= m\sqrt{\cos^2\varphi\left(g^2 - 2g\omega^2 R + \omega^4 R^2\right) + g^2\sin^2\varphi}\,.$$

Задача 5.3. Доказать, что внутри однородного шарового слоя $\vec{g} = 0$.

Решение. Точка A – произвольная точка внутри шарового слоя (рис.5.8). Поведем из этой точки два малых конуса с одинаковыми телесными углами $\Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 = \Delta\Omega$, которые вырезают на поверхности слоя ΔS_1 и ΔS_2. Массы элементов шарового слоя внутри конусов Δm_2 и Δm_1, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиус-векторы, проведенные из точки A к центру масс каждого элемента Δm_1 и Δm_2. Поэтому



Рис

$$\Delta\vec{g} = \gamma\frac{\Delta m_1}{r_1^2}\vec{r}_{01} + \gamma\frac{\Delta m_2}{r_2^2}\vec{r}_{02},$$ где $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$ - орты.

Масса элемента шарового слоя равна $\Delta m = \rho h\Delta S = \rho h\,\Delta S_0/\cos\alpha$, где ΔS_0 - площадка, перпендикулярная оси конуса, ρ - плотность, h - толщина слоя. Учитывая выражения для Δm_1, Δm_2, получим

$$\Delta\vec{g} = \gamma\rho\frac{h}{\cos\alpha}\left(\frac{\Delta S_{01}}{r_1^2}\vec{r}_{01} + \frac{\Delta S_{02}}{r_2^2}\vec{r}_{02}\right).$$

Так как, по определению телесного угла, $\Delta S_0/r^2 = \Delta\Omega$, то $\Delta\vec{g} = \gamma\rho\dfrac{h\Delta\Omega}{\cos\alpha}\left(\vec{r}_{01} + \vec{r}_{02}\right)$. Поскольку $\vec{r}_{01} = -\vec{r}_{02}$ как противоположные орты и $\left(\vec{r}_{01} + \vec{r}_{02}\right) = 0$, $\Delta\vec{g} = 0$.

Внутри однородного шарового слоя $\vec{g}=0$ в любой точке. Это же следует из теоремы Гаусса для гравитационного поля.

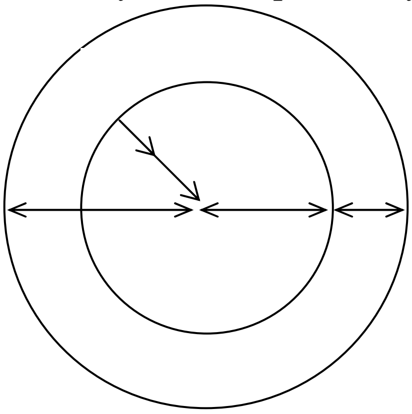


Рис. 5.9

Задача 5.4. Найти зависимость $\vec{g}=\vec{g}(\vec{r})$ внутри однородного шара радиуса R.

Решение. Выбрав произвольную точку A внутри шара, проводим через нее концентрическую сферу (рис.5.9). Поле в точке A определяется массой M', заключенной внутри сферы радиуса r, слой толщиной $h=R-r$ вне сферы радиуса r поле в точке A не создает. Откуда

$$\vec{g}_A=\vec{g}=\gamma\frac{M'}{r^2}\vec{r}_0=\gamma\frac{4/3\pi r^3\rho}{r^2}\vec{r}_0=$$

$$=4/3\pi\rho\gamma r\vec{r}_0=4/3\pi\rho\gamma\vec{r}=k\vec{r},$$

т.е. ускорение свободного падения $\vec{g}=\vec{g}(\vec{r})$ внутри шара пропорционально расстоянию до центра шара O и направлено по радиусу к центру шара.

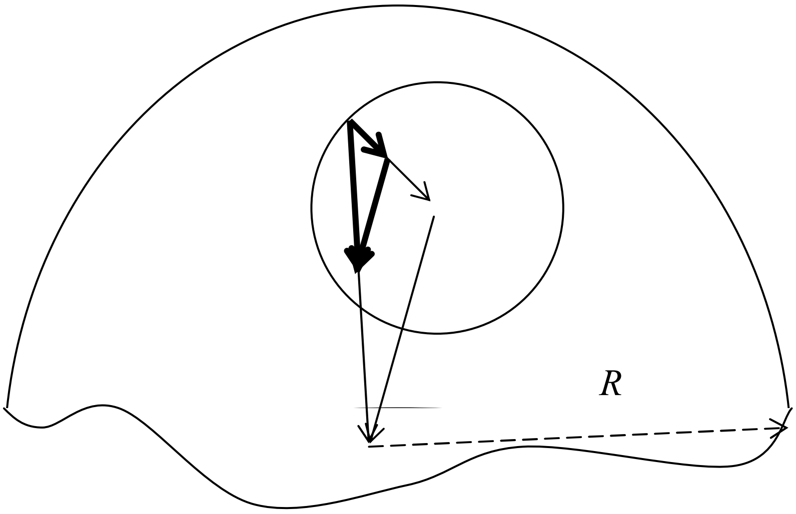


Рис. 5.10

Задача 5.5. Доказать, что внутри произвольной сферической полости, сделанной в однородном шаре $\vec{g}=const$, т.е. гравитационное поле однородно.

Решение. Рассмотрим поле в точке A (рис.5.10). Если бы не было полости, то $\vec{g}_1=k\vec{r}_1$. Наличие полости в объеме шара радиуса R меняет это поле на $\vec{g}_2=k\vec{r}_2$. Поэтому искомое поле определяется вектором напряженности $\vec{g}_A$, равным

$$\vec{g}_A=\vec{g}_1-\vec{g}_2=k\vec{r}_1-k\vec{r}_2=k(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=k\vec{d}.$$

Модуль $|\vec{d}|$ - это расстояние между центром шара O и полости O', $\vec{d}=const$, поэтому $\vec{g}=const$.

Задача 5.6. Найти напряженность гравитационного поля, создаваемого двумя звездами массами m_1 и m_2, расстояние между центрами которых l, в точке A, расположенной на расстоянии r_1 и r_2 от первой и второй звезд соответственно (рис.5.11).

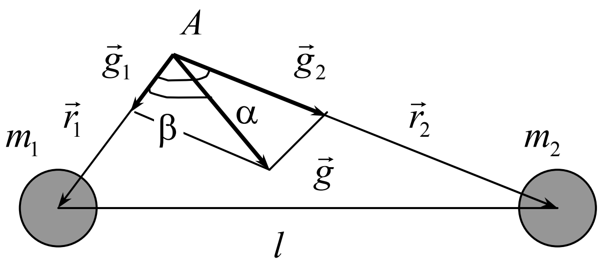


Рис.5.11

Решение. По принципу суперпозиции напряженность гравитационного поля в точке A есть векторная сумма напряженностей $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, создаваемых каждой звездой

$$\vec{g}_A = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

Из векторных треугольников по теореме косинусов получим

$$g^2 = g_1^2 + g_2^2 + 2g_1 g_2 \cos\alpha ,$$

$$l^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha .$$

Исключив $\cos\alpha$, найдем $g^2 = g_1^2 + g_2^2 + 2g_1 g_2 \dfrac{l^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}$.

Подставив значения g_1 и g_2, получим

$$g^2 = \gamma^2\left[\frac{m_1^2}{r_1^4} + \frac{m_2^2}{r_2^4} - 2\frac{m_1 m_2}{2r^2{}_1 r^2{}_2}\left(l^2 - r_1^2 - r_2^2\right)\right].$$

Определим направление вектора $\vec{g}$ (угол β) по теореме косинусов $g_2^2 = g_1^2 + g^2 + 2g_1 g \cos\beta$, откуда

$$\cos\beta = \frac{g^2 + g_1^2 - g_2^2}{2g_1 g}.$$

Потенциал гравитационного поля в точке A равен алгебраической сумме потенциалов φ_1 и φ_2.

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 = -\gamma\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right).$$

Задача 5.7. Двойная звезда – это система из двух звезд, движущихся вокруг их общего центра масс C (рис.5.12).

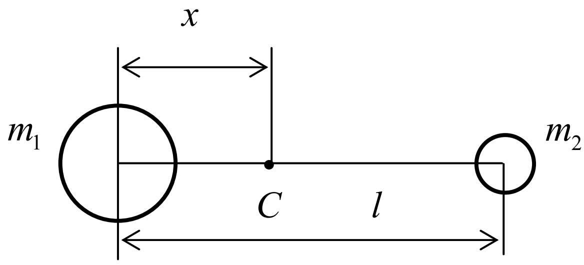


Рис.5.12

Известны: расстояние l между компонентами двойной звезды и период ее обращения T

вокруг точки C. Считая, что l не меняется, найти суммарную массу системы.

Решение. Обозначим массы компонент двойной звезды m_1 и m_2. Положение центра масс C определяется соотношением

$$\frac{x}{l-x}=\frac{m_2}{m_1}, \text{ откуда } x=\frac{lm_2}{m_1+m_2}.$$

Используя закон всемирного тяготения, запишем второй закон Ньютона для компонентов двойной звезды

$$\begin{cases} \gamma\dfrac{m_1m_2}{l^2}=m_1\omega^2x=m_1\dfrac{4\pi^2}{T^2}x\,, \\ \gamma\dfrac{m_1m_2}{l^2}=m_2\omega^2(l-x)=m_2\dfrac{4\pi^2}{T^2}(l-x). \end{cases}$$

Откуда $m_1=\dfrac{4\pi^2(l-x)l^2}{\gamma T^2}$, $m_2=\dfrac{4\pi^2xl^2}{\gamma T^2}$.

Искомая масса равна

$$m_1+m_2=\frac{4\pi^2l^3}{\gamma T^2}.$$

Задача 5.8. Найти вторую космическую скорость для Луны. Сопротивление среды не учитывать. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_{0Л}=g_0/5{,}76$, где $g_0=9{,}81\,\text{м/с}^2$ - ускорение свободного падения на поверхности Земли. Радиус Луны $R_Л=R_0/3{,}75$, где радиус Земли $R_0=6400\,\text{км}$.

Решение. Вторая космическая скорость для Луны - это скорость, которую необходимо сообщить телу на поверхности планеты, чтобы оно могло преодолеть ее поле тяготения и удалиться на бесконечность, где потенциальная и кинетическая энергия тела будут равны нулю.

Поскольку гравитационные силы консервативны, а поле потенциально, запишем закон сохранения энергии

$$E_K+U=0 \text{ или } \frac{mv_{IIЛ}^2}{2}-\gamma\frac{mM_Л}{R_Л}=0. \text{ Откуда } v_{IIЛ}=\sqrt{2\gamma\frac{M_Л}{R_Л}}.$$

Учитывая соотношение $\gamma M_Л=g_{0Л}R_Л^2$, получим

$$v_{IIЛ}=\sqrt{2\frac{g_{0Л}R_Л^2}{R_Л}}=\sqrt{2g_{0Л}R_Л}\approx 2{,}4\cdot 10^3\,\text{м/с}.$$

Задача 5.9. Найти работу по переносу тела массы m с одной планеты на другую в отсутствии сил сопротивления. Массы M_1, M_2 и радиусы R_1, R_2 планет известны, расстояние между ними велико (рис.5.13).

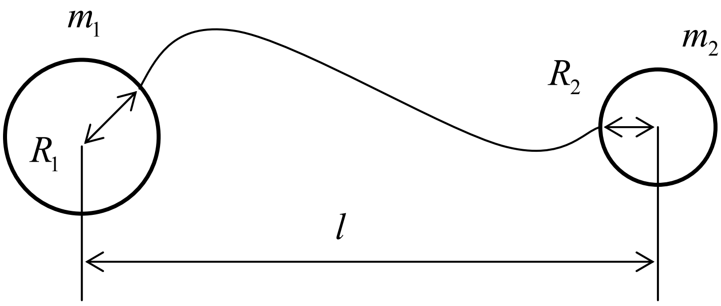


Рис.5.13

Решение. Очевидно, что $A + A_{сопр} = \Delta U$.

По условию $A_{сопр} = 0$, значит, $A = \Delta U = m(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Так как $l >> R_1$ и $l >> R_2$, работа приближенно равна

$$A \approx -m\gamma\left(\frac{M_2}{R_2} - \frac{M_1}{R_1}\right) = \gamma m\left(\frac{M_1}{R_1} - \frac{M_2}{R_2}\right).$$

Задача 5.10. Определить гравитационную силу, действующую на материальную точку массы m со стороны тонкого однородного стержня массы M длины l, если точка расположена на оси стержня на расстоянии a от его ближайшего конца (рис.5.14).

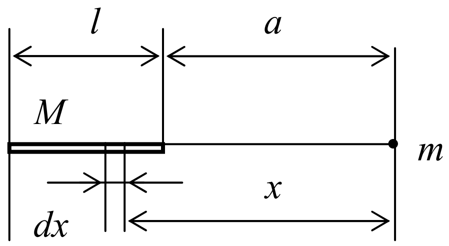


Рис.5.14

Решение. Обозначим линейную плотность массы стержня $\tau = M/l$. Выделим элемент стержня длиной dx массой $dM = \tau dx$, удаленный от m на расстояние x. Тогда для двух материальных точек dM и m можно записать закон всемирного тяготения в виде

$$dF = \gamma \frac{mdM}{x^2} = \gamma \frac{m\tau dx}{x^2}.$$

Силу найдем, проинтегрировав это выражение

$$F = \gamma m\tau \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \gamma m\tau\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{a+l} = \gamma m\tau\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{\gamma m M}{a(a+l)}.$$

Задача 5.11. Напряженность гравитационного поля планеты на ее поверхности равна g. Определить потенциал гравитационного поля в точке, удаленной от поверхности на расстояние, равное радиусу R.

Решение. На тело массы m на поверхности планеты массы M радиуса R действует сила $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$.

Сила и потенциальная энергия связаны соотношением $F = -\text{grad}U = -dU/dr$.

Откуда потенциальная энергия $U = -\gamma \frac{mM}{R}$.

Напряженность гравитационного поля на поверхности планеты $\vec{g}_0 = \frac{\vec{F}}{m}$; следовательно, $g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}$, $g_0 = -\text{grad}\varphi$.

Потенциал поля φ равен $\varphi = -\gamma \frac{M}{R}$.

Если точка A удалена на расстояние $2R$ от центра планеты, то потенциал в этой точке равен $\varphi = -\gamma \frac{M}{2R}$.

Так как $g_0 R = \gamma M$, окончательно получим $\varphi_A = -\frac{g_0 R}{2}$.

5.3.Задачи для самостоятельного решения

5.12. Чему равна сила F взаимного притяжения двух космических кораблей массой m = 10 т каждый, если они сблизятся до расстояния r = 100 м?

5.13. Найти силу гравитационного взаимодействия F между двумя протонами, находящимися на расстоянии r = 10^{-16} м друг от друга. Масса протона m = 1,67 10^{-27} кг.

5.14. На какой высоте на поверхностью Земли напряженность поля тяготения равна $0{,}5\,\text{Н}/\text{кг}$? Определить потенциал поля тяготения на той же высоте.

5.15. Найти выражение для напряженности поля и силы гравитационного взаимодействия между тонким однородным кольцом радиусом R и массой M и материальной точкой массой m, лежащей в центре кольца.

5.16. Считая орбиту Земли круговой, определить линейную скорость v движения Земли вокруг Солнца.

5.17. Найти выражение для напряженности поля и силы гравитационного взаимодействия между тонким однородным кольцом радиусом R и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на высоте h на перпендикуляре к плоскости, восстановленном из центра кольца.

5.18. Имеется тонкий однородный прямой стержень длины $l = 2a$ и массы M. На прямой, перпендикулярной к оси стержня, проходящей через его центр, на расстоянии $b = 2a$ от центра находится частица массы m. 1) Найти модуль силы F, с которой стержень действует на частицу. 2) Сравнить силу F с силой F', с которой взаимодействовали бы материальные точки с массами M и m, находящиеся на расстоянии $b = 2a$ друг от друга.

5.19. Период обращения по круговой орбите спутника Земли $T = 3$ ч. На какой высоте от поверхности Земли находится спутник?

5.20. Тонкий однородный диск радиусом R имеет массу M. Определить силу гравитационного взаимодействия между этим диском и материальной точкой массой m, лежащей: 1) на оси диска на расстоянии h от него; 2) в центре диска.

5.21. Определить среднюю плотность Земли, если известна гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ и радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^3\,\text{км}$.

5.22. Тонкий однородный диск радиусом R имеет массу M. Определить зависимость силы взаимодействия между этим диском и материальной точкой массой m от ее расстояния h от плоскости диска в направлении его оси симметрии. При каких h сила F будет максимальной и минимальной?

5.23. Найти вес тела массой m = 1 кг, находящегося между Землей и Луной на расстоянии $x = 10^8$ м от центра Земли.

5.24. Два предмета одинаковой массы во время лунного затмения находятся в диаметрально противоположных точках земной поверхности на прямой, проходящей через центры Луны, Земли и Солнца. Вес какого из них будет больше?

5.25. Найти изменение ускорения свободного падения тела на глубине h от поверхности Земли. На какой глубине ускорение свободного падения составит 0,3 от ускорения свободного падения на поверхности Земли? Плотность Земли считать постоянной.

5.26. Сравнить ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_л$ с ускорением свободного падения у поверхности Земли $g_з$.

5.27. Найти зависимость ускорения свободного падения g от высоты h над поверхностью Земли. На какой высоте h ускорение свободного падения g_h составляет 0,25 ускорения свободного падения g у поверхности Земли?

5.28. Ускорение свободного падения на поверхности некоторой планеты равно 1 м/с^2. С каким ускорением начнет свободно падать тело, поднятое над поверхностью планеты на высоту, равную 1) радиусу планеты, 2) 0,001 радиуса?

5.29. Два медных шарика с диаметрами D_1 = 4 см и D_2 = 6 см находятся в соприкосновении друг с другом. Найти гравитационную потенциальную энергию $W_п$ этой системы.

5.30. Каково соотношение между высотой H горы и глубиной h шахты, если на вершине горы и на дне шахты ускорение свободного падения одинаково?

5.31. На какой высоте H над поверхностью Земли напряженность поля тяготения $g = 1$ Н/кг?

5.32. Какое ускорение Солнце сообщает телам, находящимся на Земле?

5.33. Найти расстояние d планеты от Солнца, если даны: масса Солнца M, период обращения планеты вокруг Солнца T и гравитационная постоянная γ.

5.34. Радиус планеты Марс $R = 3{,}4 \cdot 10^3$ км, масса $m = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Определить напряженность g поля тяготения на поверхности Марса.

5.35. Спутник нейтронной звезды вращается по круговой орбите в непосредственной близости от ее поверхности. Определить период T спутника, если плотность звезды $\rho \approx 10^{17}$ кг/м^3.

5.36. На каком расстоянии r от центра Земли находится точка, в которой напряженность E суммарного гравитационного поля Земли и Луны равна нулю? Принять, что масса M Земли в 81 раз больше массы m Луны и что расстояние l от центра Земли до центра Луны равно 60 радиусам R Земли.

5.37.Определить напряженность гравитационного поля, создаваемого тонкой бесконечной однородной нитью на расстоянии r_0, используя принцип суперпозиции. Масса единицы длины нити равна σ.

5.38. Найти силу гравитационного взаимодействия между тонкой однородной нитью длиной l и массой M и материальной точкой массой m, лежащей на отрезке перпендикуляра длиной r_0, восстановленного к середине нити. Рассмотреть также случай $l >> r_0$.

5.39. Имеется бесконечная однородная пластина толщины $d = 0{,}1$ м, плотность которой $\rho = 10$ г/см^3. С какой силой F действует эта пластина на находящееся вблизи от нее тело массы $m = 1$ кг?

5.40. С какой силой F в расчете на единицу площади притягивают друг друга две параллельные бесконечные однородные пластины плотности $\rho = 10$ кг/см^3 и и толщины $d = 0{,}1$ м каждая?

5.41. Имеется тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы M. В центре полусферы находится частица массы m. Найти модуль F силы, с которой слой действует на частицу.

5.42. Найти напряженность g в пространстве между двумя тонкими, параллельными, бесконечными, однородными плоскостями и вне их. Масса единицы поверхности равна σ.

5.43. Вывести выражение для напряженности гравитационного поля, создаваемого тонкой сферической оболочкой радиусом R внутри и вне оболочки. Масса единицы поверхности оболочки равна σ. Построить график зависимости $g = f(r)$.

5.44. Определить напряженность гравитационного поля, создаваемого тонкой бесконечной однородной нитью на расстоянии r_0, используя аналог теоремы Гаусса для электростатики. Масса единицы длины нити равна σ.

5.45. Найти напряженность g и потенциал φ гравитационного поля, создаваемого однородным шаром, масса которого M, радиус R. Нарисовать графики зависимостей $g(r)$ и $\varphi(r)$ для этого случая.

5.46. С какой скоростью упадет на поверхность Луны метеорит, скорость которого вдали от Луны мала? Атмосферы на Луне нет. Масса Луны $M_Л = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны $R_Л = 1{,}74 \cdot 10^6$ м, гравитационная постоянная $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м^2/кг^2.

5.47. Определить значение потенциала φ гравитационного поля на поверхности Земли и Солнца.

5.48. Определить высоту подъема снаряда зенитного орудия запущенного вертикально вверх со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^3$ м/с. Какой путь пройдет снаряд за первую секунду своего падения на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.49. Во сколько раз кинетическая энергия $E_к$ искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите, меньше его гравитационной потенциальной энергии U?

5.50. Определить работу A, которую совершат силы гравитационного поля Земли, если тело массой М = 1 кг упадет на поверхность Земли 1) с высоты h, равной радиусу R Земли; 2) из бесконечности.

5.51. Метеорит падает на Солнце с очень большого расстояния, которое практически можно считать бесконечным. Начальная скорость метеорита пренебрежимо мала. Какую скорость v будет иметь метеорит в момент, когда его расстояние от Солнца будет равно среднему расстоянию Земли от Солнца $1{,}49 \cdot 10^{11}$ м?

5.52. Два алюминиевых шарика $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3 радиусами $r_1 = 3$см и $r_2 = 5$см соприкасаются друг с другом. Определить потенциальную энергию их гравитационного взаимодействия.

5.53. Бур поднимают на поверхность Земли из скважины глубиной h. Определить относительную погрешность, допускаемую при определении работы по поднятию бура, без учета изменения его веса.

5.54. Каким должен быть радиус однородной сферы плот-ностью ρ = 5500 кг/м^3, чтобы потенциал ее гравитационного поля в точке, лежащей на поверхности сферы был равен $\varphi = 10^4$ Дж/кг?

5.55. Каким должен быть радиус однородной сферы плотностью 5500 кг/м^3, чтобы потенциальная энергия молекулы азота, расположенной у поверхности сферы, в гравитационном поле этой сферы была равна $1{,}6 \cdot 10^{-20}$ Дж?

5.56. Какую работу необходимо совершить, чтобы тело массой 500 кг стало спутником Солнца?

5.57. Имеется тонкий однородный стержень массой m и длинной l. Для точки, находящейся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от его ближайшего конца, определить 1)потенциал гравитационного поля стержня; 2) напряженность его гравитационного поля.

5.58. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в η = 2,5 раза больше радиуса Земли. Какую дополнительную скорость надо кратковременно сообщить кораблю в направлении от центра Земли по ее радиусу, чтобы он смог покинуть поле тяготения Земли?

5.59. Ракета, пущенная вертикально вверх, поднялась на высоту H = 3200 км и начала падать. Какой путь h пройдет ракета за первую секунду своего падения?

5.60. Планета Марс имеет два спутника Фобос и Деймос. Первый находится на расстоянии $r_1 = 0{,}95 \cdot 10^4$ км от центра масс Марса, второй - на расстоянии $r_2 = 2{,}4 \cdot 10^4$ км. Найти периоды обращения T_1 и T_2 этих спутников вокруг Марса.

5.61. Спутник Земли обращается вокруг нее по окружности на высоте h = 3600 км. Найти линейную скорость спутника. Радиус Земли R и ускорение свободного падения g считать известными.

5.62. Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите на высоте h = 20 км. Найти линейную скорость v движения этого спутника, а также период его обращения T вокруг Луны.

5.63. Найти вторую космическую скорость для Луны.

5.64. Луна движется вокруг Земли со скоростью v_1 = 1,02 км/с, среднее расстояние Луны от Земли равно 60,3 радиуса Земли R. Определить по этим данным, с какой скоростью v_2 должен двигаться искусственный спутник, обращающийся вокруг Земли на незначительной высоте над ее поверхностью?

5.65. Ближайший спутник Марса находится на расстоянии r = 9 Мм от центра планеты и движется вокруг нее со скоростью v = 2,1 км/с. Определить массу Марса M.

5.66. Найти период обращения T вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось R_1 ее эллиптической орбиты превышает большую полуось R_2 земной орбиты на $\Delta R = 0{,}24 \cdot 10^8$ км.

5.67. Один из спутников планеты Сатурн находится приблизительно на таком же расстоянии r от планеты, как Луна от Земли, но период T его обращения вокруг планеты в 10 раз меньше, чем у Луны. Определить отношение масс Сатурна и Земли.

5.68. Большая полуось R_1 эллиптической орбиты первого в мире искусственного спутника Земли меньше большой полуоси R_2 орбиты второго спутника на ΔR = 800 км. Период обращения вокруг Земли первого спутника в начале его движения был T_1 = 96,3 мин. Найти большую полуось R_2 орбиты второго искусственного спутника Земли и период T_2 его обращения вокруг Земли.

5.69. Период обращения одного из спутников Юпитера T_1 = 2 года, его среднее расстояние от планеты r_1 = 23,5 млн. км. Период обращения Юпитера вокруг Солнца T_2 = 12 лет, его среднее расстояние от Солнца r_2 = 7 млн. км. Определить отношение массы Солнца M_C к массе Юпитера $M_{Ю}$.

5.70. Минимальное удаление от поверхности Земли космического корабля "Восток-2" составляло h_{min} = 183 км, а максимальное удаление - h_{max} = 244 км. Найти период обращения корабля вокруг Земли.

5.71. Какова будет скорость v ракеты на высоте, равной радиусу Земли, если ракета запущена с Земли с начальной скоростью v_0 = 10 км/с? Сопротивление воздуха не учитывать.

5.72. Космический корабль вывели на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость в направлении его движения необходимо кратковременно сообщить кораблю, чтобы он мог преодолеть земное тяготение?

5.73. Ракета запущена с Земли с начальной скоростью v_0 = 15 км/с. К какому пределу будет стремиться скорость ракеты, если расстояние ракеты от Земли будет бесконечно возрастать? Сопротивление воздуха и притяжение других небесных тел, кроме Земли, не учитывать.

5.74. С какой линейной скоростью v будет двигаться искусственный спутник Земли по круговой орбите: а) у поверхности Земли; б) на высоте h = 200 км и h = 7000 км от поверхности Земли? Найти период обращения T спутника Земли при этих условиях.

5.75. Найти центростремительное ускорение a_n, с которым движется по круговой орбите искусственный спутник Земли, находящийся на высоте h = 200 км от поверхности Земли.

5.76. Радиус Луны $R_1 = 0{,}27R_2$ радиуса Земли. Средняя плотность $\rho_1 = 0{,}61\rho_2$ - средней плотности Земли. Зная ускорение свободного падения на поверхности Земли, определить по этим данным ускорение g_1 свободного падения на поверхности Луны.

5.77. Период обращения искусственного спутника Земли $T = 2$ часа. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте h над поверхностью Земли движется спутник.

6.Колебания

6.1.Основные понятия и законы

Движение называется *периодическим*, если

$x(t) = x(t+T)$, где T - период. (6.1)

Колебание – это периодическое движение около положения равновесия. На рис.6.1 в качестве примера изображены периодические негармонические колебания около положения равновесия $x_0 = 0$.

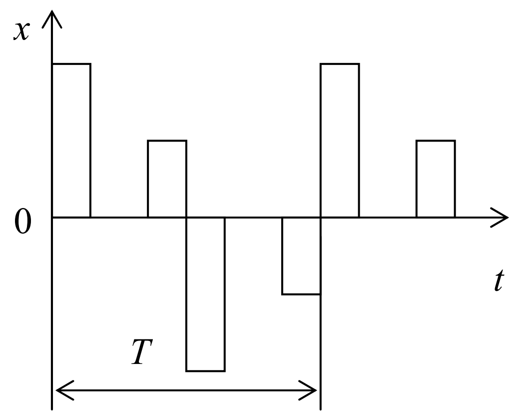


Рис.6.1

Период T – это время, за которое совершается одно полное колебание.

Частота – число полных колебаний в единицу времени

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (6.2)$$

Круговая (циклическая) частота

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \qquad (6.3)$$

Гармоническими называются колебания, при которых смещение точки от положения равновесия в зависимости от времени изменяется по закону синуса или косинуса

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha), \qquad (6.4)$$

где A - амплитуда колебаний (максимальное смещение точки от положения равновесия), ω_0 - круговая частота гармонических колебаний, $\omega_0 t + \alpha$ - фаза, α - начальная фаза (при $t = 0$).

Система, совершающая гармонические колебания, называется *классическим гармоническим осциллятором* или колебательной системой.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях изменяются по законам

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (6.5)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha). \qquad (6.6)$$

Из соотношений (6.6) и (6.4) получим

$$a = -\omega_0^2 x, \qquad (6.7)$$

откуда следует, что при гармонических колебаниях ускорение прямо пропорционально смещению точки от положения равновесия и направлено противоположно смещению.

Из уравнений (6,6), (6,7) получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (6.8)$$

Уравнение (6.8) называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*, а (6.4) является его решением. Подставив (6.7) во второй закон Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, получим силу, под действием которой происходят гармонические колебания

$$F = -m\omega_0^2 x. \qquad (6.9)$$

Обозначим $m\omega_0^2 = k$. (6.10)

Из (6.9), (6.10) получим

$$\vec{F} = -k\vec{x}. \qquad (6.11)$$

Эта сила, прямо пропорциональная смещению точки от положения равновесия и направленная противоположно смещению, называется *возвращающей* силой, k называется *коэффициентом возвращающей силы*. Таким свойством обладает сила *упругости*. Силы другой физической природы, подчиняющиеся закону (6.11), называются *квазиупругими*.

Колебания, происходящие под действием сил, обладающих свойством (6.11), называются *собственными (свободными гармоническими)* колебаниями.

Из соотношений (6.3),(6.10) получим круговую частоту и период этих колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \;\; T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (6.12)$$

При гармонических колебаниях по закону (6.4) зависимости кинетической и потенциальной энергии от времени имеют вид

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \alpha\right), \qquad (6.13)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2{\omega_0}^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t + \alpha\right). \qquad (6.14)$$

Полная энергия в процессе гармонических колебаний сохраняется

$$E_K + U = const\,. \qquad (6.15)$$

Подставляя в (6.15) выражения (6.4) и (6.5) для x и v, получим

$$E = E_{K\max} = U_{\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\,. \qquad (6.16)$$

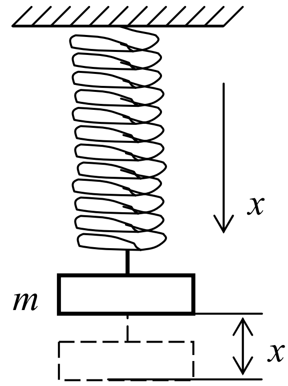


Рис.6.2

Примером классического гармонического осциллятора является легкая пружина, к которой подвешен груз массой m (рис.6.2). Коэффициент возвращающей силы k называется коэффициентом жесткости пружины. Из второго закона Ньютона для груза на пружине $F = -kx$ получим уравнение, совпадающее по форме с дифференциальным уравнением гармонических колебаний (6.8) Следовательно, груз на пружине при отсутствии сил сопротивления среды будет совершать гармонические колебания (6.4).

Гармонические колебания (6.4) можно представить в виде проекции на оси координат вектора, величина которого равна амплитуде A, вращающегося вокруг начала координат с угловой скоростью ω_0. На этом представлении основан *метод векторных диаграмм* сложения гармонических колебаний с *одинаковой частотой, происходящих по одной оси*

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \qquad (6.17)$$

Амплитуда результирующего колебания определяется по теореме косинусов

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,. \qquad (6.18)$$

Начальная фаза результирующего колебания φ может быть найдена из формулы

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\,. \qquad (6.19)$$

При сложении однонаправленных колебаний с близкими частотами ω_1 и ω_2 возникают *биения*, частота которых равна $\omega_1 - \omega_2$.

Уравнение траектории точки, участвующей в двух *взаимно перпендикулярных* колебаниях

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \\ y &= A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \qquad (6.20)$$

имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1). \qquad (6.21)$$

Если начальные фазы $\varphi_1=\varphi_2$, то уравнение траектории – прямая

$$y=\frac{A_2}{A_1}x \text{, или } y=-\frac{A_2}{A_1}x .$$

Если разность фаз $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\pi/2$, точка движется по эллипсу $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$.

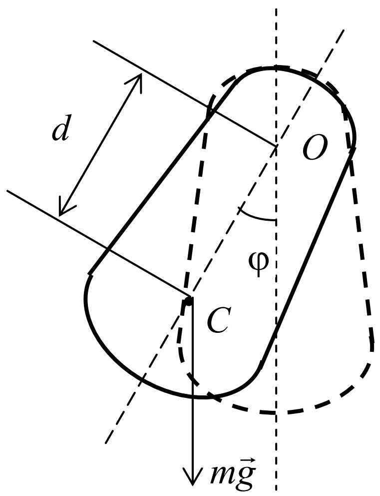


Рис.6.3

Физический маятник – это твердое тело, способное совершать колебания вокруг закрепленной оси, проходящей через точку O ,не совпадающую с его центром масс C (рис.6.3). Колебания являются гармоническими при малых углах отклонения.

Момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку O, является возвращающим моментом и выражается соотношением

$$\vec{M}=mgd\sin\varphi\approx mgd\vec{\varphi}. \qquad (6.22)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид (см. формулу (4.18))

$$M=I\cdot\varepsilon , \qquad (6.23)$$

где I - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O, ε - угловое ускорение.

Из (6.23), (6.22) получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{mgd}{I}\varphi=0. \qquad (6.24)$$

Его решения $\varphi=\varphi_0\sin\omega_0 t$, (6.25)

где $\omega_0=\sqrt{\frac{mgd}{I}}$.

Из (6.3) получим формулу периода колебаний физического маятника

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} . \qquad (6.26)$$

Математический маятник – материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной L. Из (6.26) полагая $d = l$, $I=ml^2$, получим формулу периода колебаний математического маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (6.27)$$

Тело, подвешенное на легкой упругой проволоке (рис.6.4) , совершает *крутильные* колебания вокруг оси, совпадающей с проволокой. При повороте на малый угол в проволоке возникает возвращающий момент упругих сил

$$M = -c \cdot \varphi. \qquad (6.28)$$

Коэффициент возвращающего момента зависит от материала проволоки и ее размеров

$$c = \frac{\pi G}{2} \cdot \frac{r^4}{L}\ , \qquad (6.29)$$

где G - модуль сдвига, характеризующий упругие свойства материала, r - радиус проволоки, L - ее длина.

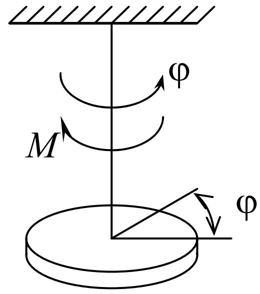


Рис.6.4

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

$$I\ddot{\vec{\varphi}} = \vec{M}\ . \qquad (6.30)$$

Из (6.28), (6.30) получим дифференциальное уравнение гармонических крутильных колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{c}{I}\varphi = 0\,. \qquad (6.31)$$

Его решение имеет вид $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$, (6.32)

где φ - угловое смещение от положения равновесия, φ_0 – амплитуда колебаний.

Сравнив уравнения (6.8) и (6.32), получим значения угловой частоты и периода крутильных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}}\,, \qquad (6.33)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}\,. \qquad (6.34)$$

Свободные колебания становятся *затухающими* из-за наличия сил сопротивления. Например, когда материальная точка колеблется в вязкой среде, при малых скоростях на нее действует сила сопротивления среды $\vec{F}_{сопр} = -r\vec{v} = -r\dot{\vec{x}}$, где r - коэффициент сопротивления среды. Поэтому из второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

получим *дифференциальное уравнение затухающих колебаний*

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,. \qquad (6.35)$$

Его решение для случая, когда $\frac{k}{m} > \left(\frac{r}{2m}\right)^2$, имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha), \qquad (6.36)$$

где $A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда собственных затухающих колебаний, β - коэффициент затухания, ω - угловая частота затухающих колебаний, α - начальная фаза.

Для случая $\frac{k}{m} < \left(\frac{r}{2m}\right)^2$ система совершает апериодическое движение к положению равновесия.

Коэффициент затухания β - величина обратная времени, за которое амплитуда убывает в e раз

$$\beta = \frac{r}{2m}. \qquad (6.37)$$

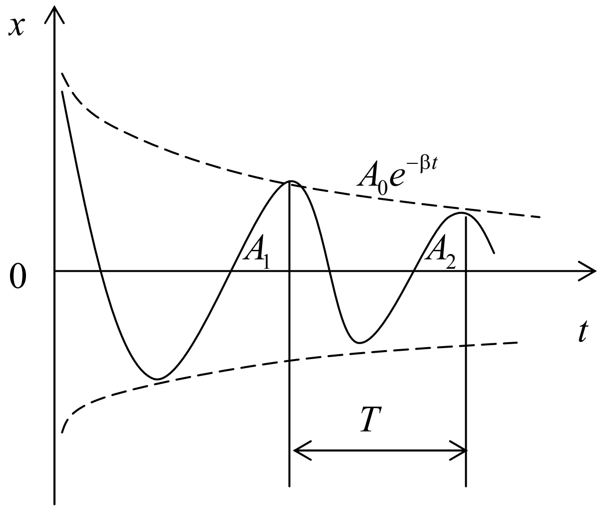


Рис.6.5

Круговая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (6.38)$$

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}}. \qquad (6.39)$$

Логарифмическим декрементом затухания δ называется натуральный логарифм отношения двух последовательных значений амплитуды, отстоящих друг от друга по времени на период

$$\delta = \ln\frac{A_t}{A_{t+T}} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T. \qquad (6.40)$$

Величина δ обратна числу колебаний, за которое амплитуда убывает в e раз.

Из (6.40) и рис.6.5 видно, что

$$\delta = \ln\frac{A_1}{A_2} = \ln\frac{A_2}{A_3} = ... = \beta T = const. \qquad (6.41)$$

Рассмотренные выше гармонические и затухающие колебания являются *свободными*. Если на колеблющуюся точку, кроме сил упругости и сопротивления, действует внешняя сила, изменяющаяся со временем по гармоническому закону, то колебания называются *вынужденными*. Из второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin\omega_1 t \qquad (6.42)$$

получим *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_1 t\ . \qquad (6.43)$$

Его решение имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha) + A\sin(\omega_1 t + \Psi). \qquad (6.44)$$

После затухания колебаний, описываемых первым слагаемым соотношения (6.44), происходят установившиеся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы ω_1 по закону

$$x = A\sin(\omega_1 t + \Psi) \qquad (6.45)$$

и амплитудой $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}}$. (6.46)

Сдвиг фаз между колебаниями точки и вынуждающей силы определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\Psi = -\frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\ . \qquad (6.47)$$

Резонанс – это резкое возрастание амплитуды колебаний при определенной частоте $\omega_{рез}$ вынуждающей силы (6.48). Продифференцировав соотношение (6.46) по частоте ω_1 и приравняв производную к нулю, получим значение резонансной частоты

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ . \qquad (6.48)$$

Из (6.46) и (6.48) найдем значение амплитуды колебаний при резонансе

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ . \qquad (6.49)$$

На рис.6.6 приведен график зависимости амплитуды установившихся вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы ω_1. Чем меньше коэффициент затухания β, тем круче резонансная кривая.

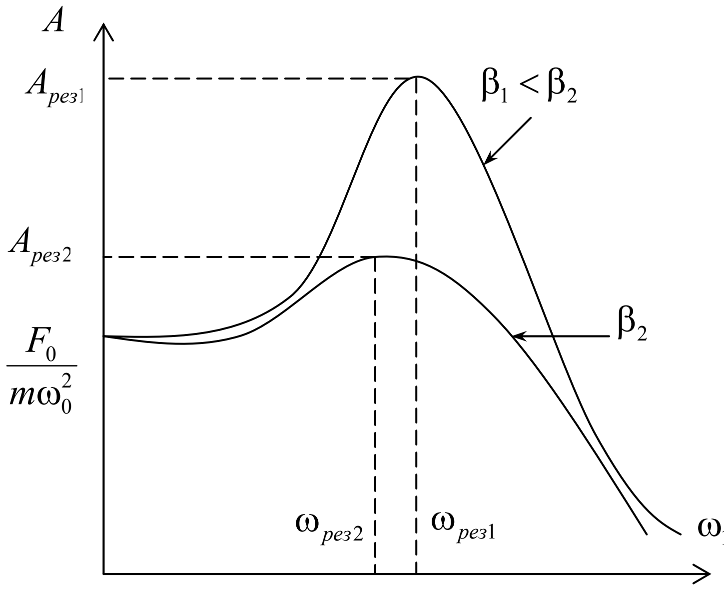


Рис.6.6

6.2.Примеры решения задач

Задача 6.1. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки от положения равновесия равно x_1 = 5 см. При увеличении фазы вдвое смещение точки стало x_2 = 8 см. Найти амплитуду колебаний.

Решение. Зависимость смещения от времени при гармонических колебаниях имеет вид $x = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Обозначим через α фазу в момент времени, когда смещение равно x_1, $x_1 = A\sin\alpha$. Тогда $x_2 = A\sin 2\alpha = A\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin\alpha = \frac{x_1}{A}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{\sqrt{A^2 - x_1^2}}{A} = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}}$.

Подставим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ в выражения для x_2

$$x_2 = A\cdot 2\frac{x_1}{A}\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} = 2x_1\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} .$$

Откуда после очевидных алгебраических преобразований

$$\frac{x_2}{2x_1} = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}}; \quad \frac{x_2^2}{4x_1^2} = 1 - \frac{x_1^2}{A^2}; \quad \frac{x_1^2}{A^2} = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2};$$

$$A^2 = \frac{x_1^2}{1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2}} = \frac{4x_1^4}{4x_1^2 - x_2^2} ,$$

получим выражение для амплитуды колебаний

$$A = \frac{2x_1^2}{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}} = 8{,}3\,\text{см} .$$

Задача 6.2. Частица совершает колебания вдоль оси x по закону $x = 0{,}1\sin 6{,}28t\,[м]$. Найти среднее значение модуля скорости $\langle|\vec{v}|\rangle$ (среднюю путевую скорость) за вторую 1/8 часть периода T.

Решение. По определению,

$$\langle v\rangle = \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \text{, где } \tau = \frac{T}{8};\ t_1 = \frac{T}{8}; t_2 = \frac{T}{4} .$$

Так как $x = A\sin\omega t$, а $v = \frac{dx}{dt}$, среднее значение модуля скорости

$$\langle v\rangle = \frac{8}{T}\int_{T/8}^{T/4} A\cos\omega t dt = \frac{8}{T}A\sin\omega t\Big|_{T/8}^{T/4} = \frac{8A}{T}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}23\ \text{м/с} .$$

Задача 6.3. Точка движется в плоскости xOy по законам $x = A\sin\omega_0 t$, $y = B\cos\omega_0 t$, где A, B, ω_0 - постоянные. Найти:

а) уравнение траектории точки; б) ускорение точки в зависимости от ее радиус-вектора, проведенного из начала координат.

Решение. Перепишем уравнения колебаний в виде

$$\frac{x}{A} = \sin\omega_0 t\,,\ \frac{y}{B} = \cos\omega_0 t\,.$$

Возведя их в квадрат и сложив, получим уравнение траектории в виде $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. Это уравнение эллипса.

Запишем выражение для радиус-вектора в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = A\sin\omega_0 t\cdot\vec{i} + B\cos\omega_0 t\cdot\vec{j}\,,$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ - орты прямоугольной декартовой системы координат xOy. Тогда скорость точки, по определению, равна

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A\omega_0\cos\omega_0 t\cdot\vec{i} - B\omega_0\sin\omega_0 t\cdot\vec{j}\,.$$

Аналогично находим ускорение точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -A\omega_0{}^2\sin\omega_0 t\cdot\vec{i} - B\omega_0{}^2\cos\omega_0 t\cdot\vec{j}\,.$$

Искомая зависимость будет иметь вид

$$\vec{a} = -\omega_0^2\vec{r}\,.$$

Задача 6.4. Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, равна $E = 3\cdot 10^{-5}$ Дж. Максимальная сила, действующая на тело, $F_{\max} = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Н. Написать уравнение движения тела, если период колебаний $T = 2$ с, а начальная фаза $\alpha_0 = 60°$.

Решение. Закон движения запишем в виде $x = A\sin(\omega t + \alpha_0)$, где $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $\alpha_0 = \frac{\pi}{3}$рад. Найдем амплитуду. Полная энергия равна $E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$. Сила, действующая на тело, $|F| = ma = m\omega^2 x$; $|F_{\max}| = m\omega^2 A$. Откуда $\frac{E}{|F_{\max}|} = \frac{A}{2}$. Следовательно ,

$$A = \frac{2E}{|F_{\max}|} = 4\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 4\,\text{см}$$

Окончательно, закон движения примет вид

$$x = 4\sin(\pi t + \pi/3)[\text{см}]$$

Задача 6.5. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый в стену горизонтально, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R = 30 см. Вычислить период T колебаний обруча. Сопротивлением среды пренебречь.

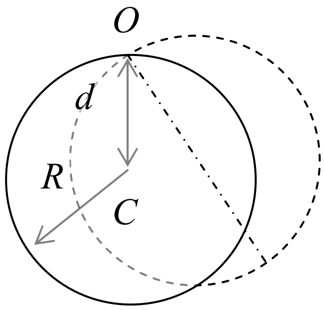


Рис.6.7

Решение. Обруч представляет собой физический маятник (рис.6.7). Период малых колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgd}},$$

где $d = R$ - расстояние от центра масс C до точки подвеса, I_0 - момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O. По теореме Штейнера,

$$I_O = I_C + md^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2,$$

где I_C - момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс точку C. Следовательно, период гармонических колебаний маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 1{,}55 \text{ с}.$$

Задача 6.6. Частица находится в одномерном потенциальном поле, в котором ее потенциальная энергия $U(x)$ зависит от координаты x по закону $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, где U_0, a - постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Консервативная сила и потенциальная энергия связаны соотношением

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[U_0(1 - \cos ax)\right] = -\frac{d}{dx}\left(U_0 - U_0\cos ax\right) = -aU_0 \sin ax.$$

Если колебания малые, то x мало и $\sin ax \approx ax$. Тогда $F_x = -aU_0 \sin ax = -a^2U_0 x$. С другой стороны, $F_x = ma_x = m\ddot{x}$.

Следовательно, $-a^2U_0x = m\ddot{x}$. Тогда $m\ddot{x} + a^2U_0x = 0$ и $\ddot{x} + \dfrac{a^2U_0}{m}x = 0$,

где $\dfrac{a^2U_0}{m} = \omega_0^2$. В итоге период равен $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\dfrac{m}{U_0}}$.

Задача 6.7. Однородный диск массы m = 3 кг и радиуса R = 20 см скреплен с тонким стержнем (рис.6.8), другой конец которого прикреплен неподвижно к потолку. Отношение приложенного вращательного момента сил M к углу закручивания φ у стержня равно $k = 6$ Н·м/рад. Определить частоту ω малых крутильных колебаний диска.

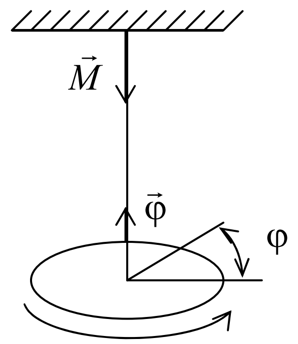


Рис.6.8

Решение. Если повернуть диск на угол φ, то появится возвращающий момент сил $M = -k\varphi$ (см.рис.6.8). В соответствии с основным уравнением динамики вращательного движения $M = I\varepsilon = I\ddot{\varphi}$.

Тогда $I\ddot{\varphi} = -k\varphi$ или $\ddot{\varphi} + \dfrac{k}{I}\varphi = 0$, где $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

В итоге дифференциальное уравнение крутильных колебаний примет вид $\ddot{\varphi} + \dfrac{2k}{mR^2}\varphi = 0$, откуда

$$\omega^2 = \frac{2k}{mR^2};\ \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2k}{m}} = 10\ \text{с}^{-1}.$$

Задача 6.8. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока (рис.6.9), расстояние между осями которых l = 20 см. Коэффициент трения между стержнем и блоками $\mu = 0{,}18$. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания и найти их период.

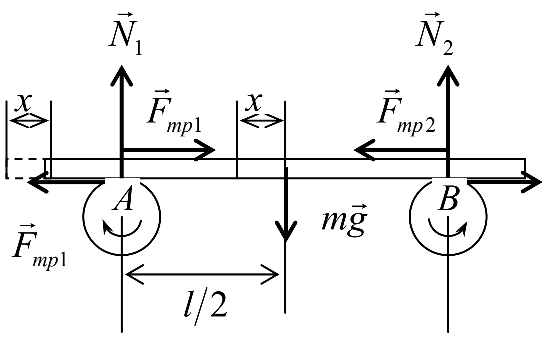


Рис.6.9

Решение. При вращении блоков на них действуют силы трения со стороны стержня. К стержню приложены силы трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$, противоположно направленные. Их величина определяется силами нормальной реакции опоры N_1 и N_2. К середине стержня приложена сила тяжести $m\vec{g}$. При смещении стержня на x влево точка приложения силы тяжести также сместится на x влево. Тогда сумма моментов сил, действующих на стержень относительно горизонтальной оси, проходящей через точку B, будет равна нулю: $\sum M_B = 0$.

$N_1 \cdot l - mg\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0$. Откуда $N_1 = \frac{mg(l + 2x)}{2l}$

и сила трения $F_{тр1} = \mu N_1 = \frac{\mu mg(l + 2x)}{2l}$.

Аналогично $\sum M_A = 0$.

$$N_2 \cdot l - mg\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0, \quad N_2 = \frac{mg(l - 2x)}{2l}, \quad F_{тр2} = \mu N_2 = \frac{\mu mg(l - 2x)}{2l}.$$

При смещении влево $F_{тр1} > F_{тр2}$ и появляется возвращающая сила, смещающая стержень вправо

$$\Delta F = F_{тр1} - F_{тр2} = \frac{\mu mg}{2l}(l + 2x - l + 2x) = \frac{\mu mg}{2l}4x = \frac{2\mu mgx}{l}.$$

С учетом разнонаправленности x и ΔF получим

$$\Delta F = -\frac{2\mu mgx}{l}$$

С другой стороны $\Delta F = ma = m\ddot{x}$. Тогда

$$m\ddot{x} = -\frac{2\mu mgx}{l}, \quad \ddot{x} + \frac{2\mu g}{l}x = 0; \quad \omega^2 = \frac{2\mu g}{l}; \quad \omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}},$$

а период $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 1{,}49$ с

Задача 6.9. Тело массы m упало с высоты h на чашку пружинных весов (рис.6.10).Массы чашки и пружины пренебрежимо малы, коэффициент жесткости пружины k. Прилипнув к чашке, тело начинает совершать гармонические колебания в вертикальной плоскости. Найти амплитуду колебаний, считая их гармоническими.

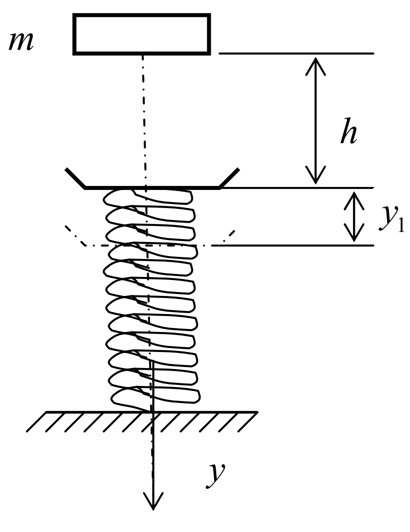


Рис.6.10

Решение. После падения груза пружина будет сжиматься на y_1, где чашка остановится. В соответствии с законом сохранения энергии

$$mg(h + y_1) = \frac{ky_1^2}{2}.$$

Решая квадратное уравнение

$$\frac{ky_1^2}{2} - mgy_1 - mgh = 0,$$

найдем максимальное сжатие пружины

$$y_1 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 4k/2\,mgh}}{2 \cdot k/2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Так как $y_1 > 0$, а подкоренное выражение больше m^2g^2, то

$$y_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Положение равновесия чашки с грузом определяется как $mg = ky_0$.

Откуда $y_0 = \dfrac{mg}{k}$. Амплитуда колебаний – это максимальное отклонение от положения равновесия, поэтому

$$A = y_1 - y_0 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Задача 6.10. Логарифмический декремент затухания колебаний δ = 0,003. Определить число полных колебаний *N*, которые должен совершить маятник, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в два раза.

Решение. Число полных колебаний $N = t/T$, где Т - период затухающих колебаний. Логарифмический декремент затухания $\delta = \beta T$, где β - коэффициент затухания. Амплитуда затухающих колебаний равна $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$.

По условию задачи $A(t) = A_0/2$, поэтому $A_0/2 = A_0 e^{-\beta t}$; $e^{\beta t} = 2$.

Логарифмируя, получим $\beta t = \ln 2$, откуда $t = \ln 2/\beta$. Тогда

$N = t/T = \ln 2/\beta T = \ln 2/\delta = 231$.

Задача 6.11. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой ν = 1000 с$^{-1}$. Определить частоту собственных колебаний системы, если резонансная частота ν_p = 998 с$^{-1}$.

Решение. Круговая частота затухающих колебаний равна

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Так как $\omega = 2\pi\nu$, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$,то

$2\pi\nu = \sqrt{4\pi^2\nu_0^2 - \beta^2}$, или $\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2/4\pi^2}$.

Резонансная частота $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$,

или $\nu_p = \sqrt{\nu_0^2 - 2\beta^2/4\pi^2} = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2/2\pi^2}$.

Решая уравнения совместно находим ν_0, исключая β:

$\nu^2 = \nu_0^2 - \beta^2/4\pi^2$; $\nu_p^2 = \nu_0^2 - \beta^2/2\pi^2$ Вычитаем $2\nu^2 - \nu_p^2 = 2\nu_0^2 - \nu_0^2 = \nu_0^2$

Находим $\nu_0 = \sqrt{2\nu^2 - \nu_p^2} = 1002$ с$^{-1}$.

6.3.Задачи для самостоятельного решения

6.12. Через какое время от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится относительно положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний T = 24 с, начальная фаза $\varphi_0 = 0$.

6.13. Найти амплитуду A, период T, частоту ν и начальную фазу φ_0 колебания, заданного уравнением $x = 5\sin\left(\dfrac{39{,}2t + 5{,}2}{5}\right)$ см. Здесь t в секундах.

6.14. Точка совершает гармонические колебания по закону синуса. Наибольшее смещение точки A = 100 см, наибольшая скорость v = 20 см/с. Написать уравнение колебаний и найти максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.

6.15. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 50 мм, периодом T = 4 с и начальной фазой $\varphi_0 = \pi/4$. Найти смещение x колеблющейся точки от положения равновесия при $t = 0$ и t = 1,5 с.

6.16. Уравнение движения точки дано в виде $x = \sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$. Найти моменты времени t, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение.

6.17. Точка колеблется гармонически по закону $x = x_0\sin(\omega t + \varphi_0)$. Найти максимальные значения скорости и ускорения точки.

6.18. Начальная фаза гармонического колебания $\varphi_0 = 0$. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

6.19. Как изменится период колебания математического маятника при перенесении его с Земли на Луну?

6.20. Точка равномерно вращается по окружности против часовой стрелки с периодом T = 12 с. Диаметр окружности d = 20 см. Написать уравнение движения проекции точки на прямую, касательную к окружности. За начало отсчета принять момент, когда точка, вращающаяся по окружности, проходит через точку касания.

6.21. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 10 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что при $t = 0$ смещение $x = 0$. Определить также фазу φ для двух моментов времени: когда смещение точки x = 6 см; 2) когда скорость точки v = 10 см/с.

6.22. Найти зависимость скорости гармонического колебания материальной точки от смещения.

6.23. Через какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение по уравнению $x = 7\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

6.24. Уравнение движения точки дано в виде $x = 2\sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти период колебания T, максимальную скорость v_{max} и максимальное ускорение a_{max} точки.

6.25 Построить график зависимости скорости гармонического колебания материальной точки $x = 5\sin(2\pi t + \varphi_0)$ от смещения.

6.26. Найти зависимость ускорения гармонического колебания $x = x_0\sin(\omega t + \varphi_0)$ от смещения.

6.27. Точка колеблется гармонически. Амплитуда колебаний $A = 5$ см, круговая частота $\omega = 2$ с$^{-1}$, начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Определить ускорение точки в момент, когда ее скорость $v = 8$ см/с.

6.28. Найти закон, по которому изменяется со временем натяжение F нити математического маятника, совершающего колебание $\varphi = \varphi_m\cos(\omega t)$. Масса маятника m, длина l.

6.29. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x = 0$. Частота колебаний $\omega = 4$ с$^{-1}$. В некоторый момент координата частицы $x_0 = 25$ см и ее скорость $v_0 = 100$ см/с. Найти координату x и скорость v частицы через $t = 2{,}4$ с после этого момента.

6.30. Точка совершает гармоническое колебание. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 50$ мм, начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Найти скорость v точки в момент времени, когда смещение точки от положения равновесия $x = 25$ мм.

6.31. Точка совершает гармонические колебания. Максимальная скорость точки $v_{max} = 10$ см/с, максимальное ускорение $a_{max} = 100$ см/с^2. Найти циклическую частоту ω колебаний, их период t и амплитуду A. Написать уравнение колебаний.

6.32. Найти зависимость ускорения гармонического колебания $x = x_0\sin(\omega t + \varphi_0)$ от скорости.

6.33. Написать уравнение гармонических колебаний, если максимальное ускорение $a_{max} = 49{,}3$ см/с^2, период колебаний $T = 2$ с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени $x_0 = 25$ мм.

6.34. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени t смещение точки $x_1 = 5$ см. При увеличении фазы вдвое смещение точки стало $x_2 = 8$ см. Найти амплитуду A колебаний.

6.35. Начальная фаза колебаний точки равна $\pi/3$. Период колебаний T = 0,06 с. Определить ближайшие моменты времени, в которые скорость и ускорение в два раза меньше амплитудных значений.

6.36. Шарик массы m = 50 г подвешен на пружине с коэффициентом жесткости k = 49 Н/м. Шарик поднимают до такого положения, когда пружина не напряжена, и отпускают без толчка. Пренебрегая трением и массой пружины, найти а) период T и амплитуду A возникших колебаний; б) направив ось X вниз и совместив точку x = 0 с начальным положением шарика, написать закон движения шарика.

6.37. Найти круговую частоту и амплитуду гармонических колебаний частицы, если на расстояниях x_1 и x_2 от положения равновесия ее скорость равна соответственно v_1 и v_2.

6.38. Начальная фаза гармонического колебания φ = 0. При смещении точки от положения равновесия x_1 = 2,4 см скорость точки v_1 = 3 см/с, а при смещении x_2 = 2,8 см ее скорость v_2 = 2 см/с. Найти амплитуду A и период T этого колебания.

6.39. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени t смещение точки x = 5 см, ее скорость v = 20 см/с и ускорение a = 80 см/с^2. Найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период колебаний T и фазу φ колебаний в рассматриваемый момент времени.

6.40. При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с одной и той же частотой и амплитудами, равными 2 и 4 см, получается гармоническое колебание с амплитудой 5 см. Найти разность фаз складываемых колебаний.

6.41. Пренебрегая трением, определить частоту ω малых колебаний ртути, налитой в U-образную трубку с внутренним сечением σ = 0,5 см ^{2}. Масса ртути m = 136 г.Плотность ртути равна 13600 кг/м^3 .

6.42. Найти графически амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний одного направления: $x_1 = 3\cos(\omega t + \pi/3)$, $x_2 = 8\sin(\omega t + \pi/6)$.

6.43. Найти графически амплитуду A колебаний, которые возникают при сложении следующих колебаний одного направления: $x_1 = 3\cos(\omega t)$, $x_2 = 5\cos(\omega t + \pi/4)$, $x_3 = 6\sin(\omega t)$.

6.44. Уравнение колебания материальной точки массой m = 10г имеет вид $x = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$ см. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию E колеблющейся точки.

6.45. Материальная точка массой m = 0,05 кг совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид: $x = 0{,}1\ \sin(5t)$ м. Найти силу F, действующую на точку: 1) в момент, когда фаза колебания $\varphi = 30°$, 2) в положении наибольшего отклонения точки.

6.46. Материальная точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 2\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$ и $y = -\cos(\pi t)$. Определить уравнение траектории точки.

6.47. Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам $x_1 = a\cos\omega t$ и $x_2 = a\cos 2\omega t$. Найти максимальную скорость точки.

6.48. При сложении двух гармонических колебаний одного направления уравнение результирующего колебания точки имеет вид $x = a\cos(2{,}1t)\cos(50{,}0t)$, где t - время в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений.

6.49. Точка движется в плоскости XY по закону $x = A\sin(\omega t)$, $y = B\cos(\omega t)$, где t, A, ω - постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$ б) ускорение $\vec{a}$ точки в зависимости от ее радиус-вектора r относительно начала координат.

6.50. Найти уравнение траектории $y(x)$ точки, если она движется по закону $x = a\sin(\omega t)$, $y = a\sin(2\omega t)$. Изобразить график найденной траектории.

6.51. Найти уравнение траектории $y(x)$ точки, если она движется по закону $x = a\sin(\omega t)$, $y = a\cos(2\omega t)$. Изобразить график найденной траектории.

6.52. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определить массу первоначального груза.

6.53. Однородный стержень длины l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его верхний конец. Найти период колебания. Трения нет.

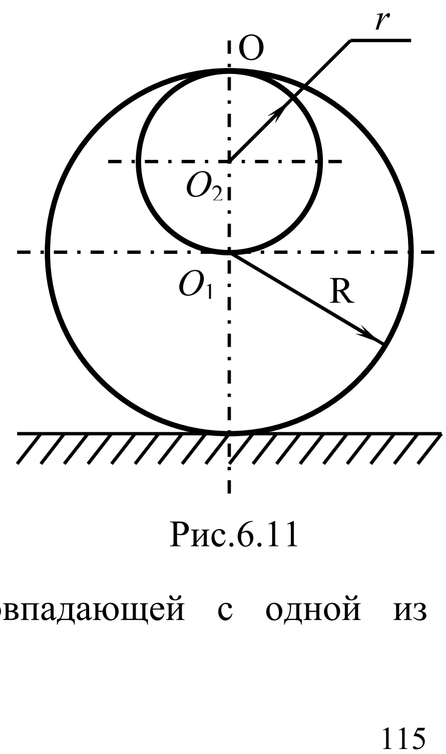


Рис.6.11

6.54. Из тонкого однородного диска радиусом R = 20 см вырезана часть, имеющая вид круга радиусом r = 10 см так, как это показано на рис. 6.11. Оставшаяся часть диска колеблется относительно горизонтальной оси O, совпадающей с одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Найти период T колебания такого маятника.

6.55. Математический маятник длины l_0 = 40 см и тонкий однородный стержень длины l = 60 см совершают синхронно малые колебания вокруг горизонтальной оси. Найти расстояние от центра стержня до этой оси.

6.56. Материальная точка массой m = 0,1 г колеблется согласно уравнению $x = 5\ \sin(20t)$ см. Определить максимальные значения возвращающей силы F и кинетической энергии $W_{кин}$ точки.

6.57. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x = 5\ \sin(2t)$ см. В момент, когда возвращающая сила впервые достигла значения F = +5 Н, точка обладала потенциальной энергией $П$ = 100 мкДж. Найти этот момент времени и соответствующую ему фазу колебаний φ.

6.58. Определить отношение потенциальной энергии гармонически колеблющейся точки к ее кинетической энергии, если известна фаза колебаний.

6.59. Материальная точка совершает колебания по закону $x = x_0\ \sin(2\pi t + \pi/6)$ см. В какой момент времени ее потенциальная энергия равна кинетической?

6.60. Тело массой m движется под действием силы $F = F_0\cos(\omega t)$. Найти выражение для кинетической энергии тела. Определить максимум кинетической энергии (при $t = 0$, $v = 0$).

6.61. На горизонтальной пружине жесткостью $k = 800\,\text{Н/м}$ укреплено тело массой $M = 4\,\text{кг}$, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности. Другой конец пружины прикреплен к вертикальной стене (рис. 6.12.). Пуля, массой $m = 10\,\text{г}$, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 600\,\text{м/с}$, попадает в тело и застревает в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить:

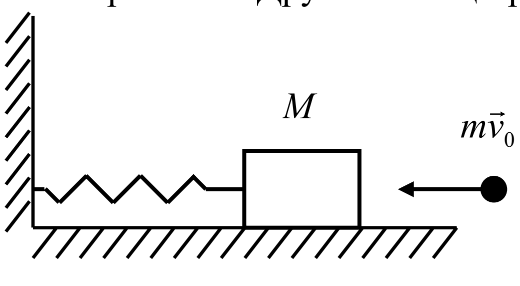


Рис.6.12

1) амплитуду колебаний тела; 2) период колебаний тела.

6.62. В в воде плавает льдина с площадью основания S = 1 м^2 и высотой H = 0,5 м. Льдину погружают в воду на небольшую глубину x_0 = 5 см и отпускают. Определить период ее колебаний. Плотность льда $\rho_л$ = 900 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. Силой сопротивления воды пренебречь.

6.63. На концах тонкого стержня длиной l = 30 см укреплены одинаковые грузики по одному на каждом конце. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через точку, удаленную на d = 10 см от одного из концов стержня.

Определить приведенную длину $l_{пр}$ и период t колебаний такого физического маятника. Массой стержня пренебречь.

6.64. На стержень длиной l = 30 см укрепили два одинаковых грузика - один в середине стержня, другой - на одном из его концов. Стержень с грузиками колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину $l_{пр}$ и период t колебаний такой системы. Массой стержня пренебречь.

6.65. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной $l = 35$ см. Определить на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

6.66. Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, совершают за одно и то же время один $n_1 = 10$ колебаний, другой $n_2 = 6$ колебаний. Определить длины маятников l_1 и l_2.

6.67. Маятник метронома представляет собой груз M, качающийся около оси O, с прикрепленной к нему спицей, по которой может перемещаться малый груз m (рис. 6.13). Как зависит период колебаний маятника от координаты x грузика? Момент инерции груза M равен I. Груз m считать материальной точкой.

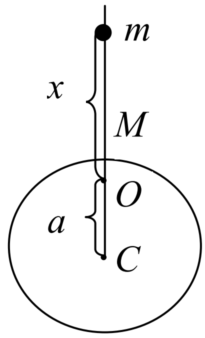


Рис.6.13

6.68. Тонкий обруч, повешенный на гвоздь, вбитый горизонтально в стену, колеблется в плоскости, параллельной стене. Радиус обруча R = 30 см. Вычислить период колебаний.

6.69. Диск радиусом R = 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний?

6.70. На тонкой нити длиной l подвешен шар радиусом $r = 0{,}1l$. Какова относительная погрешность в определении периода колебания, если маятник считать математическим?

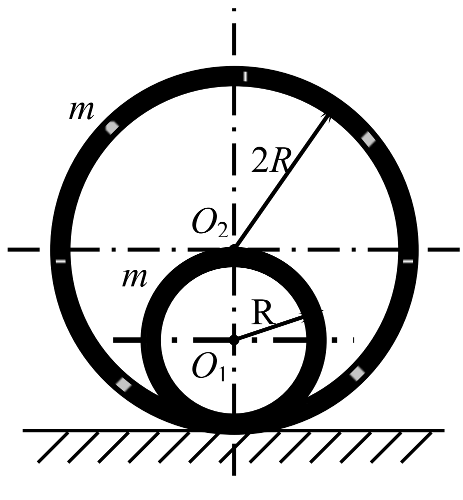


Рис.6.14

6.71. Обруч радиуса $2R$ имеет массу m и приварен к другому такой же массы и радиуса R_1 (рис.6.14). Система стоит на горизонтальном столе. Определить период T ее малых колебаний.

6.72. Шарик радиуса r катается по внутренней поверхности цилиндра радиуса R, совершая малые колебания около положения равновесия . Найти период колебаний.

6.73. Период колебаний крутильного маятника t_0 = 4 с. Если на расстоянии a = 0,5 м от оси колебания к нему прикрепить шар массой m = 0,3 кг (радиус шара r<<d), то период колебаний станет равным T_1 = 8 с. Определить момент инерции маятника.

6.74. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси O с частотой $\omega_1 = 15\ с^{-1}$. Если в положении равновесия к нему прикрепить под осью O на расстоянии l = 20 см от нее небольшое тело массы m = 50 г, то частота колебаний становится $\omega_2 = 10\ с^{-1}$. Найти момент инерции первоначального маятника относительно оси O.

6.75. Тонкая однородная пластинка в форме равностороннего треугольника с высотой h совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из его сторон. Найти период колебаний и приведенную длину данного маятника.

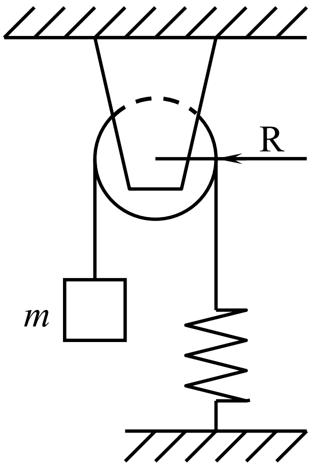


Рис.6.15

6.76. Найти частоту малых колебаний системы, показанной на рис. 6.15. Известны радиус блока R, его момент инерции J относительно оси вращения, масса тела m и жесткость пружины k. Массы нити и пружины пренебрежимо малы, нить по блоку не скользит, трения в оси блока нет.

6.77. Начальная амплитуда колебаний математического маятника A_1 = 20 см, амплитуда после 10 полных колебания равна A_{10} = 1 см. Определить логарифмический декремент δ затухания и коэффициент затухания β, если период колебания T = 5 с. Записать уравнение колебаний.

6.78. Гиря массой m = 500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k = 20 Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания λ = 0,004. Сколько колебаний должна совершить гиря, чтобы амплитуда A колебаний уменьшилась в два раза? За какое время t произойдет это уменьшение?

6.79. Жесткость пружин рессоры вагона k = 481 кН/м. Масса вагона с грузом m = 64 т. Вагон имеет четыре рессоры. При какой скорости v вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина рельса l = 12,8 м?

6.80. Затухающие колебания точки происходят по закону $x = a_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t)$. Найти: а) амплитуду смещения и скорость точки в момент t = 0; б) момент времени, когда точка достигает крайних положений.

6.81. Тело совершает крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t}\cos \omega t$. Найти: а) угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение тела $\ddot{\varphi}$ в момент t = 0; б) момент времени, когда угловая скорость максимальна.

6.82. Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания λ = 0,2. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

6.83. Тело массой m = 10 г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой A_{max} = 7 см, начальной фазой φ_0 = 0 и коэффициентом затухания β = 1,6 с$^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид $x = 5\sin(10\pi t - 3\pi/4)$ см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и уравнение внешней периодической силы.

6.84. Осциллятор массы m движется по закону $x = \alpha \sin(\omega t)$ под действием вынуждающей силы $F_\tau = F_0 \cos(\omega t)$. Найти коэффициент затухания β осциллятора.

6.85. Горизонтальный однородный диск массы m и радиуса R укреплен на конце тонкого стержня AO (рис.6.16) при повороте диска на угол φ вокруг оси AO, на него действует момент упругих сил $N_z = -k\varphi$, где k - постоянная. Найти амплитуду малых крутильных колебаний и их энергию, если в начальный момент диск отклонили на угол φ_0 из положения равновесия и сообщили ему угловую скорость $\dot{\varphi}_0$.

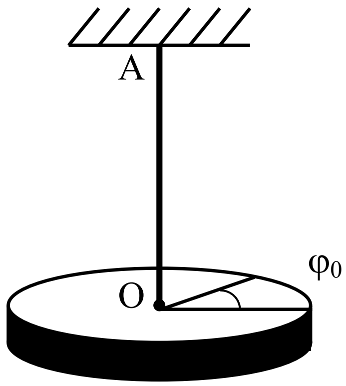


Рис.6.16

7.Элементы специальной теории относительности (СТО)

7.1.Основные понятия и законы

Для описания движения со скоростями, близкими к скорости света, Эйнштейном была создана релятивистская механика, т.е. механика учитывающая требования специальной теории относительности (СТО).

СТО представляет собой физическую теорию пространства и времени для случая пренебрежимо малых гравитационных полей. В ее основу положены два постулата.

Первый постулат – *принцип относительности Эйнштейна*: все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Неизменность вида уравнений при замене в них всех координат и времени одной системы отсчета на соответствующие величины другой системы называется *инвариантностью*. Поэтому первый постулат можно сформулировать иначе: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Второй постулат – *принцип постоянства скорости света*: скорость света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с) одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

В релятивистской механике рассматриваются только инерциальные системы отсчета. Во всех задачах считается, что оси y, y' и z, z' сонаправлены, x и x' совпадают, а скорость v_0 системы координат K' относительно системы K направлена вдоль общей оси xx' (рис.7.1).

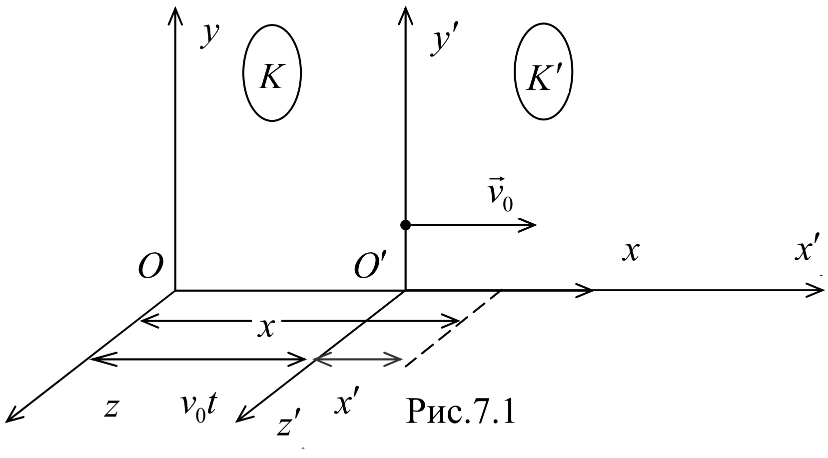


Рис.7.1

Преобразования Лоренца – преобразования координат и времени при переходе от системы K к K'

$$x=\frac{x'+v_0t'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},\ \ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+v_0x'/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \qquad (7.1)$$

Из преобразований Лоренца вытекает преобразование скоростей

$$v_x=\frac{v_{x'}+v_0}{1+v_0v_{x'}/c^2},\ v_y=\frac{v_{y'}\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1+v_0v_{x'}/c^2},\ v_z=\frac{v_{z'}\sqrt{1-v_0^2/c^2}}{1+v_0v_{x'}/c^2}, \qquad (7.2)$$

где $v_{x'}, v_{y'}, v_{z'}$ - компоненты скорости в системе K', v_x, v_y, v_z - компоненты скорости в системе K.

При малых скоростях преобразования Лоренца (7.1) переходят в преобразования Галилея

$$x=x'+v_0t',\ y=y',\ z=z',\ t=t', \qquad (7.3)$$

а преобразования скоростей (7.2) принимают вид

$$v_x=v_{x'}+v_0,\ v_y=v_{y'},\ v_z=v_{z'}\ . \qquad (7.4)$$

Таким образом, более общая физическая теория СТО включает в себя известную теорию как частный случай. Релятивистская механика при малых скоростях переходит в классическую механику Ньютона.

Релятивистское *сокращение длины* стержня

$$l=l_0\sqrt{1-v_0^2/c^2}\ , \qquad (7.5)$$

где l_0 - *собственная длина*, т.е. длина стержня в системе K', относительно которой он покоится, располагаясь параллельно оси x', l - длина стержня в системе x, относительно которой стержень движется со скоростью $v=v_0$.

Релятивистское *сокращение промежутков времени*

$$\Delta t=\frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \qquad (7.6)$$

где Δt_0 - *собственное время*, т.е. интервал времени между двумя событиями, происходящими в одной точке в системе K', измеренный по часам этой системы, Δt - интервал времени между двумя событиями, в системе K, измеренный по часам системы K.

Релятивистская масса

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \qquad (7.7)$$

где m_0 - *масса покоя,* т.е. масса в системе отсчета, относительно которой частица неподвижна (K'), $v=v_0$, v - скорость частицы (K).

Релятивистский импульс

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}. \qquad (7.8)$$

Основное уравнение динамики (второй закон Ньютона) с учетом (7.8) имеет в релятивистской динамике тот же вид, что и в классической

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}. \qquad (7.9)$$

В релятивистской механике *полной энергией* E называется сумма *кинетической энергии* T и *энергии покоя* E_0

$$E=T+E_0\ . \qquad (7.10)$$

Связь массы и энергии

$$E=mc^2, \qquad (7.11)$$

$$E_0=m_0c^2. \qquad (7.12)$$

Учитывая соотношения (7.12), (7.11), из (7.10) получим выражение для кинетической энергии

$$T=E-E_0=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}-m_0c^2. \qquad (7.13)$$

Полная энергия и импульс релятивистской частицы связаны соотношением

$$E^2-p^2c^2=m_0^2c^4. \qquad (7.14)$$

Связь кинетической энергии и импульса релятивистской частицы находим по формуле

$$p^2c^2=T\left(T+2m_0c^2\right). \qquad (7.15)$$

7.2.Примеры решения задач

Задача 7.1. Вдоль оси x инерциальной системы отсчета движется ракета со скоростью $v = 0{,}9c$, проходящая начало координат (точку O) в момент времени $t = 0$ (см. рис.7.1). В момент $t = 9$ с вслед за ракетой посылается световой сигнал из точки O, а с ракеты - световой сигнал в точку O. Найти: 1) момент времени t_2, когда сигнал из точки O достигнет ракеты; 2) момент времени t_3, когда сигнал с ракеты придет в точку O.

Решение. В момент времени, когда из точки O испускается световой сигнал, ракета находится от точки O на расстоянии $x_1 = vt_1$. Скорость, с которой световой сигнал догоняет ракету, равна ($c - v$). Следовательно, время достижения сигналом ракеты

$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \dfrac{x_1}{c-v} = \dfrac{vt_1}{c-v}$, откуда

$$t_2 = t_1 + \frac{vt_1}{c-v} = t_1\frac{c-v+v}{c-v} = \frac{ct_1}{c-v} = \frac{t_1}{1-v/c} = 9\ \text{с}.$$

Скорость сигнала, идущего от ракеты к точке O, равна c. Поэтому $\Delta t_2 = t_3 - t_1 = \dfrac{x_1}{c} = \dfrac{vt_1}{c}$, следовательно,

$$t_3 = t_1 + \frac{vt_1}{c} = t_1(1+v/c) = 9(1+0{,}9) = 17{,}1\text{с}.$$

Задача 7.2. Имеются две пары часов, одна из которых (A', B') движется относительно другой (A,B) со скоростью v (рис.7.2). Расстояние между часами A и B равно l, они синхронизированы. Аналогично поступили с часами A' и B' в их системе отсчета. Момент, когда часы B' и A оказались напротив друг друга, взят за начало отсчета. Определить: 1) показания часов B' и B, когда они окажутся напротив друг друга (с точки зрения наблюдателя, связанного с часами B); 2) показания часов A' и A, когда они окажутся напротив друг друга (с точки зрения наблюдателя, связанного с часами A).

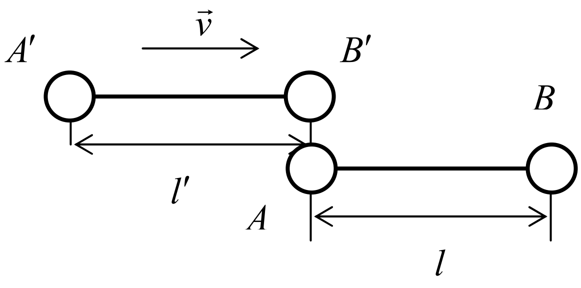


Рис.7.2

Решение. Показания часов B и B', когда они напротив друг друга, $\tau_B = \dfrac{l}{v}$; $\tau'_B = \tau_B\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{l}{v}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

Показания часов A и A': $\tau_A = \frac{l'}{v} = \frac{l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v}$; $\tau'_A = \frac{\tau_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{v}$.

Задача 7.3. Частица движется в системе K вдоль оси x со скоростью v_x и ускорением a_x. Система отсчета K' движется вдоль оси x системы K со скоростью u. Чему равны скорость и ускорение частицы в этой системе (см. рис.7.1).

Решение. Воспользуемся преобразованиями Лоренца

$$x' = \gamma(x - ut);\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Продифференцируем: $dx_1 = \gamma(dx - \beta c dt)$,

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right);\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right).$$

Искомая скорость

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}},$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$. Это закон сложения скоростей.

Ускорение $a'_x = \frac{dv'_x}{dt}$

$$dv'_x = \frac{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)(v_x - u)' - (v_x - u)\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)'}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)dv_x - (v_x - u)\left(-\frac{udv_x}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2}.$$

$$a'_x=\frac{dv'_x}{dt}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2\gamma\left[dt-\left(\frac{\beta}{c}\right)dx\right]}=\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)dv_x}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}dt\left[1-\frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right]}=$$

$$=\frac{dv_x}{dt}\frac{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3}=\frac{a_x\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)^3}.$$

Задача 7.4. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $v=\frac{c}{2}$, длина l = 1 м и угол между стержнем и направлением движения $\theta=45°$ (рис. 7.3).

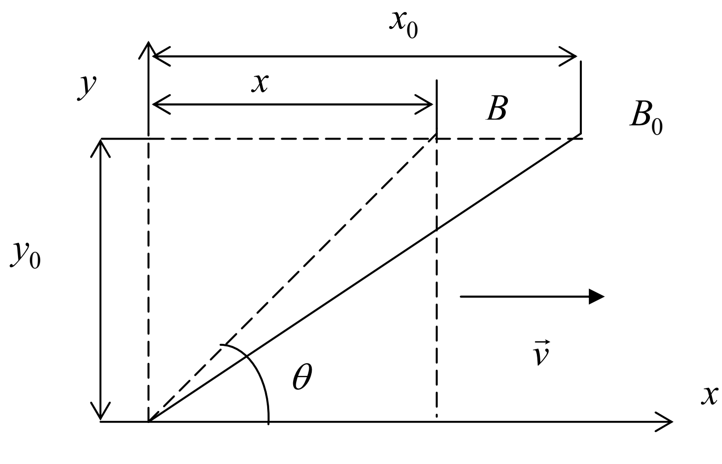


Рис.7.3

Решение. Линейные размеры стержня в направлении движения сокращаются $x=x_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$; а y_0 остается постоянным.

Длина стержня в лабораторной системе отсчета $l^2=x^2+y_0^2$;

Угол наклона стержня $\operatorname{tg}\theta=\frac{y_0}{x}$;

Поэтому $l^2=x^2+x^2\operatorname{tg}^2\theta=x^2\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)$; $x^2=\frac{l^2}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$; $x=\frac{l}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$

Длина стержня в собственной системе отсчета $l_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

Из преобразований координат $x_0=\frac{x}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}}$; $x=\frac{l}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}$

Подставив x в x_0 и y_0, получим

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)}};\ y_0 = x\operatorname{tg}\theta = \frac{l\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

Окончательно собственная длина стержня равна

$$l_0 = \sqrt{\frac{l^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)} + \frac{l^2\operatorname{tg}^2\theta}{\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)}} = l\sqrt{\frac{1+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\operatorname{tg}^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)}} =$$

$$= l\sqrt{\frac{1+\left(1-\frac{c^2}{4c^2}\right)1}{\left(1-\frac{c^2}{4c^2}\right)\left(1+1\right)}} = l\sqrt{\frac{7}{6}} = 1{,}08\ \text{м}.$$

Задача 7.5. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, в которой ее время жизни $\Delta t = 20$ нс?

Решение. Соотношение между указанными временами

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = 0{,}5.$$

Откуда, возведя в квадрат, получим $1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4};\ \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4};\ v = c\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Путь в лабораторной системе отсчета

$$l = v\Delta t = c\frac{\sqrt{3}\Delta t}{2} = 5{,}16\ \text{м}.$$

Задача 7.6. На $1\ \text{м}^2$ поверхности, перпендикулярной направлению солнечных лучей, около Земли вне ее атмосферы приходится 1,4 кВт энергии излучения Солнца (солнечная постоянная). Какую массу теряет Солнце в секунду за счет излучения света? На какое время хватит 0,1 массы Солнца, чтобы поддерживать его излучение? Расстояние от Солнца до Земли 150 млн км. Масса Солнца $M_C = 2\cdot 10^{30}$ кг.

Решение. Солнечная постоянная $\kappa = 1{,}4$ кВт/м^2 есть удельный поток энергии (интенсивность) $\kappa = \dfrac{E}{S\tau}$, т.е. энергия, излучаемая с единицы поверхности в единицу времени всех длин волн.

Поток энергии (мощность) $\Phi = \dfrac{E}{\tau} = \kappa S = \kappa 4\pi l^2$ *- это энергия, излучаемая в единицу времени, где* $4\pi l^2$ *- площадь сферы радиуса* l.

Используя связь массы и энергии $E = mc^2$, получим

$$\Phi = \kappa 4\pi l^2 = \frac{mc^2}{\tau} = \left(\frac{m}{\tau}\right)c^2 .$$

Масса, которую теряет Солнце в единицу времени,

$$\left(\frac{m}{\tau}\right) = \frac{\kappa 4\pi l^2}{c^2} = 4{,}4\cdot 10^9\ \text{кг/с}.$$

1/10 массы Солнца –это $2\cdot 10^{29}$ кг.

Время, за которое масса Солнца уменьшится на 1/10,

$$t = \frac{2\cdot 10^{29}}{\left(\dfrac{m}{\tau}\right)} = \frac{2\cdot 10^{29}}{4{,}4\cdot 10^9} = 1{,}43\cdot 10^{12}\ \text{лет}.$$

Задача 7.7. Определить релятивистский импульс p и кинетическую энергию T электрона, движущегося со скоростью $v = 0{,}9$с.

Решение. Релятивистский импульс

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c};\ \beta = 0{,}9 .$$

$$p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} = 5{,}6\cdot 10^{-22}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

Кинетическая энергия – это разность полной энергии и энергии покоя

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) =$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = 1{,}06\cdot 10^{-13}\ \text{Дж}.$$

7.3.Задачи для самостоятельного решения

7.8. Мезон, входящий в состав космических лучей, движется со скоростью, составляющей 95% скорости света. Какой промежуток времени $\Delta\tau$ по часам неподвижного наблюдателя соответствует одной секунде "собственного времени" мезона?

7.9. Отношение заряда движущегося электрона к его массе, определенное из опыта, равно $0{,}88\cdot10^{11}$ Кл/кг. Определить массу движущегося электрона и его скорость.

7.10. На сколько процентов изменится продольный размер протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $\varphi = 10^6$ В?

7.11. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью относительно инерциальной *K*-системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе отсчета будет на $\eta = 0{,}5$ % меньше его собственной длины?

7.12. Имеются две системы отсчета K и K', относительная скорость которых неизвестна. Параллельный оси x стержень, движущийся относительно системы K со скоростью $v_2' = 0{,}1$ c, имеет в этой системе длину $l' = 1{,}1$ м. В системе K длина стержня равна $l = 1$ м. Найти скорость стержня v_x в системе K и относительную скорость систем v_0.

7.13. Чему равно относительное приращение длины стержня $\Delta l/l$, если ему сообщить скорость $v = 0{,}1c$ в направлении, образующем с осью стержня угол α? Вычислить $\Delta l/l$ для α, равных 45° и 90°.

7.14. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его скорость $v = c/2$, длина $l = 1$ м, угол между ним и направлением движения $\alpha = 45°$.

7.15. Имеются два одинаковых стержня. Стержень *1* покоится в системе отсчета K_1, стержень *2* покоится в системе отсчета K_2. Системы движутся друг относительно друга вдоль совпадающих осей x. Стержни параллельны этим осям. Какой стержень будет короче: а) в системе K_1, б) в системе K_2?

7.16. Имеется прямоугольный треугольник, у которого катет $a = 5{,}00$ м и угол между этим катетом и гипотенузой $\alpha = 30°$. Найти в системе отсчета K', движущейся относительно этого треугольника со скоростью $v = 0{,}866c$ вдоль катета a : а) соответствующее значение угла α' ; б) длину l' гипотенузы и ее отношение к собственной длине.

7.17. В системе K', относительно которой он покоится, стержень имеет длину $l' = 1$ м и образует с осью x' угол $\alpha' = 45°$. Определить длину стержня в системе K и угол α, который стержень образует с осью x. Относительная скорость систем равна $v_0 = 0,5$ с.

7.18. Суммарная поверхность неподвижного тела, имеющего форму куба, равна S_0. Чему равна поверхность S того же тела, если оно движется в направлении одного из своих ребер со скоростью $v = 0,968c$?

7.19. Имеется двое одинаковых часов. Часы *1* покоятся в системе отсчета K_1, часы *2* покоятся в системе отсчета K_2. Системы движутся друг относительно друга. Какие часы идут быстрее: а) в системе K_1, б) в системе K_2?

7.20. На сколько увеличится масса α -частицы при ускорении ее от начальной скорости, равной нулю, до скорости, равной $0,9c$?

7.21. Плотность покоящегося тела равна ρ_0. Найти скорость системы отсчета относительно данного тела, в которой его плотность будет на η = 25% больше ρ_0. Под плотностью понимается отношение массы покоя тела к его объёму.

7.22. Кинетическая энергия электрона T = 10 Мэв. 1) Во сколько раз его масса больше массы покоя? 2) Сделать такой же подсчет для протона.

7.23. Найти скорость частицы, если ее кинетическая энергия составляет половину энергия покоя.

7.24. Во сколько раз релятивистская масса частицы, скорость которой отличается от скорости света на 0,01 %, превышает ее массу покоя?

7.25. Найти отношение e/m заряда электрона к его массе для скоростей: $v \ll c$; $v = 2\cdot 10^8$ м/с; $v = 2,4\cdot 10^8$ м/с; $v = 2,8\cdot 10^8$ м/с. Построить графики зависимостей m и e/m от величины $\beta = v/c$.

7.26. Во сколько раз масса протона больше массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию T=1ГэВ?

7.27. Найти скорость космической частицы, если ее полная энергия в пять раз больше энергия покоя.

7.28. До какой кинетической энергии T можно ускорить частицы в циклотроне, если относительное увеличение массы не должно превышать 5%? Задачу решить для электронов и протонов.

7.29. Электрон летит со скоростью, равной 0,8 скорости света. Определить кинетическую энергию T электрона в МэВ.

7.30. Какую разность потенциалов должен пройти электрон (протон), чтобы его собственное время стало в 10 раз меньше лабораторного?

7.31. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти протон, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

7.32. При какой скорости кинетическая энергия любой частицы вещества равна ее энергии покоя?

7.33. Масса движущегося протона в 1,5 раза больше его массы покоя. Определить полную E и кинетическую T энергии этого протона.

7.34. При каких значениях отношения кинетической энергии частицы к ее энергии покоя относительная погрешность при расчете ее скорости по нерелятивистской формуле не превышает $\eta = 0{,}01$?

7.35. Энергия покоя частицы равна E_0. Чему равна полная энергия частицы в системе отсчета, в которой импульс частицы равен p?

7.36. Электрон движется со скоростью, равной 0,6 скорости света. Определить импульс электрона.

7.37. С какой скоростью движется частица, импульс которой равен ее комптоновскому импульсу m_0c?

7.38. Найти импульс p релятивистской частицы массы m, кинетическая энергия которой равна T.

7.39. Протон движется с импульсом $p = 10$ ГэВ/c, где c - скорость света. На сколько процентов отличается скорость этого протона от скорости света?

7.40. Кинетическая энергия электрона равна его энергии покоя. Найти импульс электрона.

7.41. Найти зависимость импульса частицы с массой m от ее кинетической энергии. Вычислить импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

7.42. При скорости частицы v_0 импульс частицы равен p_0. Во сколько раз η нужно увеличить скорость частицы для того, чтобы ее импульс удвоился?

7.43. Найти скорость, при которой релятивистский импульс частицы в $\eta = 2$ раза превышает ее ньютоновский импульс.

7.44. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его масса была такой же, как у α-частицы с кинетической энергией 1000 МэВ?

7.45. Сколько литров воды можно вскипятить, используя собственную энергию 1 л воды? Начальная температура воды $t_1 = 0^0 C$, удельная теплоемкость воды $C_{\text{уд}} = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ К).

7.46. Протон и α-частица проходят одинаковую ускоряющую разность потенциалов u, после чего масса протона составила треть массы α-частицы. Определить разность потенциалов.

7.47. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить скорость частицы массы m от $0{,}6c$ до $0{,}8c$. Сравнить результат со значением, полученным по нерелятивистской формуле.

7.48. Сколько энергии (в расчете на единицу массы) необходимо затратить, чтобы сообщить первоначально покоившемуся космическому кораблю скорость $v = 0{,}98c$? Сопротивления нет.

7.49. На покоящуюся частицу массы m_1 налетает частица массы m_2, кинетическая энергия которой равна T_2. После столкновения частицы слипаются и движутся как целое. Найти массу образовавшейся частицы. При каких условиях эта масса приблизительно равна сумме масс исходных частиц? Найти скорость образовавшейся частицы.

7.50. Найти изменение массы Δm_μ, происходящее при образовании $\nu = 1$ моль воды, если реакция образования воды такова: $2H_2+O_2 = 2\ H_2O$. Теплота образования моля $Q = 5{,}75\cdot10^5$ Дж.

7.51. При делении ядра урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ освобождается энергия $E = 200$ МэВ. Найти изменение массы Δm_μ при делении $\nu = 1$ моль урана.

7.52. При распаде некоторой частицы появляется две частицы с массами m_1 и m_2. Из опыта известны абсолютные величины импульсов p_1 и p_2 этих частиц и угол θ между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы.

7.53. Покоящееся тело массы M распадается на две части с массами m_1 и m_2. Вычислить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов распада.

7.54. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0{,}8c$. Индукция поля $B = 0{,}01$ T. Определить радиус окружности: 1) не учитывая увеличения массы со скоростью; 2) учитывая это увеличение.

7.55. Электрон движется в магнитном поле по окружности радиусом $r = 2$ см. Индукция поля $B = 0{,}01$ Тл. Определить кинетическую энергию T электрона.

7.56. Электрон, влетевший в камеру Вильсона, оставил след в виде дуги окружности радиусом $r = 10$ см. Камера находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ Тл. Определить кинетическую энергию T электрона.

7.57. Кинетическая энергия α-частицы $T = 500$ МэВ. Частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиуса $r = 80$ см. Определить индукцию B поля.

7.58. Электрон, кинетическая энергия которого $T = 1{,}5$ МэВ, движется в однородном магнитном поле по окружности. Индукция поля $B = 0{,}02$ Тл. Определить период τ обращения. Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}51$ МэВ.

Ответы.

1.12. $\Delta r = 13{,}85\,\text{м}$.

1.13. $y = \dfrac{2Ax\sqrt{B^2 - x^2}}{B^2}$

1.14. $\varphi = 1{,}4°$

1.15. $t = 1{,}7\,\text{с}$

1.16. $\Delta r = 2\,\text{м}$

1.17. $v_y = 5{,}625t^2 + 0{,}1t = 5{,}725$ м/с

1.18. $t = 1\,\text{с}$

1.19. $v = 7{,}02\,\text{м/с}$

1.20. $\vec{v} = 2\pi\alpha\cos(2\pi t)\vec{i} - 3\pi\beta\sin(3\pi t)\vec{j}$ м/с

$\vec{a} = 4\pi^2\alpha\sin(2\pi t)\vec{i} - 9\pi^2\beta\cos(3\pi t)\vec{j}$ м/с^2

1.21. $t = 2\,\text{с}$, $l_{\min} = 6{,}7\,\text{м}$

1.22. $\vec{v} = 3\vec{i}$ м/с, $\vec{a} = -2\vec{j}$ м/с^2, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

1.23. $\Delta\vec{r} = -12\vec{j}\,\text{м}$

1.24. $y = 4 - 3x$, $\Delta\vec{r} = 3\vec{i} - 5\vec{j}\,\text{м}$

1.25. $\varphi = 24{,}8°$

1.26. $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\varphi = 15{,}3°$

1.27. $v = 1{,}27\,\text{м/с}$, $a = 2{,}54$ м/с^2

1.28. $y = \dfrac{\beta x^3}{\alpha^3}$, $\vec{a} = 6\beta\vec{j}\,\text{м/с}^2$

1.29. $y = \dfrac{2x^2}{a} - a$, $\vec{v} = -a\omega\left(\sin\omega t\vec{i} + 2\sin 2\omega t\vec{j}\right)$ м/с

$\vec{a} = -a\omega^2\left(\cos\omega t\vec{i} + 4\cos 2\omega t\vec{j}\right)$ м/с^2

1.30. $y = B\left(\dfrac{x}{A}\cos\varphi_0 - \dfrac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}\sin\varphi_0\right)$

1.31. $y = A - \dfrac{2x^2}{A}$, $|\vec{v}| = A\omega\sqrt{\cos^2\omega t + 4\sin^2 2\omega t}$ м/с

1.32. $\varphi = \arccos\dfrac{(2\alpha\tau + \beta)6\beta\tau + 36\gamma\theta\tau 4}{\sqrt{\left[(2\alpha\tau + \beta)^2 + (3\gamma\tau)^2\right]\left[36\delta^2\tau^2 + 144\theta^2\tau^4\right]}}$

1.33. $h = h_0 - \dfrac{v_0 tg^2\alpha}{2g}$, $R = \dfrac{v_0^2\left(1 + tg^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}{g}$

1.34. $v=\dfrac{gt}{\sin\alpha}$

1.35. $s=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha\sqrt{v_0^4\sin^2 2\alpha+8gh_0v_0^2\cos^2\alpha}}{2g}$; $\quad R=\dfrac{\left(v_0^2+2gh_0\right)^{\frac{3}{2}}}{v_0 g\cos\alpha}$

1.36. $a_n=\dfrac{v_0 g\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2-2v_0 g\Delta t\sin\alpha+g^2\Delta t^2}}$;

$a_\tau=\dfrac{g\left(v_0\sin\alpha-g\Delta t\right)}{\sqrt{v_0^2-2v_0 g\Delta t\sin\alpha+g^2\Delta t^2}}$

1.37. $R=\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}$

1.38. $v_0=\sqrt{3gR}=17{,}2$ м/с, $\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}\approx 54{,}7^\circ$

1.39. $R=1{,}52$ м

1.40. $\alpha=\mathrm{arctg}\dfrac{h+\sqrt{h^2+(2R)^2}}{2R}$; $v_0=\sqrt{g\left(\sqrt{(2R)^2+h^2}+h\right)}$;

1.41. $v_{cp}=\dfrac{sv}{v\left(t_1+t_2\right)+2\left(s-v_1 t\right)}=50$ км/ч

1.42. $v_{cp}=119$ км/ч

1.43. $v_{cp}=13{,}8$ м/с, $\langle\vec{v}\rangle=9{,}76\vec{i}+8{,}31\vec{j}$ м/с

1.44. $v_{cp}=1{,}5$ м/с

1.45. $v_{cp}=3{,}5$ м/с

1.46. $t=\dfrac{1}{\alpha}$, $s=\dfrac{b}{2\alpha}$

1.47. $t_1=8{,}85$ с; $t_2=1{,}15$ с.

1.48. $h=2180$ м

1.49. $x=\alpha v_0\ln\left(1+\dfrac{t}{\alpha}\right)$, $s\to\infty$

1.50. $s=2R/3$

1.51. $\varphi=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

1.52. $v=\dfrac{\alpha^2}{2}t$, $a=\dfrac{\alpha^2}{2}$

1.53. $t=\dfrac{2\sqrt{v_0}}{\beta}$, $s=\dfrac{2v_0^{\frac{3}{2}}}{3}$

1.54. $s = \dfrac{\alpha}{2v_0} h^2$

1.55. $a_n = \dfrac{\alpha v_0}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha h}{v_0}\right)^2}}$; $a_\upsilon = \dfrac{\alpha^2 h}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\alpha h}{v_0}\right)^2}}$; $\quad a = \alpha v_0$;

1.56. $r(t) = \alpha t\vec{i} + 0{,}5\beta\alpha t^2\vec{j}$

1.57. $y = \dfrac{\beta}{2\alpha} x^2$

1.58. $R = \dfrac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}} = \dfrac{\alpha}{\beta}\left[1+\left(\dfrac{x\beta}{\alpha}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

1.59. $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2s}{R}\right)$

1.60. $a = \alpha\sqrt{1+\left(4\beta S^2/\alpha^3\right)^2}$

1.61. $a = \dfrac{v}{t}\sqrt{1+4\beta^2 t^4} = 0{,}7$ м/с

1.62. $\omega = 2 - 2t$ рад/с; $\varepsilon = -2\dfrac{\text{рад}}{\text{с}^2}, v = 0{,}2 - 0{,}2t м/с$

1.63. $a_n = (0{,}3t^2 - 1)3R/4 = 2{,}175$ м/с^2; $a_\tau = 0{,}6t3R/4 = 0{,}45$ м/с^2;
$a = 2{,}22$ м/с^2

1.64. $N = 3$

1.65. $v = \beta + 2\gamma t_1 = 8$ м/с; $a_\tau = 2\gamma = -1$ м/с^2; $a_n = \dfrac{(\beta + 2\gamma\tau)^2}{R} = 1{,}6$ м/с^2

1.66. $v = \alpha + 3\beta t_1^{\,2} = 11{,}2$ м/с; $a_\tau = 6\beta t_1 = 1{,}2$ м/с^2;

$$a_n = \frac{(\alpha + 3\beta\tau)^2}{R} = 156{,}8 \text{ м/с}^2$$

1.67. $t = \dfrac{\pi R}{6(v_B - v_A)} = 5{,}2$ с

1.68. $v = 2\pi n_1 R_1 = 1{,}26$ м/с; $R_2 = \dfrac{2\pi n_1 R_1}{\omega_2} = 0{,}3$ м

1.69. $v = \dfrac{2s - v_0 t_1}{t_1} = 25$ м/с; $a = \dfrac{1}{t_1^2}\sqrt{\dfrac{(2s - v_0 t_1)^4}{R^2} + 4(s - v_0 t_1)^2} = 0{,}7$ м/с^2

1.70. $t = \sqrt{\dfrac{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\alpha\tau}} = 0{,}5$ с

1.71. $|\vec{v}| = \dfrac{v_1}{\sqrt{2}} = 7{,}1\,\text{м/с}; \; |\vec{a}| = \dfrac{v_1^2}{2}\sqrt{\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{R^2}} \approx 0{,}1\ \text{м/с}^2$

1.72. $\langle\omega\rangle = 4\,\text{рад/с}; \langle\varepsilon\rangle = -6\ \text{рад/с}^2$

1.73. $\varepsilon = -12\ \text{рад/с}^2$

1.74. $N = \dfrac{nt_1}{120} = 30$

1.75. $v = 1{,}2\ \text{м/с};\ a = 2{,}54\ \text{м/с}^2;\ t_1 = \dfrac{4}{3}\ \text{с}$

1.76. $\varphi = \dfrac{R_1 a t^2}{2 r R_2}$

1.77. $t = \sqrt[3]{200\,\mathrm{tg}\,\varphi} = 7\ \text{с}$

1.78. $\langle\omega\rangle = \omega_0/3$

1.79. $\varphi = \dfrac{\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\omega_0}{\alpha}$

1.80. $\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}$

1.81. $\omega = \sqrt{2\varepsilon_0 \sin\varphi}$

1.82. $v_A = 0;\ v_B = 4t_1 = 2\,\text{м/с};\ v_C = v_D = 1{,}41\,\text{м/с}$;

$a_A = 1\ \text{м/с}^2;\ a_B = 4{,}1\ \text{м/с}^2;\ a_C = 3{,}6\ \text{м/с}^2;\ a_D = 2{,}2\ \text{м/с}^2$

1.83. $v_0 = 100\ \text{км/ч}$

1.84. $a_B = \dfrac{v_0^2}{R};\ \vec{a}_B = \vec{a}_n$ вектор ускорения направлен к центру колеса

1.85. $s = 8R = 4\,\text{м}$

1.86. $R_B = 4R = 2\,\text{м};\ R_D = 2\sqrt{2}R = 1{,}41\ \text{м}$

1.87. $\omega = \alpha t\sqrt{1 + \left(\dfrac{\beta t}{\alpha}\right)^2} = 8\,\text{рад/с};\ \varepsilon = \alpha\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\beta t}{\alpha}\right)^2} = 1{,}3\ \text{рад/с}^2$

1.88. $v_{отн} = 12\,\text{м/с}$

1.89. $v_c = \dfrac{v_2 - v_1}{2};\ \omega = \dfrac{v_2 + v_1}{2R}$

1.90. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5\ \text{рад/с};\ \varepsilon = \omega_1\omega_2 = 12\ \text{рад/с}^2$

1.91. $\omega = \dfrac{v}{r}\sqrt{1 + \dfrac{r^2}{R^2}};\ \varepsilon = \dfrac{v^2}{rR} = 0{,}5\ \text{рад/с}^2$

1.92. $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{R}{r}\right) = 83^\circ$

1.93. $\omega = \dfrac{v}{R}\cos\alpha = 2{,}3$ рад/с; $\varepsilon = \left(\dfrac{v}{R}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha = 2{,}3$ рад/с^2

1.94. $v_C = 2v_A$; $v_B = 0$

1.95. $\omega = \omega_0\sqrt{1 + \left(\dfrac{\varepsilon_0 t}{\omega_0}\right)^2} = 0{,}6$ рад/с; $\varepsilon = \varepsilon_0\sqrt{1+\omega^2 t^2} = 0{,}2$ рад/с^2

2.11. $t_1 = t_2\sqrt{\dfrac{g - F/m}{g - F/M}}$

2.12. $f = [Ft\cos\alpha - (v - v_0)m]/[t(mg - F\sin\alpha)]$

2.13. Угол α определяется из уравнения:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{m(1 - f_1 f_2)}{f_2 M}\operatorname{tg}\alpha + \frac{(f_1 + f_2)m + f_2 M}{f_2 M} = 0$$

2.14. $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\left(\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha\right)}$

2.15. $a = [F(\cos\alpha + f\sin\alpha) - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + f\cos\alpha)g]/[m_1 + m_2]$

2.16. $F = mg\cos\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)$, при $f \le \operatorname{tg}\alpha$;

$F = 0$ при $f > \operatorname{tg}\alpha$

2.17. $f = 0{,}43$

2.18. $a = \dfrac{F}{M+m} - g = 73{,}5$ м/с^2; $T = \dfrac{3}{4}\dfrac{m}{M+m}F = 625$ Н

2.19. $a_1 = \dfrac{m_1 g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2}$; $F_{тр} = \dfrac{m_1 m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}$

2.20. $a = 0$, при $|m_2 - m_1|g \le F_{тр}$;

$a = \dfrac{|m_2 - m_1|g - F_{тр}}{\mathrm{m}_1 + m_2}$, при $|m_2 - m_1|g > F_{тр}$;

$T_2 - T_1 = F_{тр}$

2.21. $x = \dfrac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$

2.22. $F_{min} = fg\,(m_1 + m_2)$

2.23. $l_{\max} = l_0 + (mg)/2k$

2.24. $F_1 = f_1\,(m_1 + m_2)g = 19{,}6$ Н; $F_2 = f_2\, m_2\, g = 23{,}5$ Н

2.25. $m_{мin} = M\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - f}{f}$

2.26. $\mathrm{tg}\alpha = f$; $T_{min} = \dfrac{fmg}{\sqrt{1+f^2}}$

2.27. $\mathrm{ctg}\alpha = f$; $t = \dfrac{v_0\sqrt{1+f^2}}{g\left(1+f^2\right)}$

2.28. $\beta = \mathrm{arctg}\, f$; $F = mg\sin(\alpha + \beta)$

2.29. При $\mathrm{tg}\alpha = 1/f$ $S_{min} = \dfrac{v_0^2}{2g\sqrt{1+f^2}}$

2.30. $\mathrm{tg}2\alpha = -1/f$; $\alpha = 49°$

2.31. $T = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha)$; $N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$

2.32. $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + f)(a + g)$ при $fm_1 < m_2$;

$T = m_2(a + g)$ при $fm_1 > m_2$

2.33. $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\sqrt{a^2+g^2} + fg - a\right)$ в случае движения системы относительно стола, $T = m_2\sqrt{a^2+g^2}$ в случае покоя системы относительно стола

2.34. $F = \dfrac{4m_1 m_2 (g + a)}{m_1 + m_2}$

2.35. $\vec{v}_{\max} = \dfrac{t_1}{m}\left(\beta - \dfrac{\gamma t_1}{2}\right)\vec{i} = 2\vec{i}$ м/с

2.36. $S = \dfrac{2\beta^3}{3m\gamma^2} = \dfrac{16}{3}$ м

2.37. $\vec{r} = v_0 t\,\vec{i} + \dfrac{\alpha t^2}{2m}\,\vec{j} + \dfrac{\beta t^3}{6m}\,\vec{k}$

2.38. $y = \frac{x}{2}\sqrt{3x}$

2.39. $S = \frac{t^2}{2}\left(\frac{a}{3m} - fg\right)$

2.40. $t_0 = \frac{mg}{a\sin\alpha}$; $\vec{v} = \frac{at^2\cos\alpha}{2m}\vec{i}$ - до отрыва тела от плоскости;

$\vec{v} = \frac{a\left(t^2 + t_0^2\right)\cos\alpha}{2m}\vec{i} + \left[\frac{a\left(t^2 + t_0^2\right)\sin\alpha}{2m} - g\left(t - t_0\right)\vec{j}\right]$ - после отрыва.

2.41. $t = \sqrt{2mv_0/\kappa}$

2.42. $x = \frac{\kappa\tau^3}{2m}\left[\frac{\kappa\tau}{4mfg} - \frac{2}{3}\right]$, где $\tau = t_0 - \frac{fmg}{\kappa}$

2.43. $t = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{\alpha(2m_1 + m_2)}}$

2.44. $v = \frac{T}{3(2m_1 + m_2)}\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{\alpha(2m_1 + m_2)}}$;

2.45. $v = \sqrt{\frac{2g}{3k}\sin\alpha}$

2.46. $\alpha/\beta = 3\sqrt{3}$

2.47. $|\vec{F}| = \beta\omega^2\sin(\omega t) = 7{,}4$ Н

2.48. $S = (\omega t - \sin(\omega t))F_0/m\omega^2$

2.49. $t = 2\pi/\omega$; $S = 2F_0/m\omega^2$; $v_{max} = F_0/m\omega$

2.50. $S = 4R\,[\cos(\omega t/2) - 1]$

2.51. $v = [2r^2(\rho_2 - \rho_1)g]/(9\eta) \approx 0{,}25$ см/с

2.52. $a = -2g\,[\exp(-gt/v_0)]$

2.53. $t = \frac{v_0}{g}\ln(1 + \sin\alpha)$;

2.54. $y_{max} = \frac{v_0^2}{g}\,[\sin\alpha - \ln(1 + \sin\alpha)]$

2.55. $x = \dfrac{v_0^2 \cos\alpha}{g}(1 - \exp(-gt/v_0))$;

$y = \dfrac{v_0^2}{g}$ $(1+ \sin\alpha)(1 - \exp(-gt/v_0)) – v_0t$

2.56. $y = \dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}x + \dfrac{v_0^2}{g}\ln\left(1-\dfrac{gx}{v_0^2\cos\alpha}\right)$

2.57. $t = \dfrac{3mv_0^2}{8\alpha} = 3$ с

2.58. $t = \dfrac{mv_0^2}{2\alpha} = 4$ с

2.59. $F = \beta mv$

2.60. $v = v_0 e^{-\beta t}$

2.61. $S = \dfrac{v_0}{\beta}(1 – e^{-\beta})$

2.62. $v = \dfrac{v_0}{1+\alpha v_0 \, t/m}$

2.63. $S = \dfrac{m}{\alpha}$ $\ln(1 + \alpha v_0\, t/m)$

2.64. $v_\infty = \sqrt{\dfrac{4\pi g\rho_в r}{3\rho_0}} \approx 6$ м/с, $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды

2.65. $t = h(v_0 - v)/(v_0 v\ln(v_0/v))$

2.66 $v_\infty = Ar^2$, где r – радиус капли, $A = \dfrac{4\pi\rho g}{3\gamma}$, ρ - плотность вещества тумана (вода); $v_1 = 0{,}25$ м/с; $v_2 = 0{,}01$ м/с

2.67. $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{g}{\gamma}\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha}$

3.11. $\Delta p = (\pi\sqrt{2}\,mR)/2t \approx 4{,}4$ кг·м/с

3.12. $\Delta p = 100$ кг·м/с

3.13. $\vec{w} = \dfrac{M\vec{u}}{M+m}$

3.14. $l \approx 321{,}3$ м

3.15. $v_0 = \sqrt{\dfrac{gl}{\left(1+{}^{m}/_{M}\right)\sin 2\alpha}}$

3.16. $v = \dfrac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m\cos\alpha}$

3.17. $s = \left(\dfrac{M}{M+m}\right)\dfrac{2v_0^2\sin 2\alpha}{g} \approx 283$м

3.18. $\vec{p} = mv_x\vec{i} + mv_y\vec{j} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{17}{6}\vec{j}$ [кг·м/с]

3.19. $F = \dfrac{mS}{t^2} = 2{,}5\cdot 10^4$ Н

3.20. A=32 Дж

3.21. $A = \dfrac{SgH^2(\rho_0-\rho_1)^2}{2\rho_0} = 7{,}84$ Дж,

где ρ_0 – плотность воды, ρ_1 – плотность льда

3.22. $A = \dfrac{5mgl}{36}$

3.23. $A = -\dfrac{(1-\eta)\eta mgl}{2} = -1{,}3$ Дж

3.24. а) $\vec{F} = (\alpha/r^2)\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r$ - единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора $\vec{r}$ ($\vec{e}_r = \vec{r}/r$); $A = 0{,}082\alpha$; б) $\vec{F} = -k\vec{r}$; $A = -7{,}5k$

3.25. $\vec{F} = \alpha\left[-\dfrac{2x}{y}\vec{i} + \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{2y}{z}\right)\vec{j} - \dfrac{y^2}{z^2}\vec{k}\right]$, $A = \dfrac{4}{3}\alpha$

3.26. $A_{стор} = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + \alpha(x_2y_2 - x_1y_1) = 6$ мДж

3.27. $A = 0$

3.28. $A = -\frac{\alpha m g x^2}{2} = -125 \cdot 10^{-3}$ Дж

3.29. $v = \sqrt{v_0^2 - g\alpha x^2} \approx 0{,}87$ м/с

3.30. $t = \frac{\pi}{2\sqrt{g\alpha}} \approx 15{,}7$ с

3.31. $S = \frac{v_0}{\sqrt{g\alpha}} \approx 10$ м

3.32. $A = \frac{\alpha^2}{2m\omega^2}$

3.33. $A = \frac{\alpha^2}{2m\beta^2}$

3.34. $A = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha/\mathrm{m}}\right)$

3.35. $A = \frac{\alpha}{3}\left(v_0 - \frac{\alpha}{6m}\right) \approx 0{,}28$ Дж

3.36. $A = \alpha$

3.37. $A = \alpha/2$

3.38. $A = -\frac{mv_0^4}{2v_0^2 + \alpha}$

3.39. $A = \frac{3m\beta}{2\sqrt{3\beta}}$

3.40. $A = \frac{\beta^4}{32m^3}$

3.41. $A = \frac{\rho g h^2}{12}\left[(a+b)^2 + ab\right]$

3.42. $A = \frac{l^2}{2m\alpha^2}$

3.43. $A = \frac{m\alpha^4}{8}$

3.44. $h_{max} = H/2$; $S_{max} = H$

3.45. $v_{min} = 2r\sqrt{\dfrac{\pi g}{l}}$

3.46. $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{ctg}\alpha_1 \sqrt{1 - \dfrac{2Fl}{mv_0^2 \cos^2 \alpha_1}}$ при $F_1 > \dfrac{mv_0^2 \cos^2 \alpha_1}{2}$

3.47. $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{ctg}\alpha_1 \sqrt{1 - \dfrac{\alpha l^2}{mv_0^2 \cos^2 \alpha_2}}$ при $k > \dfrac{mv_0^2 \cos^2 \alpha_1}{l^2}$

3.48. $v = \dfrac{\sqrt{m^2 (v_1 - v_2)^2 + 2ghM^2}}{M} = 25$ м/с

3.49. $\Delta U = \dfrac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$; 1) 9,6 Дж; 2) 86,4 Дж

3.50. $t = \sqrt{\dfrac{3h}{2g}} \approx 1{,}75$ с

3.51. 1) $h_1 = 0{,}005$ м; $h_2 = 0{,}08$ м; 2) $h = 0{,}02$ м

3.52. $l = 0{,}64$ м

3.53. $\omega = \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0{,}75$

3.54 $\vec{u} = \dfrac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})\vec{i} + (m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y})\vec{j} + (m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z})\vec{k}}{m_1 + m_2} =$

$= (2\vec{j} + 2\vec{k})$ м/с

3.55. $\Delta E_k = -\dfrac{\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2}$, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

3.56. $v_1 = \dfrac{m_1(u + v) + mv}{m_1 + m}$; $v_2 = v$; $v_3 = \dfrac{m_1(v - u) + mv}{m_1 + m}$

3.57. $m_1/m_2 > n$, где m_1 – масса шара, имевшего меньшую энергию

3.58. $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ Потеря энергии максимальна при $m_1 = m_2$

3.59. $\vec{v} = \dfrac{(\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2)}{(1+\eta)}$; v = 4 м/с;

3.60. $\cos\beta = \dfrac{v_1 v_2 \cos\alpha}{u_1 u_2}$

3.61. $\alpha = 90°$

3.62. $\langle F \rangle = \dfrac{mMv^2}{4(m+M)r}$

3.63. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m^2 v_0^2}{2M^2 gl}$

3.64. $Q_1 = 2\sqrt{mQ_2}\left(v - 2\sqrt{\dfrac{Q_2}{m}}\right)$

3.65. $n = \dfrac{m_2 g \operatorname{tg}\alpha}{m_1 v}$

3.66. $h = mg/k$

3.67. $F = mg\left(1 + \sqrt{1 + 2k\dfrac{(h-l)}{mg}}\right)$

3.68. $\Delta x = \sqrt{\dfrac{m_1(m_1+m_2)v^2}{m_2 k}}$

3.69. $v_{min} = fg\sqrt{\dfrac{15m}{k}}$

3.70. $v_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\sqrt{\dfrac{2m_1 gR}{m_1+m_2}}$; $v_2 = \sqrt{\dfrac{2m_1 gR}{m_1+m_2}}$

3.71. $v_1 = F_0\tau/m$; $v_2 = v - F_0\tau/m_2$; $Q = F_0 v\tau - \dfrac{F_0^2\tau^2(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}$

3.72. $F = \rho S u^2$

4.9. $J = 20m_0 l^3/3 = 2\cdot10^{-2}$ кг·м^2

4.10. $J = 2m_0 l^3/3 = 4\cdot10^{-3}$ кг·м^2

4.11. $J = ma^2/3 = 4{,}8\cdot10^{-2}$ кг·м^2

4.12. $J = ma^2/6 = 0{,}36$ кг·м^2

4.13. $J_2/J_1 = 3$

4.14. $J = \dfrac{2m\left(R^5 - r^5\right)}{5\left(R^3 - r^3\right)} + mR^2$

4.15. $J_x = ma^2/12,\ \ J_y = mb^2/12$

4.16. $J_z = m\left(a^2 + b^2\right)/12$

4.17. $J = m \cdot a^2/6$

4.18. $J = 3m \cdot R^2/2$

4.19. $J = m \cdot R^2/4$

4.20. $J = m \cdot l^2/3 + m \cdot R^2/4$

4.21. $m = \dfrac{FR - M_{тр}}{0{,}5R^2 \cdot \varepsilon} = 7{,}5$ кг

4.22. $F = \dfrac{m \cdot d \cdot \pi \cdot n}{2t \cdot f} = 9{,}4\,\text{Н}$

4.23. $F = \dfrac{m \cdot R \cdot \omega_0}{2t} = 5\,\text{Н}$

4.24. $N = \dfrac{3R\omega_0^2}{16\pi fg} \approx 15$

4.25. $v = 4{,}37\,\text{м/с}$

4.26. $t = 1{,}51\,\text{с}$;

4.27. $a = 3{,}27\,\text{м/с}^2$;

4.28. $M = 4/5\ mR^2\ (B + 3Ct) = -0{,}64$ Н·м;

4.29. $\vec{M} = (aB\text{-}bA)\vec{k}$, где $\vec{k}$ - орт оси OZ;

4.30. $M = \dfrac{2\pi gf\rho h\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3}$;

4.31. $F_{\text{гор}} = \dfrac{3mg}{2}$; $F_{\text{верт}} = \dfrac{mg}{4}$;

4.32. $F = \dfrac{mg}{1+3\left(\dfrac{l}{L}\right)^2}$, при $l = L \quad F = \dfrac{mg}{4}$;

4.33. $F = (1 + 4a^2m/J)mg$, где J – момент инерции человека относительно перекладины, a – расстояние между осью вращения и центром масс человека. Если при оценке момента инерции моделировать человека однородным стержнем, вращающимся вокруг одного из его концов, то $F = 4mg$;

4.34. $L = mR^2\,\omega$;

4.35. $L_0 = 7\cdot10^{33}$ кг·м^2/с; $L = 3{,}9\cdot10^6\,.\,L_0 = 2{,}7\cdot10^{40}$ кг·м^2/с;

4.36. $L_0 = mg\,v_0t^2\cos\alpha/2$; $L = (mv_0^3\sin^2\alpha\cos\alpha)/(2g) = 37$ кг·м^2/с;

4.37. $L = ml\sqrt{gl(1-\cos\beta)/3} \approx 1{,}3$ кг·м^2/с;

4.38. 1) $a_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3/2} = 2{,}8$ м/с^2;

2) $T_1 = \dfrac{m_1g\left(2m_2 + J/R^2\right)}{m_1 + m_2 + J/R^2} = 14$ Н; $\quad T_2 = \dfrac{m_2g\left(2m_1 + J/R^2\right)}{m_1 + m_2 + J/R^2} = 12{,}6$ Н,

где $J = \dfrac{m_3R^2}{2}$ - момент инерции блока;

4.39. $a = 2mg / (M+2m) = 3$ м/с^2;

4.40. $a = \dfrac{2(m+M)r^2g}{mr^2 + MR^2 + 2(m+M)r^2}$;

4.41. $a = \dfrac{2r^2g}{R^2 + 2r^2} = 0{,}192$ м/с^2; $\quad T = \dfrac{Mg}{2\left(1 + 2\left(r/R\right)^2\right)} = 4{,}8$ Н;

4.42. $T = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{4mR^2}} = 0{,}9$ Н

4.43. $F_{тр} = 5mg\sin\alpha \approx 0{,}94$ Н

4.44. а) $\omega = \dfrac{gt}{R\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)}$; б) $E_K = \dfrac{mg^2t^2}{2\left(1+\dfrac{M}{2m}\right)}$;

4.45. а) $T_1 = \dfrac{M\left(m_1+m_2\right)g}{2\left(m_1+m_2+M/2\right)}$; б) $T_2 = \dfrac{Mm_2g}{2\left(m_1+m_2+M/2\right)}$;

4.46. $F = \dfrac{Mm_2g}{2\left(m_1+m_2+M/2\right)}$;

4.47. $a = \dfrac{\left(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2\right)g}{m_1+m_2+M/2}$;

4.48. $a = \dfrac{g\left(m-M\right)}{2\left(M+m+J/R^2\right)}$;

4.49. $a = \dfrac{4g}{5}$;

4.50 $E_K = \dfrac{F^2t^2\left(3m_1+m_2\right)}{2m_1\left(m_1+m_2\right)}$;

4.51. $v = 2\sqrt{\dfrac{la_0}{3}}$;

4.52. $a = (g - a_1)/2$; $T = m(g - a_1)/2$;

4.53. $\omega = \sqrt{\dfrac{6F\sin\varphi}{ml}}$;

4.54. $F = \dfrac{fmg}{\left(1+f\right)\sin\alpha}$, $a = \dfrac{f\left(ctg\alpha - 1\right)}{1+f}g$;

4.55. $\langle\omega\rangle = \omega_0/3$

4.56. $\varepsilon = \dfrac{2mgx}{R\left(2m+M\right)}$;

4.57. $E_к = \dfrac{7m\pi^2n^2d^2}{10}$ =1,1 Дж;

4.58. 1) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g}{l}} \approx 17$ рад/с; $v_1 = \omega_1 l/2 \approx 0{,}85$ м/с;

2) $\omega_2 = \omega_1$; $v_2 = \omega_2 l = 1{,}7$ м/с;

4.59. Скорость поступательного движения стержня не зависит от точки удара и равна $u_0 = \dfrac{mv}{m_1} = 6{,}7$ м/с; $\eta_1 = 2/3$; $\eta_2 = 5/12$;

4.60. $v = \dfrac{2M\sqrt{3gl}}{M+3m}$;

4.61. $l = \dfrac{L}{\sqrt{3}}$;

4.62. После удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело, $H = \dfrac{6m^2 h}{(M+2m)(M+3m)}$;

4.63. После удара шарик поднимется на высоту $h_1 = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{M}{M+3m}\right)^2 h$;

а нижний конец стержня – на высоту $h_2 = \left(\dfrac{M}{M+3m}\right)^2 h$;

4.64. $v = v_0 - \dfrac{2M}{m}\sqrt{\dfrac{gL}{3}}\sin(\alpha/2) \approx 380$ м/с;

4.65. $\omega = 2m_1 v_x \left(\dfrac{1}{3}m_2 b^2 + m_1 x^2\right) \approx 2{,}1$ м/с^2; $x = \dfrac{2b}{3}$;

4.66. $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{M}{m} - 1}$, при $M \geq m$;

4.67. $n_2 = \dfrac{(m_1 + 2m_2)n_1}{m_1 + \dfrac{m_2}{2}} \approx 12{,}8$ об/мин;

4.68. Кинетическая энергия уменьшится на $\Delta E_K = \dfrac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}$;

4.69. $\varphi = -\dfrac{2m_1\varphi_1}{(2m_1 + m_2)}$;

4.70. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$;

4.71. $F = \dfrac{Mv_0^2 \cos^2\alpha}{R}$;

4.72. $T = \dfrac{m(\omega^2 R + g\,\mathrm{ctg}\,\theta)}{2\pi}$;

5.12. $F = 667$ нН ;

5.13. $F = 1{,}86\cdot10^{-44}$ Н;

5.14. $h = 22\cdot10^6\,м$, $\varphi = -1{,}42\cdot10^7\,Дж/кг$;

5.15. $F = 0$; $g = 0$;

5.16. $v = 29{,}8\,км/с$;

5.17. $F = \dfrac{\gamma mMh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$; $g = \dfrac{\gamma Mh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$;

5.18. а) $F = \dfrac{\gamma mM}{2\sqrt{5a^2}}$; б) $F = \dfrac{\gamma mM}{b^2}$;

5.19. $h = 4{,}19\cdot10^6\,м$;

5.20. а) $F = \dfrac{2\gamma mM}{R^2}\left[1 - \dfrac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right]$; б) $F = \dfrac{2\gamma \mathrm{mM}}{\mathrm{R}^2}$ - при $h = 0$;

5.21. $\rho = 5{,}51\cdot10^3\,кг/м^3$;

5.22. $F = \dfrac{2\gamma M}{R^2}$ - при $h = 0$; $F \to 0$ $h \to \infty$;

5.23. $P = 0{,}04$ Н;

5.24. Вес тела со стороны Луны больше;

5.25. $g_1 = g\dfrac{R-h}{R}$; $h = R\left(1 - \dfrac{g_1}{g}\right)$; $\dfrac{g_1}{g} = 0{,}3$ при $h = 0{,}7R$;

5.26. $g_л = 0{,}165 g_з$;

5.27. $\dfrac{g_h}{g} = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$; $g_h = 0{,}25g$ при $h = R$;

5.28. 0,25 м/с^2; 0,998 м/с^2;

5.29. $W_п = -3{,}8 \cdot 10^{-10}$ Дж;

5.30. $h = 2H$;

5.31. $H = R\left(\sqrt{\dfrac{g_0}{g}} - 1\right)$ = 13,6 Мм;

5.32. $a = 0{,}6\ \text{см}/\text{с}^2$;

5.33. $d = \sqrt[3]{\gamma \cdot M \cdot T^2 / 4\pi^2}$;

5.34. $g = \gamma \dfrac{M}{R^2}$ = 3,7 Н/кг;

5.35. $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\gamma \cdot \rho}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,c$

5.36. $r = \dfrac{l}{\sqrt{\dfrac{M}{m} + 1}}$ = 344 Мм;

5.37. $\dfrac{2\gamma\delta m}{r_0}$; $g = \dfrac{2\gamma\delta}{r_0}$;

5.38. $F = \dfrac{\gamma \cdot m \cdot M}{r_0\sqrt{\dfrac{l^2}{4} + r_0^2}}$ если $r_0 << l$; $F = \dfrac{2\gamma \cdot m \cdot M}{r_0 \cdot l}$;

5.39. $F = 4{,}2 \cdot 10^{-7}\,\text{Н}$;

5.40. $F = 4{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{Н}$;

5.41. $F = \dfrac{\gamma \cdot m \cdot M}{2R^2}$;

5.42. внутри $g = 0$; вне $g = 4\pi \cdot \gamma \cdot \sigma$;

5.43. $g = \dfrac{4\pi \cdot R^2 \cdot \gamma \cdot \sigma}{r^2}$ вне оболочки;

$g = 0$ внутри оболочки (см.рис.1)

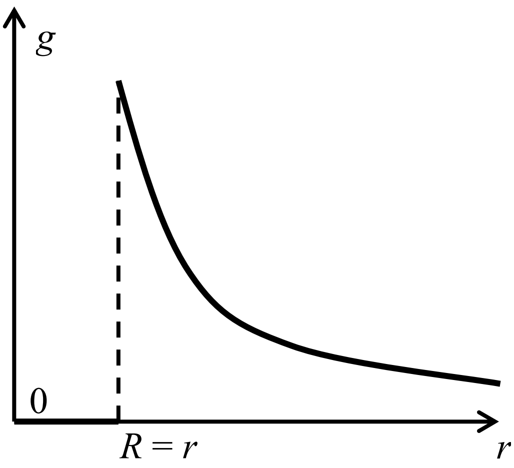


Рис.1

5.44. $g = \dfrac{2\gamma \cdot \sigma}{r_0}$;

5.45. (см.рис.2 и 3)

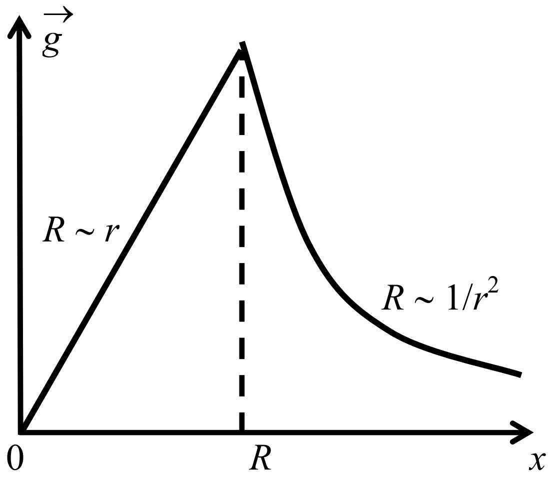


Рис.2.

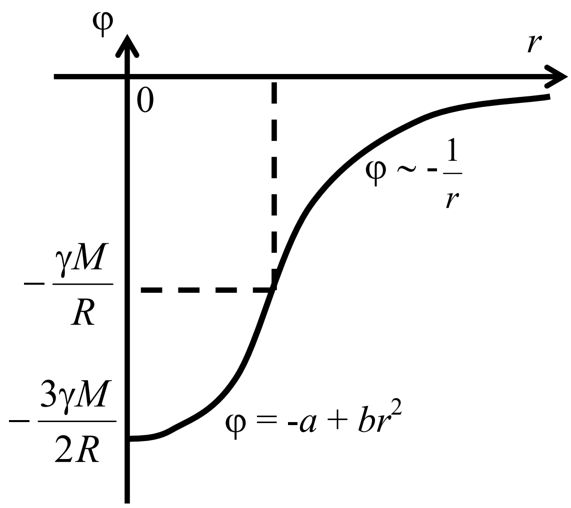


Рис.3.

$\vec{g} = \dfrac{\gamma \cdot M}{R^3}\vec{r}$ (при $r \le R$), $\vec{g} = -\dfrac{\gamma \cdot M}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ (при $r > R$).

$\varphi(r) = -\dfrac{3\gamma \cdot M}{2R} + \dfrac{\gamma \cdot M}{2R^3} r^2$ (при $r \le R$), $\varphi(r) = -\dfrac{\gamma \cdot M}{r}$ (при $r > R$)

5.46. $v = \sqrt{2\gamma \dfrac{M_Л}{R_Л}} = 2{,}35 \cdot 10^3$ м/с;

5.47 $\varphi = -\gamma \dfrac{M}{R}$, $\varphi_1 = -\gamma \dfrac{M_1}{R_1}$ = -62,6 МДж/кг; $\varphi_2 = -\gamma \dfrac{M_2}{R_2}$ = -190 ГДж/кг;

5.48. $h = 2{,}1 \cdot 10^5$ м; $S = 4{,}6$ м;

5.49. $\dfrac{W_п}{W_к} = 2$;

5.50. 1) $A_1 = \dfrac{\gamma Mm}{2R} = 31{,}3$ МДж; 2) $A_2 = \dfrac{\gamma Mm}{R} = 62{,}6$ МДж;

5.51. $v = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{R}} = 42{,}1$ км/с;

5.52. $W = -0{,}36$ нДж;

5.53. $\varepsilon = \dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{h}{2R - h}$;

5.54. $R = \sqrt{\dfrac{3\varphi}{4\pi\gamma\rho}} = 8{,}06 \cdot 10^4$ м;

5.55. $R = \sqrt{\dfrac{3E_п}{4\pi\gamma\rho m}} = 4{,}7 \cdot 10^5$ м;

5.56. $A = \dfrac{\gamma M_з m}{R_0} = 5{,}23 \cdot 10^9$ Дж;

5.57 $\varphi = -\dfrac{\gamma \cdot m}{l} \ln \dfrac{a + l}{a}$; $g = \dfrac{\gamma \cdot m}{a(l + a)}$;

5.58. $v = \sqrt{\dfrac{gR}{\eta}} = 5$ км/с;

5.59. $h = \dfrac{g_0 R^2 t^2}{2(R + H)^2} = 2{,}18$ м;

5.60. $T = 7{,}8$ ч.; $T = 31{,}2$ ч.;

5.61. 6,33 км/с;

5.62. $v = 1{,}7$ км/с; $T = 1$ ч. 50 мин.;

5.63. $v_2 = 2{,}4$ км/с;

5.64. $v = v_1 \sqrt{\dfrac{R_1}{R}} = 7{,}9$ км/с;

5.65. $M = \dfrac{v^2 r}{\gamma} = 6{,}21 \cdot 10^{23}$ кг;

5.66. $T_1 = T_2 \sqrt{\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^3} = 15$ мес.;

5.67. $\dfrac{M_1}{M_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3 \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = 100$, индекс 1 относится к Сатурну и его спутнику, 2 – к земле и Луне;

5.68. $R_2 = 1{,}46 \cdot 10^4$ км; $T_2 = 104$ мин.;

5.69. 1000;

5.70. $T = 88$ мин.;

5.71. $v = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{\gamma M}{R}}$ =6,12 км/с;

5.72. $\Delta v = \sqrt{gR}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 3{,}27$ км/с;

5.73. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR} = 10$ км/с;

5.74.

h, км	v, км/с	T
0	7,91	1 ч. 25 мин.
700	7,79	1 ч. 28 мин.
7000	5,46	4 ч. 16 мин.

5.75. $a_n = 9{,}2$ м/с^2;

5.76. $g_{Л} = \dfrac{R_Л \rho_Л}{R_З \rho_З} g_0 = 1{,}61$ м/с^2;

5.77. $r = \sqrt{\dfrac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 8{,}06$ Мм; $h = r - R = 1{,}69$ Мм;

6.12. t =2с.

6.13. 5см; 0,8с; 1,25Гн; 1,04Рад.

6.14. $x = 10\ \sin 2t$ см; $a = 40\,\text{см}/\text{с}^2$.

6.15. $x = 50\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$мм; $x_1 = 35{,}2$ мм; $x_2 = 0$.

6.16. $v_{\max}$ при $\dfrac{\pi \cdot t}{6} + n\pi$,где $n = 1,2,3,\ldots$ $a_{\max}$при$\dfrac{\pi \cdot t}{6} = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

6.17. $v_{\max} = x_0\omega$; $a_{\max} = x_0\omega^2$;

6.18. $t = \dfrac{T}{6}$;

6.19. $T_л = 2{,}46T_0$

6.20. $x = 10\ \sin\dfrac{\pi}{6}t$ см;

6.21. $x = 0{,}1\sin\pi \cdot t$ м;

$\varphi_1 = \arcsin\dfrac{x}{A} = 36^0 52'$. $\varphi_2 = \arccos\dfrac{v}{\pi \cdot A} = 71^0 26'$.

6.22. $v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$;

6.23. $t = 1c$;

6.24. $T = 4$ с; $v_{\max} = 3{,}14$ см/с; $a_{\max} = 4{,}93$ см/с;

6.25. $v = \omega\sqrt{x_0^2 - x^2}$, (см.рис.4),

6.26. $a = -\omega^2 x_0$;

6.27. $a = 12$см/с^2 .

6.28. $F = mg\cos(\varphi_m\omega t) + ml\omega^2\varphi_m^2\sin^2(\omega t)$;

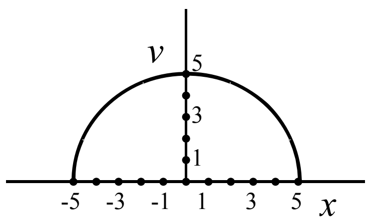


Рис.4

6.29. $x = a\cos(\omega t + \alpha) = -29$ см; $v_z = -81$ см/с;

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{z0}}{\omega}\right)^2}\ ;\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{x0}}{\omega x_0}\right);$$

6.30. $v = 13{,}6$ см/с;

6.31. $\omega = \dfrac{a_{\max}}{v_{\max}} = 10\text{с}^{-1}$; $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}628$ с;.$A_{max} = 1$ см; $x = \sin(10t)$ см;

6.32. $a = -\omega\sqrt{x_0^2\omega^2 - v^2}$;

6.33. $x = 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ см;

6.34. A = 8,3 см;

6.35. $t_1 = 0$; $t_2 = \frac{T}{6}$ = 0,025 с;

6.36. а) T = 0,2 с; a = 0,01 m; б) x = 0,01(1 – cos(31t));

6.37. $\omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{a_2^2 - a_1^2}}$; $A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{a_2^2 - a_1^2}}$;

6.38. A = 3,1 см; T = 4,1 с;

6.39. A = 7,07 см; ω = 4,0 $с^{-1}$; T = 1,57 с; φ = 0,785 рад.;

6.40. $\varphi_2 - \varphi_1$ = 71°46`;

6.41. ω = 9,9 $с^{-1}$;

6.42. A = 7;

6.43. A = 7;

6.44. $F_{\text{мах}}$ = 137 мкН; E = 3,42 мкДж;

6.45. $F = -mA\omega^2 \sin(\omega t)$; F_1 = -62,5 мН; F_2 = -125 мН;

6.46. $\frac{x^2}{2} + y = 1$ – уравнение параболы;

6.47. $v_{\text{мах}}$ = 2,73 αω

6.48. ω_1 = 47,9 и ω_2 = 52,1 $с^{-1}$; T = 1,5 с;

6.49. а) $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$; б) $\vec{a} = -\omega\vec{r}$;

6.50. $y^2 = 4x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ (см. рис. 5);

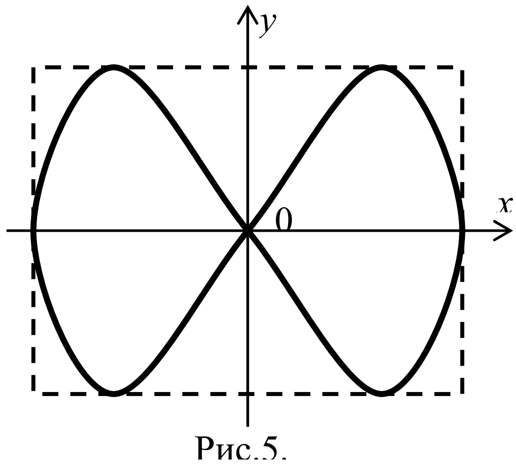


Рис.5.

$6.51.\ y = a\left(1-\dfrac{2x^2}{a^2}\right)$ (см. рис. 6);

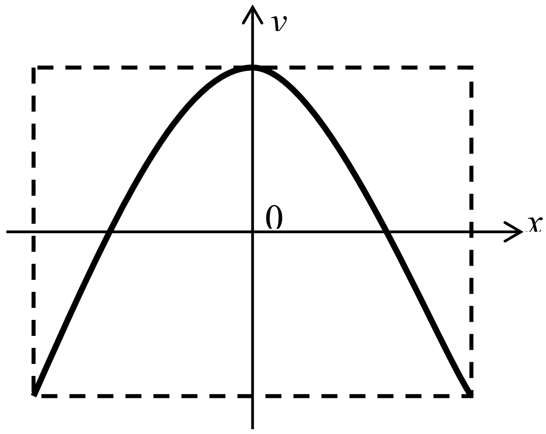


Рис.6.

$6.52.\ m = 0{,}2\,\text{кг}$;

$6.53.\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l}{3g}}$;

$6.54.\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3\left(R^2+r^2\right)\left(R+r\right)}{2g\left(R^2+Rr+r^2\right)}} = 1{,}14$ с;

$6.55.\ x = \left(1\pm\sqrt{1-\dfrac{l^2}{3l_0^2}}\right)\dfrac{l_0}{2} = 10$ и 30 см.;

$6.56.\ \left|F_{\text{мах}}\right| = m\omega^2 A = 2$ мН; $E_{к\,\text{мах}} = \dfrac{mA^2\omega^2}{2} = 50$ мкДж;

6.57. $t = 0{,}463$ с; $\varphi = 0{,}927$ рад.;

$6.58.\ \dfrac{U}{E_К} = \operatorname{tg}^2(\omega t+\varphi)$;

$6.59.\ t = {}^1\!/_{24}$ с;

$6.60.\ E_k = \dfrac{F_0^2}{2m\omega^2}\sin(\omega t);\quad E_{\text{мах}} = \dfrac{F_0^2}{2m\omega^2}$;

$6.61.\ A = 10$ см $T = 0{,}42\,\text{с}$;

$6.62.\ T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\rho_Л H}{\rho_В g}} \approx 1{,}3$ с;

$6.63.\ L = \dfrac{l^2-2d\left(l-d\right)}{l-2d} = 50$ см; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 1{,}42$ с;

$6.64.\ L = \dfrac{5l}{6} = 25$ см; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 1$ с;

$6.65.\ d = 10{,}1$ см;

$6.66.\ l_1 = 9\,\text{см},\ \ l_2 = 25$ см;

6.67. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J + mx^2}{g(mx - Ma)}}$;

6.68. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$ = 1,55 с;

6.69. $L = \dfrac{3R}{2}$ = 36 см; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ = 1,2 с;

6.70. $\varepsilon = \dfrac{T_2 - T_1}{T_1} = 1 - \dfrac{l}{\sqrt{1{,}4r^2 + 2rl + l^2}}$; ε = 9%;

6.71. $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{10R}{g}}$;

6.72. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7(R - r)}{5g}}$;

6.73. $J_0 = \dfrac{ma^2}{\left(T_1 / T_0\right)^2 - 1}$ = 0,025 кг*м^2;

6.74. $J = m \cdot l^2 \dfrac{\omega_2^2 - g/l}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$;

6.75. $T = \pi\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $l_{пр} = \dfrac{h}{2}$;

6.76. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m + J/R^2}}$.

6.77. δ = 0,264; β = 0,05 с$^{-1}$; $x = 20e^{-0{,}05t}\cos(1{,}26t)$;

6.78. $n = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{A_1}{A_2}$ = 173; $T = 2\pi n\sqrt{m/k}$ = 2 мин. 52 сек.;

6.79. $v = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ = 11,2 м/с;

6.80. а) a_0 и $a_0\omega$; б) $t_п = \dfrac{1}{\omega}\left[arctg\left(\dfrac{\omega}{\beta}\right) + n\pi\right]$, где n =1,2,3…;

6.81. а) $\dot{\varphi}(0) = -\beta\varphi_0$; $\ddot{\varphi}(0) = (\beta^2 - \omega^2)\varphi_0$;

$$\text{б) } t_П = \frac{1}{\omega}\left[arctg\left(\frac{\omega^2-\beta^2}{2\beta\omega}\right)+n\pi\right], \text{ где } n = 1,2,3\ldots;$$

6.82. В 1,22 раза;

6.83. $x = 7e^{-1,6t}\sin(10,5\pi t)$ см; $F = 72\sin(10\pi t)$ мН;

6.84. $\beta = \dfrac{F_0}{2m\alpha\omega}$;

6.85. $\varphi_m = \varphi_0\sqrt{1+\dfrac{m\cdot R^2\cdot\dot{\varphi}_0^2}{2\kappa\cdot\varphi_0^2}}$; $E = \dfrac{\kappa\cdot\varphi_m^2}{2}$;

7.8. $\Delta\tau = 3,2$ с;

7.9. $m = 2m_0$; v = 260 Мм/с;

7.10. $\left(\dfrac{\Delta l}{l_0}\right)_e = 0,661$; $\dfrac{\Delta l}{l_0} \approx 0,001$;

7.11. $v = c\sqrt{\eta(2-\eta)} = 0,1$ c;

7.12. $v_x = c\sqrt{1-\left(\dfrac{l}{l_1}\right)^2\left(1-\dfrac{v_{x'}^2}{c^2}\right)} = 0,43$ c; $v_0 = \dfrac{(v_x - v_{x'})}{\left(1-{v_xv_{x'}}/{c^2}\right)} = 0,34c$;

7.13. а) $\dfrac{\Delta l}{l_0} \approx 0,005\cos^2\alpha$; б) –0,0025; 0;

7.14. $l_0 = 1\sqrt{\dfrac{(1-\beta^2\sin^2\alpha)}{(1-\beta^2)}} = 1,08$ М, где $\beta = v/c$;

7.15. а) стержень 2; б) стержень 1;

7.15. а) $\alpha' = 49^0$, б) $l' = 3,8$м, $l'/l = 0,66$;

7.17. а) $l = 0,94$м, б) $\alpha = 49^0$.

7.18. $S = 0,5S_0$;

7.19. а) часы 1; б) часы 2;

7.20. $\Delta m = 8,6\cdot10^{-27}$ кг

7.21. v = 0,06c; под плотностью понимается отношение массы покоя тела к его объёму.

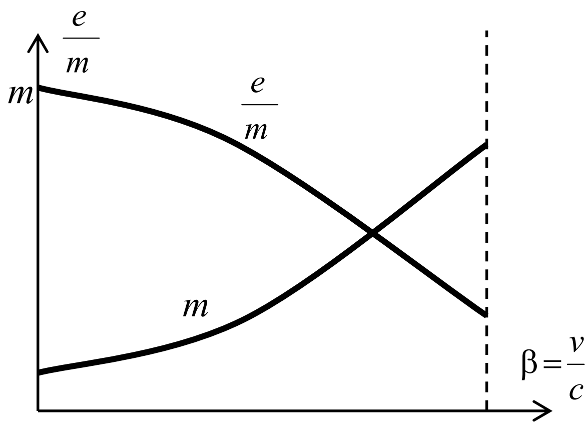


Рис.7.

7.22. 20,6; 1,01;

7.23. $v = 2{,}22 \cdot 10^8$ м/с;

7.24. $\frac{m_{рел}}{m} = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - v/c\right)}} \approx 70$;

7.25. См. рис.7;

7.26. 1,94;

7.27. $v = 2{,}94 \cdot 10^8$ м/с;

7.28. T_k = 25,6 кэВ – для электронов;

T_k = 47 МэВ – для протонов;

7.29. 0,341 МэВ;

7.30. U = 4,61 МВ; U = 8450 МВ;

7.31. U = 510 кВ;

7.32. v = 260 Мм/с;

7.33. E = 1410 МэВ; T = 470 МэВ;

7.34. При $\eta \ll 1$ $\frac{T}{mc^2} \le \frac{4\eta}{3} \approx 0{,}013$;

7.35. $E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}$;

7.36. $2{,}05 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с;

7.37. v = 212 Мм/с;

7.38. $p = \frac{T}{c}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{T}}$;

7.39. $\frac{c - v}{c} = 1 - \left[1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2\right]^{-1/2} = 0{,}44\ \%$;

7.40. $p = 4{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с

7.41. $p = \dfrac{\sqrt{T\left(T + 2mc^2\right)}}{c}$ =1,09 ГэВ/с, где с – скорость света;

7.42. $\eta = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 3 v_0^2 / c^2 l}}$;

7.43. $v = \dfrac{c}{\eta}\sqrt{\eta^2 - 1} = c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

7.44. $U \approx 3{,}78 \cdot 10^9$ В;

7.45. $V = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ л;

7.46. $U = \dfrac{\left(m_{0\alpha} - 3m_{0p}\right)c^2}{e}$ = 912 МВ;

7.47. $A = 0{,}42\ mc^2$, вместо $0{,}14mc^2$;

7.48. $\dfrac{\Delta E}{m} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)c^2 = 3{,}6 \cdot 10^{17}$ Дж/кг;

7.49. суммарная масса приблизительно равна сумме масс исходных частиц, если $\dfrac{T_2 m_1}{c^2} << \left(m_1 + m_2\right)^2$ $\quad v = \dfrac{c\sqrt{T_2\left(T_2 + 2m_2c^2\right)}}{\left(m_1 + m_2\right)c^2 + T_2}$;

7.50. $\Delta m_\mu = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ г/моль ;

7.51. $\Delta m_\mu = 0{,}217$ г/моль;

7.52. $M^2c^2 = (m_1{}^2 + m_2{}^2)c^2 + 2\left(\sqrt{\left(p_1^2 + m_1^2c^2\right)\left(p_2^2 + m_2^2c^2\right)} - p_1 p_2 \cos v\right)$;

7.53. $T_1 = \dfrac{c^2}{2M}\left[\left(M - m_1\right)^2 - m_2^2\right]$; $T_2 = \left[\left(M - m_2\right)^2 - m_1^2\right] \cdot \dfrac{c^2}{2M}$;

7.54. 1) 13,7 см; 2) 22,8 см;

7.55. 3,54эВ;

7.56. 300 МэВ;

7.57. В = 4,2 Тл;

7.58. τ =7,02 нс;

Приложение 1.
Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Масса Земли	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95\cdot10^{8}$ м
Масса Солнца	$1{,}98\cdot10^{30}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot10^{8}$ м
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 суток

Приложение 2.
Фундаментальные физические константы

Гравитационная постоянная	$\gamma = 6{,}672\cdot10^{-11}$ м^3/кг·с^2
Скорость света в вакууме	$c = 3\cdot10^{8}$ м/с
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12{,}57\cdot10^{-7}$ Гн/м
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг
Отношение массы покоя электрона к массе покоя протона	$m_p/m_e = 1836{,}15$
Элементарный заряд	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	$e/m_e = 1{,}759\cdot10^{11}$ Кл/кг
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг

Приложение 3.

Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Множитель	**Приставка**	*Международное*	**Русское**
10^{-18}	атто	a	а
10^{-15}	фемто	f	ф
10^{-12}	пико	p	п
10^{-9}	нано	n	н
10^{-6}	микро	μ	мк
10^{-3}	милли	m	м
10^{-2}	санти	c	с
10^{-1}	деци	d	д
1			
10^{1}	дека	da	да
10^{2}	гекто	h	г
10^{3}	кило	к	к
10^{6}	мега	M	М
10^{9}	гига	G	Г
10^{12}	тера	T	Т
10^{15}	пета	P	П
10^{18}	экса	E	Э

Приложение 4.

Моменты инерции тел правильной геометрической формы

Тело	Ось, относительно которой определяется момент инерции	Формула момента инерции
Тонкий однородный стержень длиной l массой m	Проходит перпендикулярно стержню через его центр масс	$m\,l^2 / 12$
Тонкий однородный стержень длиной l массой m	Проходит перпендикулярно стержню через его конец	$m\,l^2 / 3$
Кольцо радиуса R массы m	Проходит перпендикулярно плоскости кольца через его центр	$m\,R^2$
Однородный диск (цилиндр) радиуса R массы m	Проходит перпендикулярно плоскости основания через центр диска	$m\,R^2 / 2$
Однородный шар радиуса R массы m	Проходит через центр шара	$2\,m\,R^2 / 5$

Варианты расчетных работ

Вар. №	1.Кинематика	2.Динамика точки	3.Динамика системы
1	1.12. 1.42. 1.72	2.11. 2.41. 2.51	3.11. 3.41. 3.71
2	1.13. 1.43. 1.73	2.12. 2.42. 2.52	3.12. 3.42. 3.72
3	1.14. 1.44 1.74	2.13. 2.43. 2.53	3.13. 3.43. 3.63
4	1.15. 1.45. 1.75	2.14. 2.44 2.54	3.14. 3.44 3.64
5	1.16. 1.46. 1.76	2.15. 2.45. 2.55	3.15. 3.45. 3.65
6	1.17. 1.47. 1.77	2.16. 2.46. 2.56	3.16. 3.46. 3.66
7	1.18. 1.48. 1.78	2.17. 2.47. 2.57	3.17. 3.47. 3.67
8	1.19. 1.49. 1.79	2.18. 2.48. 2.58	3.18. 3.48. 3.68
9	1.20. 1.50. 1.80	2.19. 2.49. 2.59	3.19. 3.49. 3.69
10	1.21. 1.51. 1.81	2.20. 2.50. 2.30	3.20. 3.50. 3.70
11	1.22. 1.52. 1.82	2.21. 2.51. 2.41	3.21. 3.51. 3.71
12	1.23. 1.53. 1.83	2.22. 2.52. 2.32	3.22. 3.52. 3.72
13	1.24. 1.54. 1.84	2.23. 2.53. 2.43	3.23. 3.53. 3.33
14	1.25. 1.55. 1.85	2.24. 2.54. 2.34	3.24. 3.54. 3.34
15	1.26. 1.56. 1.86	2.25. 2.55. 2.35	3.25. 3.55. 3.35
16	1.27. 1.57. 1.87	2.26. 2.56. 2.36	3.26. 3.56. 3.36
17	1.28. 1.58. 1.88	2.27. 2.57. 2.37	3.27. 3.57. 3.37
18	1.29. 1.59. 1.89	2.28. 2.58. 2.38	3.28. 3.58. 3.38
19	1.30. 1.60. 1.90	2.29. 2.59. 2.49	3.29. 3.59. 3.39
20	1.31. 1.61. 1.91	2.30. 2.60. 2.50	3.30. 3.60. 3.40
21	1.32. 1.62. 1.92	2.31. 2.61. 2.21	3.31. 3.61. 3.41
22	1.33. 1.63. 1.93	2.32. 2.62. 2.12	3.32. 3.62. 3.42
23	1.34. 1.64. 1.94	2.33. 2.63. 2.13	3.33. 3.63. 3.43
24	1.35. 1.65. 1.95	2.34. 2.64. 2.14	3.34. 3.64. 3.44

25	1.36. 1.66. 1.16	2.35. 2.55. 2.15	3.35. 3.65. 3.15
26	1.37. 1.67. 1.17	2.36. 2.66. 2.16	3.36. 3.66. 3.16
27	1.38. 1.68. 1.18	2.37. 2.67. 2.17	3.37. 3.67. 3.17
28	1.39. 1.69. 1.19	2.38. 2.28. 2.18	3.38. 3.68. 3.18
29	1.40. 1.70. 1.20	2.39. 2.29. 2.19	3.39. 3.69. 3.19
30	1.41. 1.71 1.21	2.40. 2.30. 2.20	3.40. 3.70. 3.20
Вар. №	4.Динамика вращательного движения	5.Гравитацион-ное поле	6.Колебания
1	4.09. 4.39. 4.59	5.12. 5.42. 5.72	6.12. 6.42. 6.72
2	4.10. 4.40. 4.60	5.13. 5.43. 5.73	6.13. 6.43. 6.73
3	4.11. 4.41. 4.61	5.14. 5.44 5.74	6.14. 6.44 6.74
4	4.12. 4.42. 4.62	5.15. 5.45. 5.75	6.15. 6.45. 6.75
5	4.13. 4.43. 4.63	5.16. 5.46. 5.76	6.16. 6.46. 6.76
6	4.14. 4.44 4.64	5.17. 5.47. 5.77	6.17. 6.47. 6.77
7	4.15. 4.45. 4.65	5.18. 5.48. 5.58	6.18. 6.48. 6.78
8	4.16. 4.46. 4.66	5.19. 5.49. 5.59	6.19. 6.49. 6.79
9	4.17. 4.47. 4.67	5.20. 5.50. 5.60	6.20. 6.50. 6.80
10	4.18. 4.48. 4.68	5.21. 5.51. 5.61	6.21. 6.51. 6.81
11	4.19. 4.49. 4.69	5.22. 5.52. 5.62	6.22. 6.52. 6.82
12	4.20. 4.50. 4.70	5.23. 5.53. 5.63	6.23. 6.53. 6.83
13	4.21. 4.51. 4.71	5.24. 5.54. 5.64	6.24. 6.54. 6.84
14	4.22. 4.52. 4.72	5.25. 5.55. 5.65	6.25. 6.55. 6.85
15	4.23. 4.53. 4.33	5.26. 5.56. 5.66	6.26. 6.56. 6.36
16	4.24. 4.54. 4.34	5.27. 5.57. 5.67	6.27. 6.57. 6.37
17	4.25. 4.55. 4.35	5.28. 5.58. 5.68	6.28. 6.58. 6.38
18	4.26. 4.56. 4.36	5.29. 5.59. 5.69	6.29. 6.59. 6.39
19	4.27. 4.57. 4.37	5.30. 5.60. 5.70	6.30. 6.60 6.40
20	4.28. 4.58. 4.38	5.31. 5.61. 5.71	6.31. 6.61. 6.41

21	4.29. 4.59. 4.39	5.32. 5.62. 5.72	6.32. 6.62. 6.12
22	4.30. 4.60. 4.40	5.33. 5.63. 5.73	6.33. 6.63. 6.13
23	4.31. 4.61. 4.41	5.34. 5.64. 5.74	6.34. 6.64. 6.14
24	4.32. 4.62. 4.42	5.35. 5.65. 5.75	6.35. 6.65. 6.15
25	4.33. 4.63. 4.43	5.36. 5.66. 5.76	6.36. 6.66. 6.16
26	4.34. 4.64. 4.44	5.37. 5.67. 5.77	6.37. 6.67. 6.17
27	4.35. 4.65. 4.15	5.38. 5.68. 5.18	6.38. 6.68. 6.18
28	4.36. 4.66. 4.16	5.39. 5.69. 5.19	6.39. 6.69. 6.19
29	4.37. 4.67. 4.17	5.40. 5.70. 5.20	6.40. 6.70. 6.20
30	4.38. 4.68. 4.18	5.41. 5.71 5.21	6.41. 6.71 6.21
Вар. №	7.Элементы СТО		
1	7.08. 7.38. 7.58		
2	7.09. 7.39. 7.49		
3	7.10. 7.40. 7.50		
4	7.11. 7.41. 7.51		
5	7.12. 7.42. 7.52		
6	7.13. 7.43. 7.53		
7	7.14. 7.44 7.54		
8	7.15. 7.45. 7.55		
9	7.16. 7.46. 7.56		
10	7.17. 7.47. 7.57		
11	7.18. 7.48. 7.58		
12	7.19. 7.49. 7.39		
13	7.20. 7.50. 7.40		
14	7.21. 7.51. 7.41		
15	7.22. 7.52. 7.42		
16	7.23. 7.53. 7.43		
17	7.24. 7.54. 7.44		

18	7.25. 7.55. 7.45		
19	7.26. 7.56. 7.46		
20	7.27. 7.57. 7.47		
21	7.28. 7.58. 7.48		
22	7.29. 7.49. 7.19		
23	7.30. 7.50. 7.20		
24	7.31. 7.51. 7.21		
25	7.32. 7.52. 7.42		
26	7.33. 7.53. 7.43		
27	7.34. 7.54. 7.44		
28	7.35. 7.55. 7.15		
29	7.36. 7.56. 7.16		
30	7.37. 7.57. 7.17		

Задачи, рекомендуемые для дополнительных занятий

1.Кинематика	1.18, 1.29, 1.46, 1.62, 1.72, 1.77, 1.81, 1.82
2.Динамика точки	2.11, 2.12, 2.17, 2.26
3.Динамика системы	3.11, 3.20, 3.28, 3.38, 3.39, 3.45, 3.49, 3.54, 3.67
4.Динамика вращательного движения	4.9, 4.14, 4.20, 4.21, 4.28, 4.38, 4.57, 4.70
5.Гравитационное поле	5.13, 5.14, 5.31, 5.34, 5.63
6.Колебания	6.12, 6.14, 6.29, 6.33, 6.48, 6.52, 6.61, 6.65
7.Элементы СТО	7.11, 7.17, 7.25, 7.27, 7.33, 7.44

Литература

1.*Анисимов В.М., Лаушкина Л.А., Третьякова О.Н*
Физика в задачах /Под ред. *О.Н.Третьяковой* - М.: Вузовская книга, 2002. -240с.
2.*АнисимовВ.М., Лаушкина Л.А., Солохина Г.Э., Третьякова О.Н.* Решение задач по механике, молекулярной физике и термодинамике. - М.: Изд-во МАИ, 1996. - 104 с.
3. *Анисимов В.М., Солохина Г.Э.* Лабораторные работы по физике. Механика. Молекулярная физика и термодинамика/ Под ред. *Г.Г. Спирина* - М.: Изд-во МАИ, 1998. -224с.
4.*Беликов Б.С., Михеев Н.И.* Решение задач по физике. Пособие для самостоятельной работы студентов. Ч.2.- М.: Изд-во МАИ, 1995. -243с.
5.*Иродов И.Е*. Задачи по общей физики .2-е изд. - М.: Наука, 1988. - 416с.
6.*Демков В.П., Третьякова О.Н.* Физика. Теория. Методика. Задачи. - М.: Высшая школа, 2001. - 669 с.
7.*Демков В.П., Третьякова О.Н.* Физика. Механика. 3-е изд., перераб. - М.: Изд-во МАИ, 2000. - 420с.
8.*Демков В.П., Третьякова О.Н*. Физика. Геометрическая и волновая оптика. Элементы теории относительности. Квантовая физика. Физика атома. Физика атомного ядра. 3-е изд., перераб. - М.: Изд-во МАИ, 2000. –216с.
9.*Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б.* Курс физики Т.1. 4-е изд. - М.: Высшая школа, 1973. –348с.
10.*Савельев И.В.* Курс общей физики Т.1. 3-е изд. - М.: Наука. 1987. - 432с.
11.*Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. 5-е изд. -М: Высшая школа, 1988. - 527с.

Оглавление