И. В. МЕЩЕРСКИЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Под редакцией

Н. В. БУТЕНИНА, А. И. ЛУРЬЕ, Д. Р. МЕРКИНА

ИЗДАНИЕ ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

531
М 56
УДК 531.1 (076.1)

Сборник задач по теоретической механике, Мещерский И. В., изд. 34, стереотипное, М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

В сборнике содержится 1744 задачи на все разделы курса теоретической механики, читаемого во втузах по разным программам.
Рис. 974.

$М \frac{20302-070}{053\ (02)\text{-}75}$ 146-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРИДЦАТЬ ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

«Сборник задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, составленный первоначально по мысли и под редакцией И. В. Мещерского группой преподавателей теоретической механики б. Петербургского политехнического института как пособие для преподавания механики в этом институте, постепенно получил самое широкое распространение как в нашей стране, так и за ее пределами. Начиная с 1914 г., когда вышло первое издание «Сборника», он переиздавался только в нашей стране тридцать один раз; первому печатному изданию предшествовало еще несколько литографированных изданий.

Одна из основных причин успеха и распространения «Сборника» заключается в том, что в нем подобраны задачи, имеющие конкретную форму, дающие возможность студентам приобрести необходимые для них навыки в применении общих теорем и методов к решению конкретных прикладных вопросов.

«Сборник» неоднократно перерабатывался.

Составителями задач, помещенных в первом издании «Сборника» 1914 г., были: Л. В. Ассур, Б. А. Бахметьев, И. И. Бентковский, А. А. Горев, К. М. Дубяга, А. М. Ларионов, И. В. Мещерский, В. Ф. Миткевич, Е. Л. Николаи, К. Э. Рерих, Д. Л. Тагеев, В. В. Таклинский, С. П. Тимошенко, А. И. Тудоровский, А. П. Фан-дер-Флит, А. К. Федерман, В. Д. Шатров и другие. В последующих изданиях приняли участие также Е. К. Митропольский и М. Л. Франк.

В подготовке одиннадцатого переработанного издания принимали участие М. И. Акимов, М. И. Бать, Б. А. Берг, Н. К. Горчин, Ю. В. Долголенко, А. С. Кельзон, Ю. Г. Корнилов, А. И. Лурье, К. В. Меликов, Н. Н. Наугольная, П. И. Нелюбин, Н. П. Неронов, Е. Л. Николаи, В. Ф. Пекин, П. Н. Семенов, А. А. Смирнов, С. А. Сороков, К. И. Страхович, А. И. Чекмарев и Ф. Г. Шмидт.

Две существенные переработки осуществлены в четырнадцатом и шестнадцатом изданиях. Работа по подготовке обоих изданий была выполнена коллективом кафедры теоретической механики Ленинградского политехнического института. Составили новые задачи и редактировали: отдел статики — С. А. Сороков, кинематики — Н. Н. Наугольная и А. С. Кельзон, динамики материальной точки — А. С. Кельзон, динамики системы — М. И. Бать, уравнений Лагранжа и теории колебаний — Г. Ю. Джанелидзе. Общее редактирование осуществил А. И. Лурье. Кроме упомянутых лиц, для четырнадцатого издания предоставили новые задачи Н. С. Вабищевич, Н. И. Идельсон, В. Л. Кан, А. И. Холодняк, А. И. Цымлов и Н. А. Докучаев.

Развитие науки и техники за последние десятилетия вызвало необходимость новой переработки «Сборника» (последняя, наиболее существенная переработка была осуществлена в 1949 г. в шестнадцатом издании).

В настоящем тридцать втором издании сделана попытка, не выходя за рамки теоретической механики, отразить в какой-то степени новые проблемы техники и более полно охватить те вопросы классической механики, которые не нашли до сих пор достаточного освещения.

В связи с этим в «Сборник» введены новые разделы, содержащие задачи по пространственной ориентации, динамике космического полета, нелинейным колебаниям, геометрии масс, аналитической механике. Одновременно существенно дополнены новыми задачами разделы кинематики точки, кинематики относительного движения и плоского движения твердого тела, динамики материальной точки и системы, динамики точки и системы переменной массы, устойчивости движения. Небольшое количество новых задач введено также почти во все другие разделы «Сборника»; некоторые задачи исключены из него. Сделаны также небольшие перестановки в размещении материала. В конце «Сборника» в качестве добавления приведена Международная система единиц (СИ). Настоящее издание «Сборника» содержит 1744 задачи, тогда как в предыдущем было 1363 задачи.

Введена новая, двойная нумерация задач — первое число означает номер параграфа, второе — номер задачи в этом параграфе. Для облегчения пользования старыми изданиями «Сборника», имеющимися в большом числе в библиотеках учебных заведений, в скобках указывается номер, который имела задача в шестнадцатом — тридцать первом изданиях (естественно, что вновь помещенные задачи снабжены одним номером).

Работа по подготовке настоящего издания выполнена группой преподавателей высших учебных заведений г. Ленинграда. Составили новые задачи и подготовили к печати: отдел статики — Д. Р. Меркин, отдел кинематики — М. И. Бать (§§ 15—18), А. С. Кельзон (§§ 21—25) и Д. Р. Меркин (§§ 10—14 и 19—20), отдел динамики материальной точки — А. С. Кельзон, отдел динамики материальной системы — М. И. Бать (§§ 34—44) и Н. В. Бутенин (§ 45), отдел аналитической механики — М. И. Бать (§§ 46, 47) и Д. Р. Меркин (§§ 48, 49), отдел динамики космического полета — Д. Р. Меркин, отдел теории колебаний и устойчивости движения — Н. В. Бутенин.

Кроме вышеупомянутых лиц для настоящего издания предоставили новые задачи М. З. Коловский, И. Е. Лившиц и Б. А. Смольников.

Считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессорам Г. Ю. Степанову и В. Н. Щелкачеву и возглавляемым ими коллективам кафедр за ценные замечания и советы, позволившие улучшить «Сборник».

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА I

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

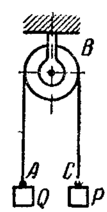
§ 1. Силы, действующие по одной прямой

1.1 (3). Две гири, в 10 *н* и 5 *н*, висящие на одной веревке, укреплены на ней в разных местах, причем бо́льшая гиря висит ниже меньшей. Каково натяжение веревки?

Ответ: 10 *н* и 15 *н*.

1.2 (5). Буксир тянет три баржи различных размеров, следующие одна за другой. Сила тяги винта буксира в данный момент равна 1800 *кГ*. Сопротивление воды движению буксира равно 600 *кГ*; сопротивление воды движению первой баржи — 600 *кГ*, второй баржи — 400 *кГ* и третьей — 200 *кГ*. Имеющийся в распоряжении канат выдерживает безопасно растягивающую силу в 200 *кГ*. Сколько канатов надо протянуть от буксира к первой барже, от первой ко второй и от второй к третьей, если движение — прямолинейное и равномерное?

Ответ: 6, 3 и 1 канат.



К задаче 1.3.

1.3 (6). Груз $Q=30$ *н* удерживается в равновесии при помощи противовеса, прикрепленного к концу троса ABC, перекинутого через блок. Вес троса 5 *н*. Определить, пренебрегая жесткостью троса, трением и радиусом блока, вес P и усилия F_A, F_C, растягивающие трос в его концах A и C, а также усилие F_B в среднем сечении B троса в случаях:

1) когда точки A и C находятся на одной высоте;
2) когда точка A занимает высшее положение;
3) когда точка A занимает низшее положение.

Ответ: 1) $P=30$ *н*; $F_A=30$ *н*; $F_B=32{,}5$ *н*; $F_C=30$ *н*;
2) $P=25$ *н*; $F_A=30$ *н*; $F_B=27{,}5$ *н*; $F_C=25$ *н*;
3) $P=35$ *н*; $F_A=30$ *н*; $F_B=32{,}5$ *н*; $F_C=35$ *н*.

1.4 (7). На дне шахты находится человек весом 64 *кГ*; посредством каната, перекинутого через неподвижный блок, человек удерживает груз в 48 *кГ*. 1) Какое давление оказывает человек на дно шахты? 2) Какой наибольший груз он может удержать с помощью каната?

Ответ: 1) 16 *кГ*; 2) 64 *кГ*.

1.5 (8). Поезд идет по прямолинейному горизонтальному пути с постоянной скоростью; вес поезда, не считая электровоза, 1200 *т*. Какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Ответ: 6 *т*.

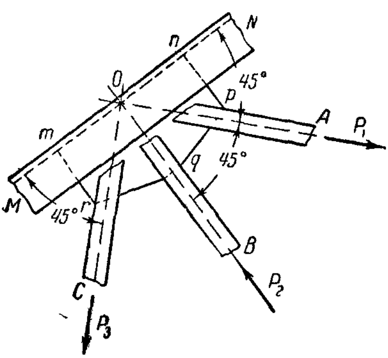
1.6. Пассажирский поезд состоит из электровоза, багажного вагона весом 40 *т* и 10 пассажирских вагонов весом 50 *т* каждый. С какой силой будут натянуты вагонные стяжки и какова сила тяги электровоза, если сопротивление движению поезда равно 0,005 его веса? При решении задачи принять, что сопротивление движению распределяется между составом поезда пропорционально весу и что движение поезда равномерное.

Ответ: Сила тяги электровоза 2,7 *т*, $T_{11} = 0{,}25$ *т*, $T_{10} = 2 \cdot 0{,}25$ *т* и т. д. (нижний индекс означает номер вагона, начиная от электровоза).

§ 2. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

2.1 (11). В центре правильного шестиугольника приложены силы 1, 3, 5, 7, 9 и 11 *н*, направленные к его вершинам. Найти величину и направление равнодействующей и уравновешивающей.

Ответ: 12 *н*; направление уравновешивающей противоположно направлению заданной силы в 9 *н*.



К задаче 2.2.

2.2 (12). Определить усилие, передаваемое листом *mnpqr* на стержень *MN*, если усилия, действующие по линиям *OA*, *OB* и *OC*, равны: $P_1 = P_3 = 141$ *н* и $P_2 = 100$ *н*.

Направления усилий показаны на чертеже.

Ответ: 100 *н* и действует по *OB* в сторону, обратную P_2.

2.3 (13). Силу в 8 *н* разложить на две по 5 *н* каждая. Можно ли ту же силу разложить на две по 10 *н*, 15 *н*, 20 *н* и т. д.? На две по 100 *н*?

Ответ: Да, если не заданы направления разложения.

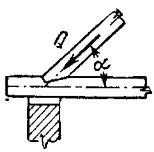
2.4 (14). По направлению стропильной ноги, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 45°$, действует сила $Q = 250$ *кГ*. Какое усилие S возникает при этом по направлению горизонтальной затяжки и какая сила N действует на стену по отвесному направлению?

Ответ: $S = N = 177$ *кГ*.

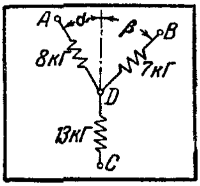
2.5 (15). Два трактора, идущих по берегам прямого канала с постоянной скоростью, тянут барку при помощи двух канатов.

Силы натяжения канатов равны 80 *кГ* и 96 *кГ*; угол между ними равен 60°. Найти сопротивление воды P, испытываемое баркой при ее движении, и углы α и β, которые должны составлять канаты с берегами канала, если барка движется параллельно берегам.

Ответ: $P = 153$ *кГ*; $\alpha = 33°$; $\beta = 27°$.



К задаче 2.4.



К задаче 2.6.

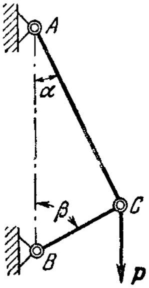
2.6 (16). Кольца A, B и C трех пружинных весов укреплены неподвижно на горизонтальной доске. К крючкам весов привязаны три веревки, которые натянуты и связаны в один узел D. Показания весов: 8, 7 и 13 *кГ*. Определить углы α и β, образуемые направлениями веревок, как указано на чертеже.

Ответ: $\alpha = 27{,}8°$; $\beta = 32{,}2°$.

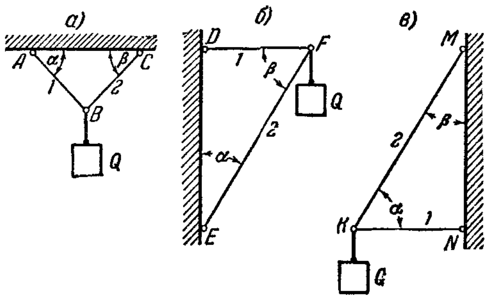
2.7 (17). Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила $P = 1000$ *н*.

Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C, если углы, составляемые стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$.

Ответ: 866 *н*; 500 *н*.



К задаче 2.7.



К задаче 2.8.

2.8 (18). На чертежах *а*, *б* и *в*, как и в предыдущей задаче, схематически изображены стержни, соединенные между собой, с потолком и стенами посредством шарниров. К шарнирным болтам B, F и K подвешены грузы $Q = 1000$ *кГ*.

Определить усилия в стержнях для случаев:

а) $\alpha = \quad \beta = 45°$;

б) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$;

в) $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

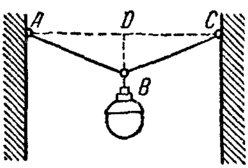
Ответ: а) $S_1 = S_2 = 707$ *кГ*; б) $S_1 = 577$ *кГ*; $S_2 = -1154$ *кГ* [1]); в) $S_1 = -577$ *кГ*; $S_2 = 1154$ *кГ*.

2.9 (19). *Уличный* фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC, прикрепленного концами к крюкам A и C, находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC, если вес фонаря равен 15 *кГ*, длина всего троса ABC равна 20 *м* и отклонение точки его подвеса от горизонтали $BD = 0{,}1$ *м*. Весом троса пренебречь.

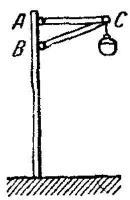
Ответ: $T_1 = T_2 = 750$ *кГ*.

2.10 (20). *Уличный* фонарь весом 30 *кГ* подвешен к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $AC = 1{,}2$ *м* и подкоса $BC = 1{,}5$ *м*. Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AC и BC, считая крепления в точках A, B и C шарнирными.

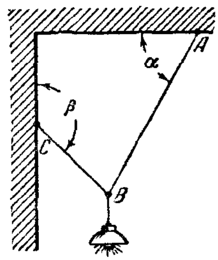
Ответ: $S_1 = 40$ *кГ*; $S_2 = -50$ *кГ*.



К задаче 2.9.



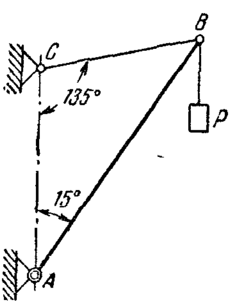
К задаче 2.10.



К задаче 2.11.

2.11 (21). Электрическая лампа весом 2 *кГ* подвешена к потолку на шнуре AB и затем оттянута к стене веревкой BC. Определить натяжения: T_A шнура AB и T_C веревки BC, если известно, что угол $\alpha = 60°$, а угол $\beta = 135°$. Весами шнура и веревки пренебречь.

Ответ: $T_A = 1{,}46$ *кГ*; $T_C = 1{,}04$ *кГ*.



К задаче 2.12.

2.12 (22). Мачтовый кран состоит из стрелы AB, прикрепленной шарниром A к мачте, и цепи CB. К концу B стрелы подвешен груз $P = 200$ *кГ*; углы $BAC = 15°$, $ACB = 135°$. Определить натяжение T цепи CB и усилие Q в стреле AB.

Ответ: $T = 104$ *кГ*; $Q = 283$ *кГ*.

2.13 (23). На одной железной дороге, проведенной в горах, участок пути в ущелье подвешен так, как показано на чертеже. Предполагая подвеску AB *нагруженной силой* $P = 50$ *т*, *найти усилия в стержнях* AC и AD.

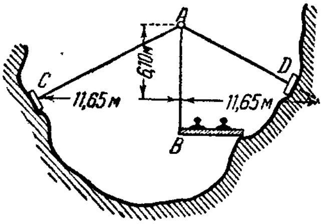
Ответ: Стержни AC и AD сжаты одинаковым усилием 53,9 *т*.

2.14 (24). Через два блока A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой $AB = l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам

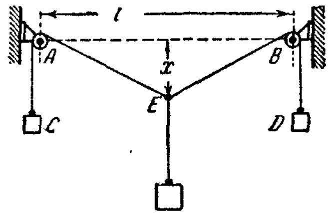
[1]) Знак минус показывает, что стержень сжат.

C и D веревки подвешены гири весом p каждая, а к точке E — гиря весом P. Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние x точки E от прямой AB в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.

Ответ: $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.



К задаче 2.13.



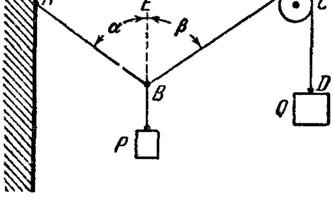
К задаче 2.14.

2.15 (25). Груз весом 25 *н* удерживается в равновесии двумя веревками, перекинутыми через блоки и натягиваемыми грузами. Один из этих грузов весит 20 *н*; синус угла, образуемого соответствующей веревкой с вертикалью, равен 0,6. Пренебрегая трением на блоках, определить величину p второго груза и угол α, образуемый второй веревкой с вертикальной линией. Весом веревок пренебречь.

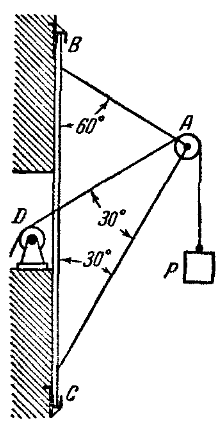
Ответ: $p = 15$ *н*; $\sin\alpha = 0{,}8$.

2.16 (26). К веревке AB, один конец которой закреплен в точке A, привязаны в точке B груз P и веревка BCD, перекинутая через блок; к концу ее D привязана гиря Q весом 10 *кГ*. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение T веревки AB и величину груза P, если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью BE, равны: $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

Ответ: $T = 12{,}2$ *кГ*; $P = 13{,}7$ *кГ*.



К задаче 2.16.



К задаче 2.17.

2.17 (27). Груз $P = 2$ *т* поднимается магазинным краном BAC посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D, который укреплен на стене так, что угол $CAD = 30°$. Углы между стержнями крана: $ABC = 60°$, $ACB = 30°$. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях AB и AC.

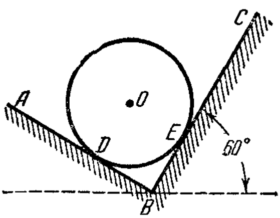
Ответ: $Q_1 = 0$; $Q_2 = -3{,}46$ *т*.

2.18 (28). На двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостях AB и BC лежит однородный шар O весом 6 *кГ*. Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляет с горизонтом угол 60°.

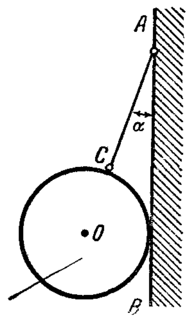
Ответ: $N_D = 5{,}2$ *кГ*; $N_E = 3$ *кГ*.

2.19 (29). К вертикальной гладкой стене AB подвешен на тросе AC однородный шар O. Трос составляет со стеной угол α, вес шара P. Определить натяжение троса T и давление Q шара на стену.

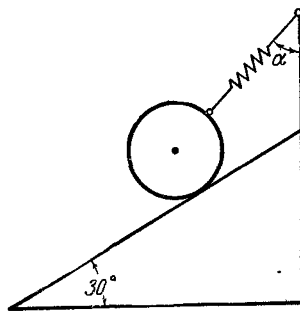
Ответ: $T = \dfrac{P}{\cos\alpha}$;
$Q = P\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



К задаче 2.18.



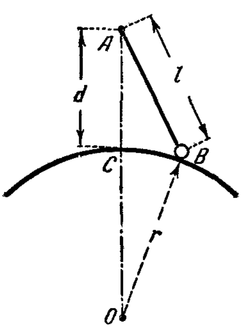
К задаче 2.19.



К задаче 2.20.

2.20 (30). Однородный шар весом 20 *кГ* удерживается на гладкой наклонной плоскости тросом, который привязан к пружинным весам, укрепленным над плоскостью; показание пружинных весов 10 *кГ*. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Определить угол α, составляемый направлением троса с вертикалью, и давление Q шара на плоскость. Весом пружинных весов пренебречь.

Ответ: $\alpha = 60°$; $Q = 17{,}3$ *кГ*.



К задаче 2.21.

2.21 (31). Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиуса r; расстояние точки A от поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь.

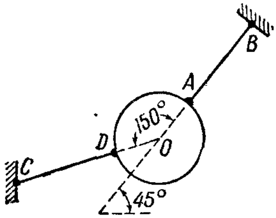
Ответ: $T = P\dfrac{l}{d+r}$; $Q = P\dfrac{r}{d+r}$.

2.22 (32). Однородный шар весом 10 *н* удерживается в равновесии двумя тросами AB и CD, расположенными в одной вертикальной плоскости и составляющими один с другим угол 150°. Трос AB наклонен к горизонту под углом 45°. Определить натяжение тросов.

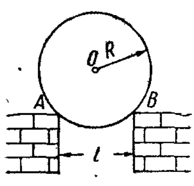
Ответ: $T_B = 19{,}3$ *н*; $T_C = 14{,}1$ *н*.

2.23 (33). Котел с равномерно распределенным по длине весом $P = 4$ *т* и радиусом $R = 1$ *м* лежит на выступах каменной кладки. Расстояние между стенками кладки $l = 1{,}6$ *м*. Пренебрегая трением, найти давление котла на кладку в точках A и B.

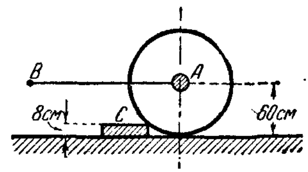
Ответ: $N_A = N_B = 3{,}33$ *т*.



К задаче 2.22.



К задаче 2.23.



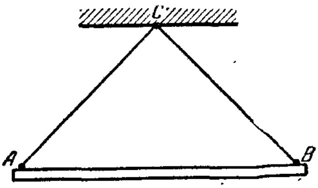
К задаче 2.24.

2.24 (34). Вес однородного трамбовочного катка равен 2 *т*, радиус его 60 *см*. Определить горизонтальное усилие P, необходимое для перетаскивания катка через каменную плиту высотою 8 *см*, в положении, указанном на чертеже.

Ответ: $P = 1{,}15$ *т*.

2.25 (35). Однородный стержень AB весом в 16 *кГ*, длиной 1,2 *м* подвешен в точке C на двух тросах AC и CB одинаковой длины, равной 1 *м*. Определить натяжения тросов.

Ответ: Натяжение каждого троса равно 10 *кГ*.

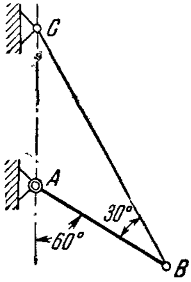


К задаче 2.25.

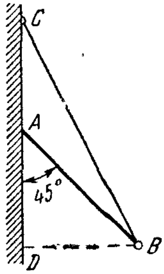
2.26 (36). Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом 60° к вертикали при помощи троса BC, образующего с ним угол 30°. Определить величину и направление реакции R шарнира, если известно, что вес стержня равен 2 *кГ*.

Ответ: $R = 1$ *кГ*; угол $(R, AC) = 60°$.

2.27 (37). Верхний конец A однородного бруса AB, длина которого 2 *м*, а вес 5 *кГ*, упирается в гладкую вертикальную стену. К нижнему концу B привязан трос BC. Найти, на каком расстоянии AC нужно прикрепить трос к стене для того, чтобы брус находился в равновесии, образуя угол $BAD = 45°$. Найти натяжение T троса и реакцию R стены.



К задаче 2.26.



К задаче 2.27.

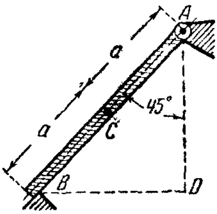
Ответ: $AC = AD = 1{,}41$ *м*; $T = 5{,}6$ *кГ*; $R = 2{,}5$ *кГ*.

2.28 (38). Оконная рама AB, изображенная на чертеже в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира A и своим нижним краем B свободно опирается на уступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный 89 *кГ*, приложен к середине C рамы и $AD = BD$.

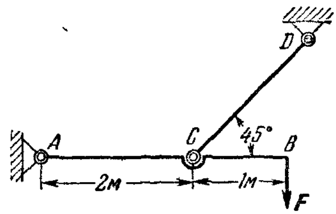
Ответ: $R_A = 70{,}4$ *кГ*; $R_B = 31{,}5$ *кГ*.

2.29 (39). Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD; крепления в A, C и D — шарнирные. Определить реакции опор A и D, если на конце балки действуют вертикальная сила $F = 5$ *т*. Размеры указаны на чертеже. Весом пренебречь.

Ответ: $R_A = 7{,}9$ *т*; $R_D = 10{,}6$ *т*.



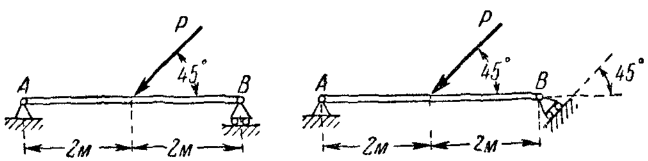
К задаче 2.28.



К задаче 2.29.

2.30 (40). Балка AB шарнирно закреплена на опоре A, у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P = 2$ *т*. Определить реакции опор для случаев *а* и *б*, взяв размеры с чертежей и пренебрегая весом балки.

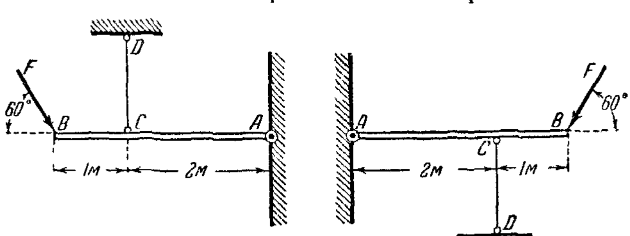
Ответ: а) $R_A = 1{,}58$ *т*; $R_B = 0{,}71$ *т*; б) $R_A = 2{,}24$ *т*; $R_B = 1$ *т*.



а) б)

К задаче 2.30.

2.31 (41). На чертежах изображены балки AB, удерживаемые в горизонтальном положении вертикальными стержнями CD. На концах



а) б)

К задаче 2.31.

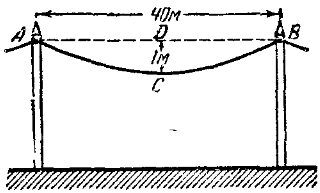
балок действуют силы $F = 3$ *т* под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с чертежей, определить усилия S в стержнях CD и давления Q балок на стену, если крепления в A, C и D шарнирные. Весом стержней и балок пренебречь.

Ответ: а) $S=3{,}9$ *т*; $Q=1{,}98$ *т*; б) $S=3{,}9$ *т*; $Q=1{,}98$ *т*.

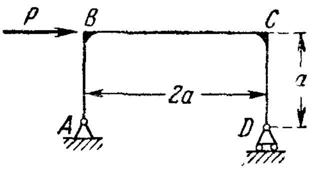
2.32 (42). Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой $CD=f=1$ *м*. Расстояние между столбами $AB=l=40$ *м*. Вес провода $Q=40$ *кГ*. Определить натяжения провода: T_C в средней точке, T_A и T_B на концах.

При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от ближайшего столба.

Ответ: $T_C=\frac{Ql}{8f}=200$ *кГ*; $T_A=T_B=201$ *кГ*.



К задаче 2.32.



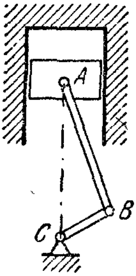
К задаче 2.33.

2.33 (43). Для рамы, изображенной на чертеже, определить опорные реакции R_A и R_D, возникающие при действии горизонтальной силы P, приложенной в точке B. Весом рамы пренебречь.

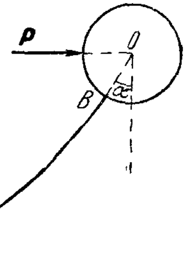
Ответ: $R_A=P\frac{\sqrt{5}}{2}$, $R_D=\frac{P}{2}$.

2.34. В двигателе внутреннего сгорания площадь поршня равна 200 *см*², длина шатуна $AB=30$ *см*, длина кривошипа $BC=6$ *см*. Давление газа в данный момент за поршнем равно $P_1=10$ *кГ/см*², перед поршнем $P_2=2$ *кГ/см*². Найти силу T, действующую со стороны шатуна AB на кривошип BC, вызванную перепадом давлений газа, если угол $ABC=90°$. Трением между поршнем и цилиндром пренебречь.

Ответ: $T=1{,}6$ *т*.



К задаче 2.34.

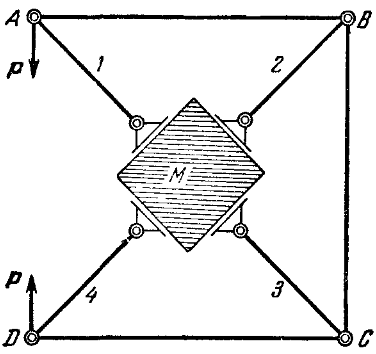


К задаче 2.35.

2.35. Воздушный шар, вес которого равен G, удерживается в равновесии тросом BC. На шар действуют подъемная сила Q и горизонтальная сила давления ветра, равная P. Определить натяжение троса в точке B и угол α.

Ответ: $T=\sqrt{P^2+(Q-G)^2}$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{P}{Q-G}$.

2.36 (45). Для сжатия цементного кубика M по четырем граням пользуются шарнирным механизмом, в котором стержни AB, BC и CD совпадают со сторонами квадрата $ABCD$, а стержни 1, 2, 3, 4 равны между собой и направлены по диагоналям того же квадрата; две равные по модулю силы P прикладываются к точкам A и D, как показано на рисунке. Определить силы N_1, N_2, N_3, N_4, сжимающие кубик, и усилия S_1, S_2, S_3 в стержнях AB, BC и CD, если величина сил, приложенных в точках A и D, равна 5 *т*.

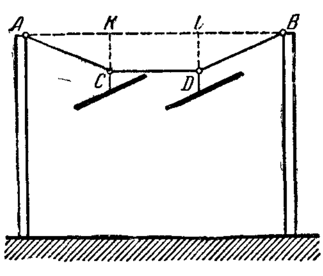


К задаче 2.36.

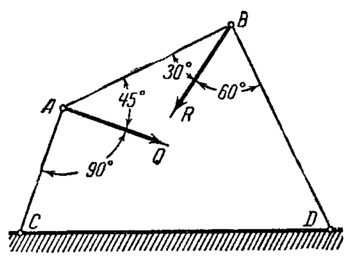
Ответ: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 7{,}07$ *т*. Растягивающие усилия: $S_1 = S_2 = S_3 = 5$ *т*.

2.37 (46). Два трамвайных провода подвешены к поперечным проволочным канатам, из которых каждый прикреплен к двум столбам. Столбы расставлены вдоль пути на расстоянии 40 *м* друг от друга. Для каждого поперечного каната расстояния $AK = KL = LB = 5$ *м*; $KC = LD = 0{,}5$ *м*. Пренебрегая весом проволочного каната, найти натяжения T_1, T_2 и T_3 в частях его AC, CD и DB, если вес 1 *м* провода равен 0,75 *кГ*.

Ответ: $T_1 = T_3 = 301{,}5$ *кГ*; $T_2 = 300$ *кГ*.



К задаче 2.37.



К задаче 2.38.

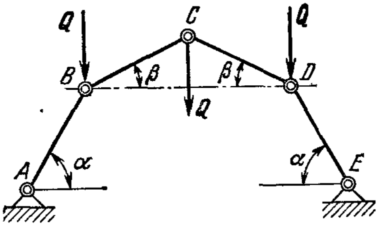
2.38 (47). К шарниру A стержневого шарнирного четырехугольника $ABDC$, сторона CD которого закреплена, приложена сила $Q = 100$ *н* под углом $BAQ = 45°$. Определить величину силы R, приложенной в шарнире B под углом $ABR = 30°$ таким образом, чтобы четырехугольник $ABDC$ был в равновесии, если углы: $CAQ = 90°$, $DBR = 60°$.

Ответ: $R = 163$ *н*.

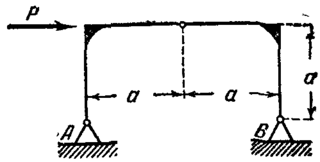
2.39 (48). Стержневой шарнирный многоугольник состоит из четырех равных стержней; концы A и E шарнирно закреплены;

узлы B, C и D нагружены одинаковой вертикальной нагрузкой Q. В положении равновесия угол наклона крайних стержней к горизонту $\alpha = 60°$. Определить угол β наклона средних стержней к горизонту.

Ответ: $\beta = 30°$.



К задаче 2.39.



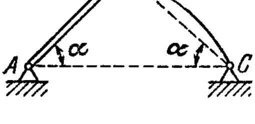
К задаче 2.40.

2.40 (50). Для трехшарнирной арки, показанной на чертеже, определить реакции опор A и B, возникающие при действии горизонтальной силы P. Весом арки пренебречь.

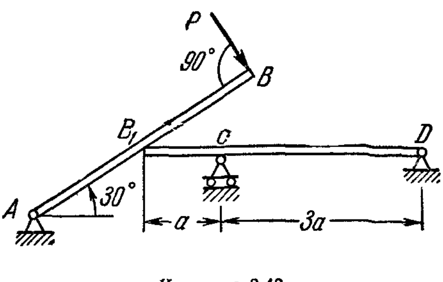
Ответ: $R_A = R_B = P\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.41 (51). Прямолинейный однородный брус AB весом P и невесомый стержень BC с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке B и так же соединены с опорами A и C, расположенными на одной горизонтали AC. Прямые AB и BC образуют с прямой AC углы $\alpha = 45°$. Определить реакции опор A и C.

Ответ: $R_A = \dfrac{\sqrt{10}}{4}P$; $R_C = \dfrac{\sqrt{2}}{4}P$.



К задаче 2.41.



К задаче 2.42.

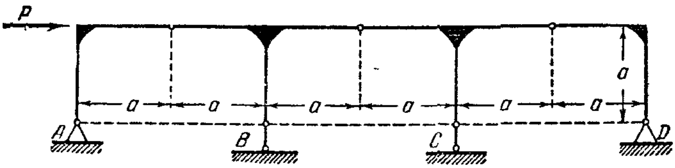
2.42. Наклонная балка AB, на конец которой действует сила P, серединой B_1 опирается на ребро консоли балки CD. Определить опорные реакции, пренебрегая весом балок.

Ответ: $R_A = P$; $R_C = 4P/\sqrt{3}$; $R_D = 2P/\sqrt{3}$.

2.43 (52). Дана система, состоящая из четырех арок, размеры которых указаны на чертеже.

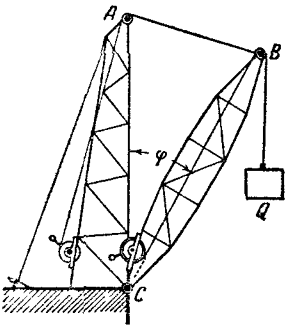
Определить реакции опор A, B, C и D, возникающие при действии горизонтальной силы P.

Ответ: $R_A = P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_B = P$; $R_C = P$; $R_D = P\frac{\sqrt{2}}{2}$.



К задаче 2.43.

2.44 (53). Кран состоит из неподвижной башни AC и подвижной фермы BC, которая имеет шарнир C и удерживается тросом AB. Груз $Q = 40$ *т* висит на цепи, перекинутой через блок в точке B и идущей к вороту по прямой BC. Длина $AC = BC$. Определить, пренебрегая весом фермы и трением на блоке, натяжение T троса AB и силу P, сжимающую ферму по прямой BC, как функции угла $ACB = \varphi$.

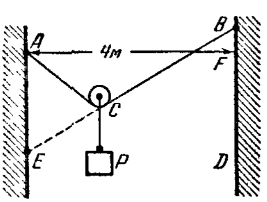


К задаче 2.44.

Ответ: $T = 80 \sin\frac{\varphi}{2}$ *т*; $P = 80$ *т* независимо от угла φ.

2.45 (54). Блок C с грузом $P = 18$ *н* может скользить вдоль гибкого троса ACB, концы которого A и B прикреплены к стенам. Расстояние между стенами 4 *м*; длина троса 5 *м*. Определить натяжение троса при равновесии блока с грузом, пренебрегая весом троса и трением блока о трос.

Натяжения частей троса AC и CB одинаковы; их величина может быть определена из подобия треугольника сил и равнобедренного треугольника, одна из боковых сторон которого есть прямая BCE, а основание лежит на вертикали BD.

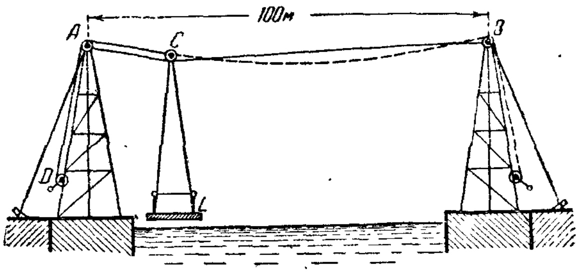


К задаче 2.45.

Ответ: 15 *н* независимо от высоты BF.

2.46 (55). Для переправы через реку устроена люлька L, которая посредством ролика C подвешена к стальному тросу AB, закрепленному в вершинах башен A и B. Для передвижения ролика C к левому берегу служит канат CAD, перекинутый через блок A и наматываемый на ворот D; такой же канат имеется для подтягивания люльки к правому берегу. Точки A и B находятся на одной горизонтали на расстоянии $AB = 100$ *м* одна от другой; длина троса ACB равна 102 *м*; вес люльки 5 *т*. Пренебрегая весом канатов и троса, а также трением ролика о трос, определить натяжение каната CAD и натяжение троса ACB в тот момент, когда длина ветви $AC = 20$ *м*.

Ответ: $S_{CAD} = 0{,}75$ *т*; $S_{CB} = S_{CA} = 9{,}56$ *т*.

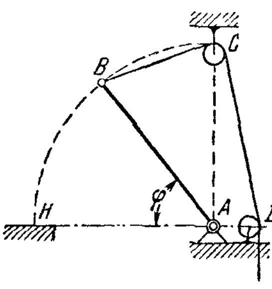


К задаче 2.46.

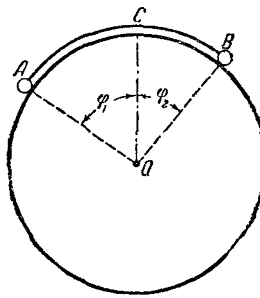
2.47 (56). Оконная рама AB, изображенная на чертеже в разрезе, весом 100 *кГ*, открывается, вращаясь вокруг горизонтальной оси A, при помощи шнура BCD, огибающего блоки C и D. Блок C, размерами которого пренебрегаем, и точка A лежат на одной вертикали; *вес рамы приложен в ее середине; трением также пренебрегаем.* Найти натяжение T шнура в зависимости от угла φ, образуемого рамой AB с горизонталью AH, предполагая $AB = AC$, а также наибольшее и наименьшее значения этого натяжения.

Ответ: $T = 100 \sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$ *кГ*;

$T_{\max} = 70{,}7$ *кГ* при $\varphi = 0$; $T_{\min} = 0$ при $\varphi = 90°$.



К задаче 2.47.



К задаче 2.48.

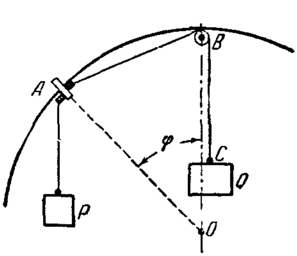
2.48 (57). На круглом гладком цилиндре с горизонтальной осью и радиусом $OA = 0{,}1$ *м* лежат два шарика A и B; вес первого 1 *н*, второго 2 *н*. Шарики соединены нитью AB длиной 0,2 *м*. Определить углы φ_1 и φ_2, составляемые радиусами OA и OB с вертикальной прямой OC в положении равновесия, и давления N_1 и N_2 шариков на цилиндр в точках A и B. Размерами шариков пренебречь.

Ответ: $\varphi_1 = 2 - \varphi_2$; $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin 2}{2 + \cos 2}$; $\varphi_1 = 84°45'$; $\varphi_2 = 29°50'$;

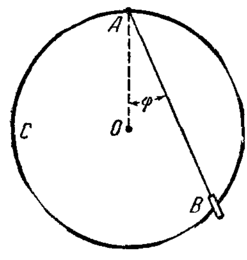
$N_1 = \cos \varphi_1$ *н* $= 0{,}092$ *н*; $N_2 = 2 \cos \varphi_2$ *н* $= 1{,}73$ *н*.

2.49 (58). Гладкое кольцо A может скользить без трения по неподвижной проволоке, согнутой по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу подвешена гиря P и привязана веревка ABC, которая перекинута через неподвижный блок B, находящийся в высшей точке окружности; размерами блока пренебрегаем. В точке C подвешена гиря Q. Определить центральный угол φ дуги AB в положении равновесия, пренебрегая весом кольца и трением на блоке, и указать условие, при котором возможно равновесие.

Ответ: $\sin\frac{\varphi_1}{2}=\frac{Q}{2P}$; $\varphi_2=\pi$; первое из указанных положений равновесия возможно при $Q<2P$, второе — при любых Q и P.



К задаче 2.49.



К задаче 2.50.

2.50 (59). На проволочной окружности ABC радиуса R, расположенной в вертикальной плоскости, помещено гладкое кольцо B, вес которого p; размерами кольца пренебречь. Кольцо посредством упругой нити AB соединено с наивысшей точкой A окружности. Определить угол φ в положении равновесия, зная, что сила натяжения нити T пропорциональна ее относительному удлинению, причем коэффициент пропорциональности равен k.

Если через L и l обозначим длину нити соответственно в состоянии растянутом и нерастянутом, то величина $T=k\frac{L-l}{l}$.

Ответ: $\cos\varphi=\frac{1}{2}\frac{kl}{kR-pl}$, если $k\geqslant\frac{2pl}{2R-l}$; в противном случае $\varphi=0$.

2.51 (60). Точка M притягивается тремя неподвижными центрами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ силами, пропорциональными расстояниям: $F_1=k_1r_1$, $F_2=k_2r_2$, $F_3=k_3r_3$, где $r_1=MM_1$, $r_2=MM_2$, $r_3=MM_3$, а k_1, k_2, k_3 — коэффициенты пропорциональности. Определить координаты x, y точки M в положении равновесия.

Ответ: $x=\frac{k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3}{k_1+k_2+k_3}$; $y=\frac{k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3}{k_1+k_2+k_3}$.

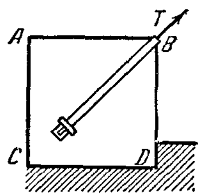
2.52 (61). Однородная прямоугольная пластинка весом 5 *кГ* подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом 18° к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно к ее плоскости.

Ответ: $5 \sin 18° = 1{,}55$ *кГ*.

2.53 (62). Концевая цепь цепного моста заложена в каменное основание, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, среднее сечение которого есть $ABDC$. Стороны $AB = AC = 5$ *м*, удельный вес кладки 2,5 $Г/см^3$; цепь расположена по диагонали BC. Найти необходимую длину a третьей стороны параллелепипеда, если натяжение цепи $T = 100$ *т*.

Основание должно быть рассчитано на опрокидывание вокруг ребра D; при расчете пренебрегаем сопротивлением грунта.

Ответ: $a \geqslant 2{,}3$ *м*.

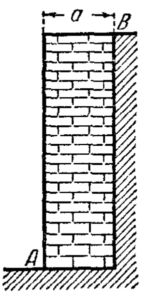


К задаче 2.53.

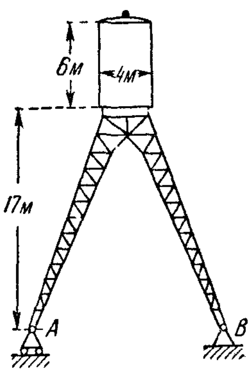
2.54 (63). Земляная насыпь подпирается вертикальной каменной стеной AB. Найти необходимую толщину стены a, предполагая, что давление земли на стену направлено горизонтально, приложено на 1/3 ее высоты и равно 6 *т/м* (на метр длины стены); удельный вес кладки 2 $Г/см^3$.

Стена должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра A.

Ответ: $a \geqslant 1{,}42$ *м*.



К задаче 2.54.



К задаче 2.55.

2.55 (64). Водонапорная башня состоит из цилиндрического резервуара высотой 6 *м* и диаметром 4 *м*, укрепленного на четырех симметрично расположенных столбах, наклонных к горизонту; дно резервуара находится на высоте 17 *м* над уровнем опор; вес башни 8 *т*; давление ветра рассчитывается на площадь проекции поверхности резервуара на плоскость, перпендикулярную к направлению ветра, причем удельное давление ветра принимается равным 125 $кГ/м^2$. Определить необходимое расстояние AB между основаниями столбов.

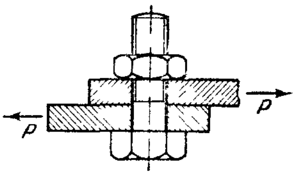
Расстояние AB должно быть рассчитано на опрокидывание давлением ветра при горизонтальном его направлении.

Ответ: $AB \geqslant 15$ *м*.

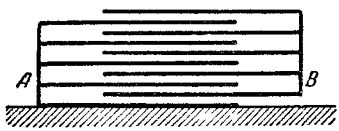
2.56 (67). Определить необходимую затяжку болта, скрепляющего две стальные полосы, разрываемые силой $P = 2000$ *кГ*. Болт поставлен с зазором и не должен работать на срез. Коэффициент трения между листами равен 0,2.

Указание. Болт не должен работать на срез, поэтому его надо затянуть с такой силой, чтобы развивающееся между листами трение могло предотвратить скольжение листов. Сила, действующая вдоль оси болта, и является искомой затяжкой.

Ответ: 10 000 *кГ*.



К задаче 2.56.



К задаче 2.57.

2.57 (68). Листы бумаги, сложенные, как показано на чертеже, склеиваются свободными концами через лист таким образом, что получаются две самостоятельные кипы A и B. Вес каждого листа 6 *Г*, число всех листов 200, коэффициент трения бумаги о бумагу, а также о стол, на котором бумага лежит, равен 0,2. Предполагая, что одна из кип удерживается неподвижно, определить наименьшее горизонтальное усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить вторую кипу.

Ответ. При вытаскивании A из B сила $P = 24{,}12$ *кГ*, а при вытаскивании B из A сила $P = 23{,}88$ *кГ*.

2.58 (69). Вагон, спускающийся по уклону в 0,008, достигнув некоторой определенной скорости, движется затем равномерно. Определить сопротивление R, которое испытывает вагон при этой скорости, если вес вагона равен 50 *т*.

Уклоном пути называется тангенс угла наклона пути к горизонту; вследствие малости уклона синус может быть принят равным тангенсу этого угла.

Ответ: $R = 400$ *кГ*.

2.59. Поезд поднимается по прямолинейному пути, имеющему уклон 0,008, с постоянной скоростью; вес поезда, не считая электровоза, 1200 *т*. Какова сила тяги P электровоза, если сопротивление движению равно 0,005 давления поезда на рельсы?

Ответ: $P = 15{,}6$ *т*.

2.60 (71). Негладкой наклонной плоскости придан такой угол α наклона к горизонту, что тяжелое тело, помещенное на эту плоскость, спускается с той постоянной скоростью, которая ему сообщена в начале движения. Определить коэффициент трения f.

Ответ: $f = \operatorname{tg} \alpha$.

2.61 (72). Найти угол естественного откоса земляного грунта, если коэффициент трения для этого грунта $f = 0{,}8$.

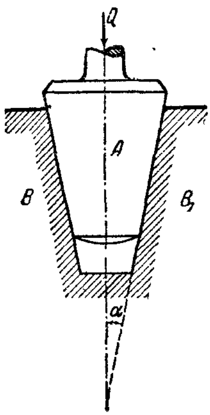
Углом естественного откоса называется тот наибольший угол наклона откоса к горизонту, при котором частица грунта, находящаяся на откосе, остается в равновесии.

Ответ: 38°40′.

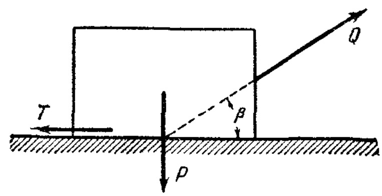
2.62 (73). Клин A, уклон которого $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}05$, загоняется в углубление BB_1 усилием $Q = 6$ *т*. Определить нормальное давление N на щеки клина, а также усилие P, необходимое для того, чтобы вытащить клин, если коэффициент трения $f = 0{,}1$.

Ответ: $N = 20$ *т*, $P = 2$ *т*.

2.63 (74). Ящик веса P стоит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f. Определить, под каким углом β надо приложить силу Q, и величину этой силы при условии: сдвинуть ящик при наименьшей величине Q.



К задаче 2 62.



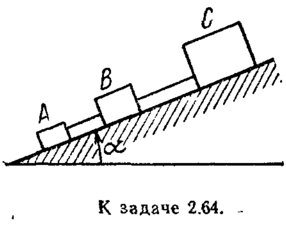
К задаче 2.63.

Ответ: $\beta = \operatorname{arctg} f$; $Q_{\min} = \dfrac{fP}{\sqrt{1+f^2}}$.

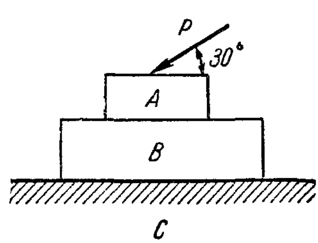
2.64. Три груза A, B, C весом 10 *кГ*, 30 *кГ* и 60 *кГ* соответственно лежат на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Грузы соединены тросами, как показано на рисунке. Коэффициенты трения между грузами и плоскостью равны $f_A = 0{,}1$, $f_B = 0{,}25$ и $f_C = 0{,}5$ соответственно.

Определить угол α, при котором тела равномерно движутся вниз по плоскости. Найти также натяжения тросов T_{AB} и T_{BC}.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}38$, $T_{AB} = 2{,}7$ *кГ*, $T_{BC} = 6{,}5$ *кГ*.



К задаче 2.64.



К задаче 2.65.

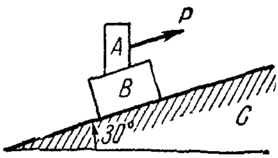
2.65. На верхней грани прямоугольного бруса B, вес которого 200 *кГ*, находится прямоугольный брус A весом 100 *кГ*. Брус B опирается своей нижней гранью на горизонтальную поверхность C, причем коэффициент трения между ними $f_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения между брусами A и B $f_1 = 0{,}5$. На брус A действует сила $P = 60$ *кГ*, образующая с горизонтом угол $\alpha = 30°$.

Будет ли брус A двигаться относительно B? Будет ли брус B двигаться относительно плоскости C?

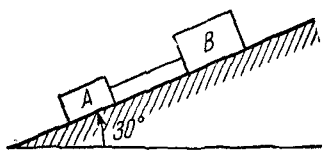
Ответ. Брусы A и B остаются в покое.

2.66. Два тела A и B расположены на наклонной плоскости C так, как показано на чертеже. Тело A весит 100 *кГ*, тело B — 200 *кГ*. Коэффициент трения между A и B $f_1 = 0{,}6$, между B и C $f_2 = 0{,}2$. Исследовать состояние системы при различных значениях силы P, приложенной к телу A параллельно наклонной плоскости.

Ответ: При $P < 98$ *кГ* оба тела двигаются вниз, не перемещаясь друг относительно друга; при 98 *кГ* $< P <$ 102 *кГ* оба тела находятся в покое; при $P >$ 102 *кГ* тело B неподвижно, а тело A скользит по телу B вверх.



К задаче 2.66.

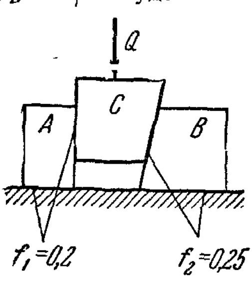


К задаче 2.67.

2.67. Лежащие на наклонной плоскости два прямоугольных бруса A и B, весом 200 *кГ* и 400 *кГ* соответственно, соединены тросом и имеют коэффициенты трения с наклонной плоскостью $f_A = 0{,}5$ и $f_B = 2/3$. Будет ли система двигаться или останется в покое? Найти натяжение T троса и величины сил трения, действующих на каждое тело?

Ответ: Система останется в покое.

$F_A = 86{,}6$ *кГ*, $F_B = 213{,}4$ *кГ*, $T = 13{,}4$ *кГ*.



К задаче 2.68.

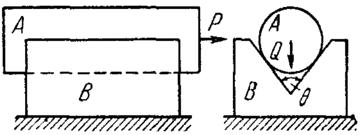
2.68. Клин C вставлен между двумя телами A и B, которые лежат на шероховатой горизонтальной плоскости. Одна сторона клина вертикальна, другая — образует с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg} 1/3$.

Вес тела A равен 400 *кГ*, а вес тела B 300 *кГ*; коэффициенты трения между поверхностями указаны на рисунке. Найти величину силы Q, под действием которой одно из тел сдвинется, а также значение силы трения F, действующей при этом со стороны горизонтальной плоскости на оставшееся неподвижным тело.

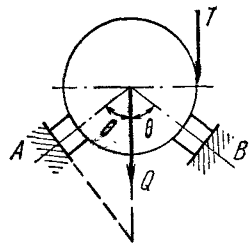
Ответ: $Q = 70$ *кГ*, причем начнет двигаться тело A; $F_B = 83$ *кГ*.

2.69. Цилиндр A лежит в направляющих B, поперечное сечение которых — симметричный клин с углом раствора θ. Коэффициент трения между цилиндром A и направляющей B равен f. Вес цилиндра равен Q. При какой величине силы P цилиндр начнет двигаться горизонтально? Каков должен быть угол θ, чтобы движение началось при значении силы P, равной весу цилиндра Q?

Ответ: $P = \dfrac{Qf}{\sin\frac{\theta}{2}}$; $\theta = 2\arcsin f$.



К задаче 2.69.



К задаче 2.70.

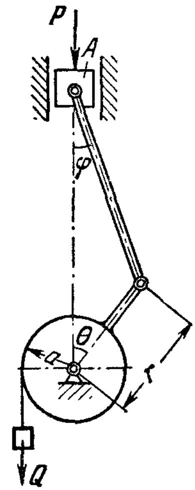
2.70. Цилиндр весом Q лежит на двух опорах A и B, расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f. При какой величине тангенциальной оси T цилиндр начнет вращаться? При каком угле θ это устройство будет самотормозящимся?

Ответ: $T = \dfrac{fQ}{(1+f)^2\cos\theta - f}$; $\theta \leqslant \arccos\dfrac{f}{1+f^2}$.

2.71. Пренебрегая трением между ползуном A и направляющей, а также трением во всех шарнирах и подшипниках кривошипного механизма, определить, какова должна быть сила P, необходимая для поддерживания груза Q при указанном на чертеже положении механизма. Каковы минимальное и максимальное значения P, обеспечивающие неподвижность груза Q, если коэффициент трения между ползуном A и направляющей равен f?

Ответ: $P = \dfrac{Qa\cos\varphi}{r\sin(\varphi+\theta)}$; $P_{\min} = \dfrac{Qa}{r}\,\dfrac{\cos\varphi - f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}$;

$$P_{\max} = \frac{Qa}{r}\,\frac{\cos\varphi + f\sin\varphi}{\sin(\varphi+\theta)}.$$



К задаче 2.71.

§ 3. Параллельные силы

3.1 (75). *Определить вертикальные реакции опор, на которые свободно оперта у своих концов горизонтальная балка длиной l, нагруженная равномерно по p н на единицу длины. Вес балки считать включенным в равномерно распределенную нагрузку.*

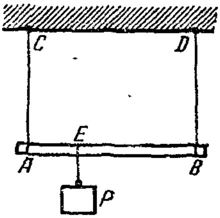
Ответ: $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}pl$ *н*.

3.2 (76). Определить вертикальные реакции опор горизонтальной балки пролета l, если груз P помещен на ней на расстоянии x от первой опоры.

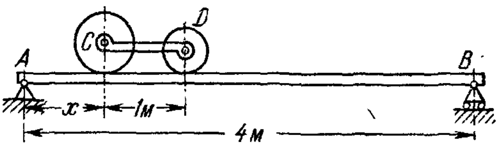
Ответ: $R_1 = P\dfrac{l-x}{l}$; $R_2 = P\dfrac{x}{l}$.

3.3 (77). Однородный стержень AB, длина которого 1 *м*, а вес 2 *кГ*, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD. К стержню в точке E на расстоянии $AE = \frac{1}{4}$ *м* подвешен груз $P = 12$ *кГ*. Определить натяжения веревок T_C и T_D.

Ответ: $T_C = 10$ *кГ*; $T_D = 4$ *кГ*.



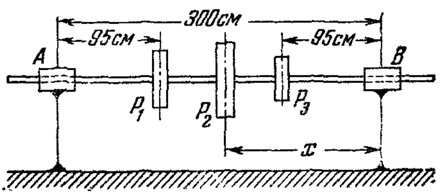
К задаче 3.3.



К задаче 3.4.

3.4 (78). На горизонтальную балку, лежащую на двух опорах, расстояние между которыми равно 4 *м*, положены два груза, один C в 200 *кГ*, другой D в 100 *кГ*, так, что реакция опоры A в два раза больше реакции опоры B, если пренебречь весом балки. Расстояние CD между грузами равно 1 *м*. Каково расстояние x груза C от опоры A?

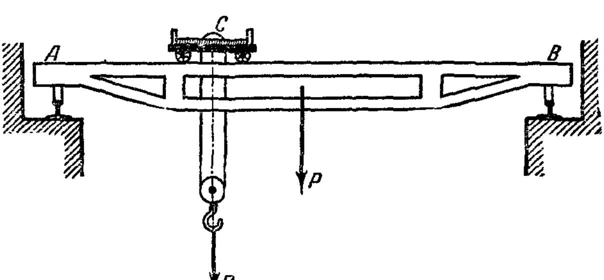
Ответ: $x = 1$ *м*.



К задаче 3.5

3.5 (79). Трансмиссионный вал AB несет три шкива весом $P_1 = 300$ *кГ*, $P_2 = 500$ *кГ*, $P_3 = 200$ *кГ*. Размеры указаны на чертеже. Определить, на каком расстоянии x от подшипника B надо установить шкив весом P_2, чтобы реакция подшипника A равнялась реакции подшипника B; весом вала пренебречь.

Ответ: $x = 139$ *см*.



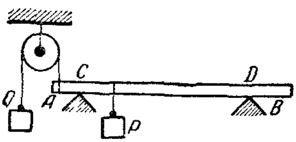
К задаче 3.6.

3.6 (80). Найти величины давлений мостового крана AB на рельсы в зависимости от положения тележки C, на которой укреплена лебедка. Положение тележки определить расстоянием ее середины от левого рельса в долях общей длины моста. Вес моста $P=6$ *т*, вес тележки с поднимаемым грузом $P_1=4$ *т*.

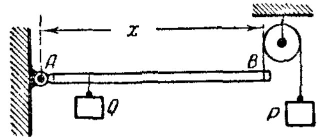
Ответ: $F_A=(7-4n)$ *т*; $F_B=(3+4n)$ *т*, где $n=\frac{AC}{AB}$.

3.7 (81). Балка AB длиной 10 *м* и весом 200 *кГ* лежит на двух опорах C и D. Опора C отстоит от конца A на 2 *м*, опора D от конца B — на 3 *м*. Конец балки A оттягивается вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз Q весом 300 *кГ*. На расстоянии 3 *м* от конца A к балке подвешен груз P весом 800 *кГ*. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

Ответ: $R_C=300$ *кГ*; $R_D=400$ *кГ*.



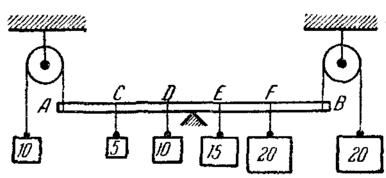
К задаче 3.7.



К задаче 3.8.

3.8 (82). Горизонтальный стержень AB весом 100 *н* может вращаться вокруг неподвижной оси шарнира A. Конец B оттягивается кверху посредством перекинутой через блок нити, на которой подвешена гиря весом $P=150$ *н*. В точке, находящейся на расстоянии 20 *см* от конца B, подвешен груз Q весом 500 *н*. Как велика длина x стержня AB, если он находится в равновесии?

Ответ: $x=25$ *см*.



К задаче 3.9.

3.9 (83). Конец A горизонтального стержня AB весом 20 *кГ* и длиной 5 *м* оттягивается кверху посредством перекинутой через блок веревки, на которой подвешен груз весом 10 *кГ*. Конец B таким же образом оттягивается кверху посредством груза весом 20 *кГ*. В точках C, D, E и F, отстоящих одна от другой и от точек A и B на 1 *м*, подвешены грузы весом соответственно 5, 10, 15 и 20 *кГ*. В каком месте надо подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии?

Ответ: В середине.

3.10 (84). К однородному стержню, длина которого 3 *м*, а вес 6 *н*, подвешены 4 груза на равных расстояниях друг от друга, причем два крайних — на концах стержня. Первый груз слева весит 2 *н*, каждый последующий тяжелее предыдущего на 1 *н*. На каком расстоянии x от левого конца нужно подвесить стержень, чтобы он оставался горизонтальным?

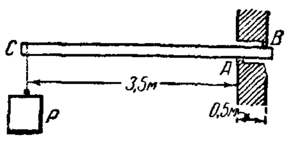
Ответ: $x=1{,}75$ *м*.

3.11 (85). Однородная горизонтальная балка соединена со стеной шарниром и подперта в точке, лежащей на расстоянии 160 *см* от стены. Длина балки 400 *см*, ее вес 320 *кГ*. На расстояниях 120 *см* и 180 *см* от стены на балке лежат два груза весом 160 *кГ* и 240 *кГ*. Определить опорные реакции.

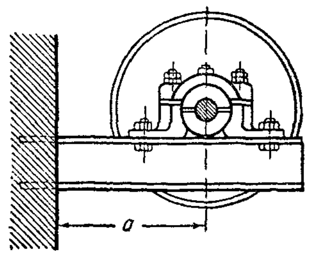
Ответ: 790 *кГ* — вверх; 70 *кГ* — вниз.

3.12 (86). Однородная горизонтальная балка длиной 4 *м* и весом 0,5 *т* заложена в стену, толщина которой равна 0,5 *м*, так, что опирается на нее в точках A и B. Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки подвешен груз P весом 4 *т*.

Ответ: $R_A = 34$ *т* — вверх; $R_B = 29{,}5$ *т* — вниз.



К задаче 3.12.



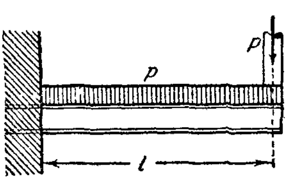
К задаче 3.13.

3.13 (87). Горизонтальная балка заделана одним концом в стену, а на другом конце поддерживает подшипник вала. От веса вала, шкивов и подшипника балка испытывает вертикальную нагрузку Q, равную 120 *кГ*. Пренебрегая весом балки и считая, что нагрузка Q действует на расстоянии $a = 750$ *мм* от стены, определить реакции заделки.

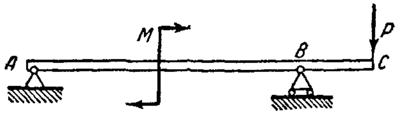
Ответ: Реакция $R = 120$ *кГ*; реактивный момент $M = 90$ *кГм*.

3.14 (88). Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивности $p = 200$ *кГ/м*. На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны $P = 200$ *кГ*. Расстояние оси колонны от стены $l = 1{,}5$ *м*. Определить реакции заделки.

Ответ: $R = 500$ *кГ*; $M = 525$ *кГм*.



К задаче 3.14.



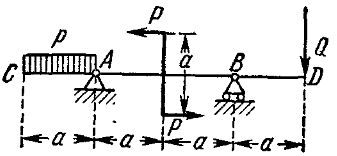
К задаче 3.15.

3.15 (89). На консольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом $M = 6$ *тм*, а в точке C вертикальная нагрузка $P = 2$ *т*. Длина пролета балки $AB = 3{,}5$ *м*, вынос консоли $BC = 0{,}5$ *м*. Определить реакции опор.

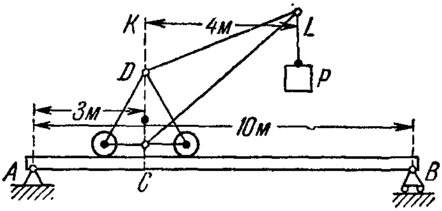
Ответ: $R_A = 2$ *т* — вниз; $R_B = 4$ *т* — вверх.

3.16 (90). На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил (P, P), на левую консоль — равномерно распределенная нагрузка интенсивности p, а в точке D правой консоли — вертикальная нагрузка Q. Определить реакции опор, если $P=1$ *т*, $Q=2$ *т*, $p=2$ *т/м*, $a=0{,}8$ *м*.

Ответ: $R_A=1{,}5$ *т*; $R_B\approx 2{,}1$ *т*.



К задаче 3.16.



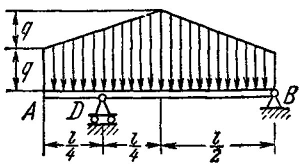
К задаче 3.17.

3.17 (91). На балке AB длиной 10 *м* уложен путь для подъемного крана. Вес крана равен 5 *т*, и центр тяжести его находится на оси CD; вес груза P равен 1 *т*; вес балки AB равен 3 *т*; вылет крана $KL=4$ *м*; расстояние $AC=3$ м. Найти опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда стрелка крана DL находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

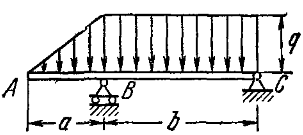
Ответ: $R_A=5{,}3$ *т*; $R_B=3{,}7$ *т*.

3.18. Балка AB длиною l *м* несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q *кГ/м* на концах A и B балки и $2q$ *кГ/м* в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B.

Ответ: $R_D=ql$ *кГ*; $R_B=0{,}5\ ql$ *кГ*.



К задаче 3.18

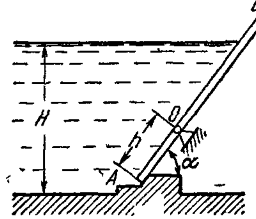


К задаче 3.19.

3.19. Горизонтальная балка AC, опертая в точках B и C, несет между опорами B и C равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q *кГ/м*; на участке AB интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор B и C, пренебрегая весом балки.

Ответ: $R_B=\frac{q}{6}\left(3a+3b+\frac{a^2}{b}\right)$ *кГ*;

$R_C=\frac{q}{6}\left(3b-\frac{a^2}{b}\right)$ *кГ*.



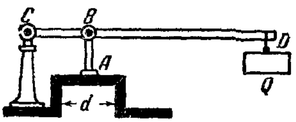
К задаче 3.20.

3.20. Прямоугольный щит AB ирригационного канала может вращаться относительно оси O. Если уровень воды невысок, щит закрыт, но, когда вода достигает некоторого уровня H, щит поворачивается вокруг оси и открывает канал. Пренебрегая трением и весом щита, определить высоту H, при которой открывается щит.

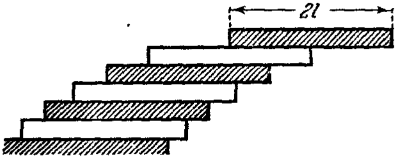
Ответ: $H=3h\sin\alpha$.

3.21 (92). Предохранительный клапан A парового котла соединен стержнем AB с однородным рычагом CD длиной 50 *см* и весом 1 *кГ*, который может вращаться вокруг неподвижной оси C; диаметр клапана $d=6$ *см*, плечо $BC=7$ *см*. Какой груз Q нужно подвесить к концу D рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле, равном 11 *атм* (следует считать 1 *атм* = 1 *кГ/см*^{2})?

Ответ: $Q=43$ *кГ*.

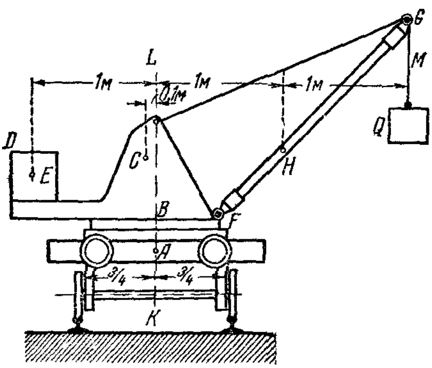


К задаче 3.21.



К задаче 3 22.

3.22 (93). Несколько одинаковых однородных плит длиной $2l$ сложены так, что часть каждой плиты выступает над плитой нижележащей. Определить предельные длины выступающих частей, при которых плиты будут находиться в равновесии.



К задаче 3.23.

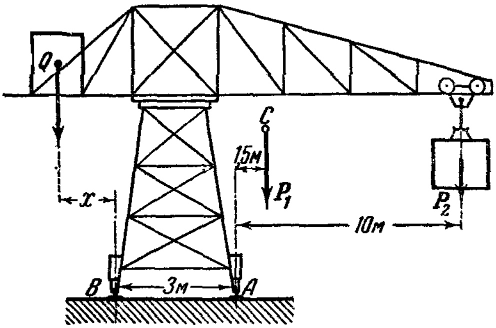
При решении складываются последовательно веса плит, начиная с верхней.

Ответ: l, $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{3}l$, $\frac{1}{4}l$, $\frac{1}{5}l$ и т. д.

3.23 (94). Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми равно 1,5 *м*. Вес тележки крана равен 3 *т*, центр тяжести ее находится в точке A, лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью чертежа. Вес лебедки B крана равен 1 *т*, центр тяжести ее лежит в точке C на расстоянии 0,1 *м* от прямой KL. Вес противовеса D равен 2 *т*, центр тяжести его лежит в точке E на расстоянии 1 *м* от прямой KL. Вес укосины FG равен 0,5 *т*, и центр тяжести ее находится в точке H на расстоянии 1 *м* от прямой KL. Вылет крана $LM=2$ *м*. Определить наибольший груз Q, который не опрокинет крана.

Ответ: $Q=5{,}18$ *т*.

3.24 (95). Центр тяжести передвижного рельсового крана, вес которого (без противовеса) равен $P_1=50$ *т*, находится в точке C, расстояние которой от вертикальной плоскости, проходящей через правый рельс, равно 1,5 *м*. Крановая тележка рассчитана на подъем груза $P_2 = 25$ *т*; вылет ее равен 10 *м*. Определить наименьший вес Q и наибольшее расстояние x центра тяжести противовеса от вертикальной плоскости, проходящей через левый рельс B так, чтобы

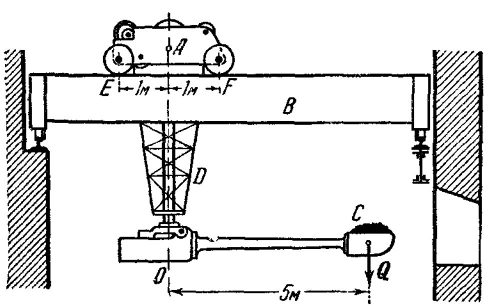


К задаче 3.24.

кран не опрокинулся при всех положениях тележки как нагруженной, так и ненагруженной. Собственным весом тележки пренебречь.

Ответ: $Q = 33{,}3$ *т*; $x = 6{,}75$ *м*.

3.25 (96). Кран для загрузки материалов в мартеновскую печь состоит из лебедки A, ходящей на колесах по рельсам, уложенным на балках передвижного моста B. К нижней части лебедки прикреплена опрокинутая колонна D, служащая для укрепления лопаты C.



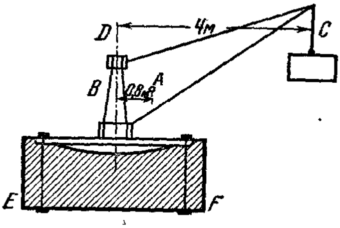
К задаче 3.25.

Какой вес P должна иметь лебедка с колонной, чтобы груз $Q = 1{,}5$ *т*, помещенный на лопате на расстоянии 5 *м* от вертикальной оси OA лебедки, не опрокидывал ее? Центр тяжести лебедки расположен на оси OA; расстояние оси каждого из колес от оси OA равно 1 *м*.

Ответ: $P \geqslant 6$ *т*.

3.26 (97). Подъемный кран установлен на каменном фундаменте. Вес крана $Q = 2{,}5$ *т* и приложен в центре тяжести A на расстоянии

$AB = 0{,}8$ *м* от оси крана; вылет крана $CD = 4$ *м*. Фундамент имеет квадратное основание, сторона которого $EF = 2$ *м*; удельный вес кладки 2 *Г/см*³. Вычислить наименьшую глубину фундамента, если кран предназначен для подъема тяжестей до 3 *т*, причем фундамент должен быть рассчитан на опрокидывание вокруг ребра *F*.



К задаче 3.26.

Ответ: 1,1 *м*.

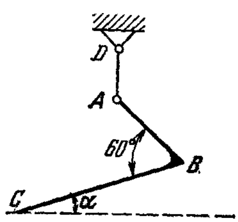
3.27 (99). Магнитная стрелка подвешена на тонкой проволоке и установлена горизонтально в магнитном меридиане. Горизонтальные составляющие силы земного магнитного поля, действующие на полюсы стрелки в противоположных направлениях, равны каждая 2 *мГ*, расстояние между полюсами 10 *см*. На какой угол нужно закрутить проволоку, чтобы стрелка составила угол 30° с магнитным меридианом, если известно, что для закручивания проволоки на угол 1° нужно приложить пару, момент которой равен 5 *мГсм*?

Момент закручивающей пары пропорционален углу закручивания.

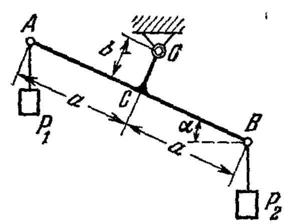
Ответ: 32°.

3.28 (101). Два однородных стержня *AB* и *BC* одинакового поперечного сечения, из которых *AB* вдвое короче *BC*, соединенные своими концами под углом 60°, образуют ломаный рычаг *ABC*. У конца *A* рычаг подвешен на нити *AD*. Определить угол α наклона стержня *BC* к горизонту при равновесии рычага; поперечными размерами стержней пренебречь.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{3}$; $\alpha = 19°5'$.



К задаче 3.28.



К задаче 3.29.

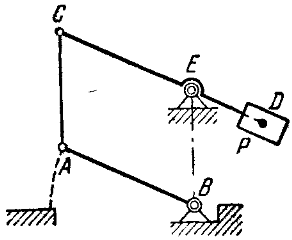
3.29 (103). Два стержня *AB* и *OC*, вес единицы длины которых равен $2p$, скреплены под прямым углом в точке *C*. Стержень *OC* может вращаться вокруг горизонтальной оси *O*; $AC = CB = a$, $OC = b$. В точках *A* и *B* подвешены гири, веса которых P_1 и P_2; $P_2 > P_1$. Определить угол α наклона стержня *AB* к горизонту в положении равновесия.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\,\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1 + p(4a + b)}$.

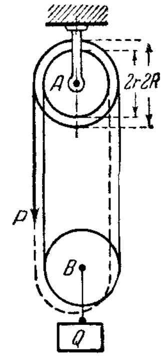
3.30 (104). Подъемный мост AB поднимается посредством двух брусьев CD длиной 8 *м*, весом 400 *кГ*, по одному с каждой стороны моста; длина моста $AB = CE = 5$ *м*; длина цепи $AC = BE$; вес моста 3 *т* и может считаться приложенным в середине AB. Рассчитать вес противовесов P, уравновешивающих мост.

Ответ: $P = 1383$ *кГ*.

3.31 (105). Главную часть дифференциального блока составляют два неизменно связанных между собой шкива A, ось которых подвешена к неподвижному крюку. Желоба их снабжены зубцами, захватывающими бесконечную цепь, образующую две петли, в одну из которых помещен подвижной блок B. К подвижному блоку подвешен поднимаемый груз Q, а к свисающей с большого блока ветви свободной петли приложено усилие P. Радиусы шкивов A суть R и r, причем $r < R$. Требуется найти зависимость усилия P от величины поднимаемого груза Q и определить это усилие в случае: $Q = 500$ *н*, $R = 25$ *см*, $r = 24$ *см*. Трением пренебречь.



К задаче 3.30.

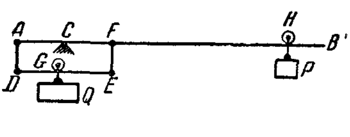


К задаче 3.31.

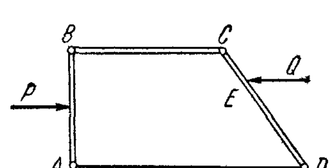
Ответ: $P = \frac{1}{2} Q\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 10$ *н*.

3.32 (106). Дифференциальный рычаг состоит из стержня AB, имеющего неподвижную опорную призму в точке C, и перекладины DE, соединенной с рычагом AB посредством шарнирных серег AD и EF. Груз $Q = 1$ *т* подвешен к перекладине в точке G посредством призмы. Расстояние между вертикалями, проведенными через точки C и G, равно 1 *мм*. Определить вес гири P, которую нужно подвесить к рычагу AB в точке H на расстоянии $CH = 1$ *м* для того, чтобы уравновесить груз Q. Трением пренебречь.

Ответ: $P = 1$ *кГ*.



К задаче 3.32.



К задаче 3.33.

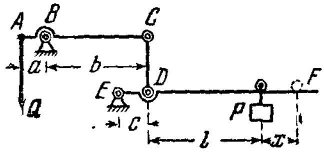
3.33. В шарнирном четырехзвенном механизме звено BC параллельно неподвижному звену AD. Звено $AB = h$ перпендикулярно к AD. Посредине AB приложена горизонтальная сила P. Какую горизонтальную силу Q следует приложить к звену CD в точке E, если $CE = \frac{CD}{4}$, чтобы механизм был в равновесии? Найти реакцию в шарнире D. Весом звеньев пренебречь.

Ответ: $Q = \frac{2}{3} P$; $R_D = \frac{1}{6} P$ и направлена по AD вправо.

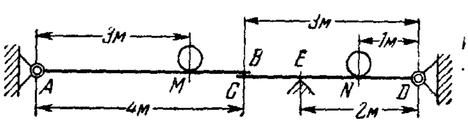
3.34 (108). Для измерения больших усилий Q устроена система двух неравноплечих рычагов ABC и EDF, соединенных между собой тяжем CD. В точках B и E имеются неподвижные опоры. По рычагу EDF может передвигаться груз P весом 12,5 *кГ*. Сила Q, приложенная в точке A, уравновешивается этим грузом, помещенным на расстоянии l от точки D.

На какую длину x надо передвинуть для сохранения равновесия груз P при увеличении силы Q на 1000 *кГ*, если указанные на чертеже размеры соответственно равны: $a = 3{,}3$ *мм*, $b = 660$ *мм*, $c = 50$ *мм*?

Ответ: $x = 2$ *см*.



К задаче 3.34.

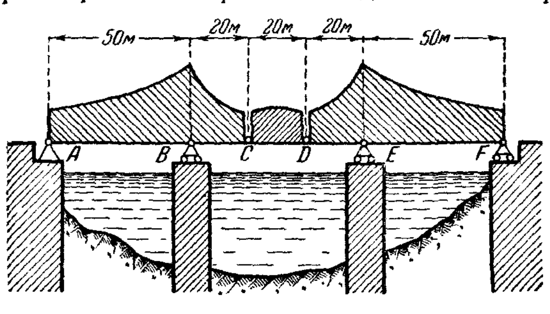


К задаче 3.35.

3.35 (109). Балка AB длиной 4 *м*, весом 200 *кГ* может вращаться вокруг горизонтальной оси A и опирается концом B на другую балку CD длиной 3 *м*, весом 160 *кГ*, которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D. В точках M и N помещены грузы по 80 *кГ* каждый. Расстояния: $AM = 3$ *м*, $ED = 2$ *м*, $ND = 1$ *м*. Определить опорные реакции.

Ответ: $R_A = 120$ *кГ*; $R_B = 160$ *кГ*; $R_E = 400$ *кГ*; $R_D = 0$.

3.36 (110). Консольный мост состоит из трех частей: AC, CD и DF, из которых крайние опираются каждая на две опоры. Размеры

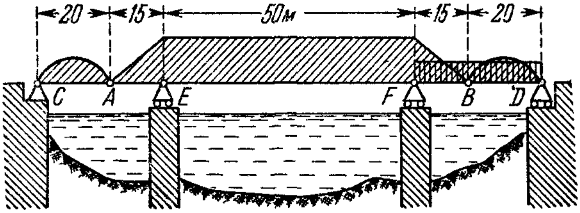


К задаче 3.36.

соответственно равны: $AC = DF = 70$ *м*, $CD = 20$ *м*, $AB = EF = 50$ *м*. Погонная нагрузка на мост равна 6 *т/м*. Найти давления на опоры A и B, производимые этой нагрузкой.

Ответ: $N_A = 102$ *т*; $N_B = 378$ *т*.

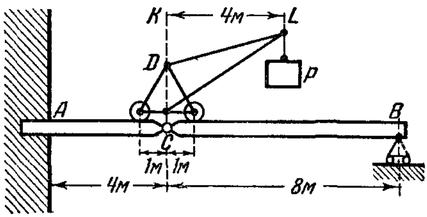
3.37 (111). Консольный мост состоит из главной фермы AB и двух боковых ферм AC и BD. Собственный вес, приходящийся на погонный метр фермы AB, равен 1,5 *т*, а для ферм AC и BD



К задаче 3.37.

равен 1 *т*. Определить реакции всех опор в тот момент, когда весь правый пролет FD занят поездом, вес которого можно заменить равномерно распределенной по пролету FD нагрузкой интенсивности 3 *т* на погонный метр. Размеры соответственно равны: $AC = BD = 20$ *м*; $AE = BF = 15$ *м*; $EF = 50$ *м*.

Ответ: $R_C = 10$ *т*; $R_D = 40$ *т*; $R_E = 54{,}25$ *т*; $R_F = 160{,}75$ *т*.

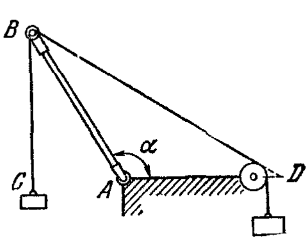


К задаче 3.38.

3.38 (112). Горизонтальная разрезная балка ABC у конца A заделана в стену, у конца B опирается на подвижную опору; в точке C — шарнир. Балка загружена краном, несущим груз P весом 1 *т*; вылет $KL = 4$ *м*, вес крана $Q = 5$ *т*, центр тяжести крана лежит на вертикали CD. Размеры указаны на чертеже. Определить, пренебрегая весом балки, опорные реакции в точках A и B для такого положения крана, когда он находится в одной вертикальной плоскости с балкой AB.

Ответ: $R_A = 5{,}375$ *т*; $R_B = 0{,}625$ *т*; $M_A = 20{,}5$ *тм*.

§ 4. Произвольная плоская система сил



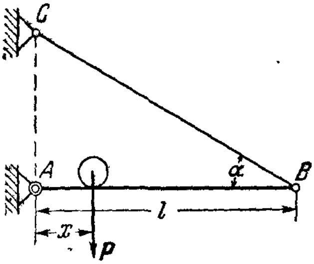
К задаче 4.1.

4.1 (113). К однородному стержню AB, который может вращаться вокруг шарнира A, подвешена в точке B на веревке гиря C весом в 10 *н*. От конца стержня B протянут трос, перекинутый через блок D и поддерживающий гирю весом в 20 *н*. Найти величину угла $BAD = \alpha$, при котором стержень будет находиться в положении равновесия, зная, что $AB = AD$ и вес стержня 20 *н*. Трением на блоке пренебречь.

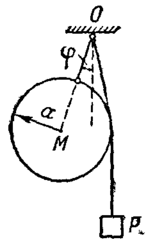
Ответ: $\alpha = 120°$.

4.2 (114). Горизонтальная балка крана, длина которой равна l, у одного конца укреплена шарнирно, а у другого конца B подвешена к стене посредством тяги BC, угол наклона которой к горизонту равен α. По балке может перемещаться груз P, положение которого определяется переменным расстоянием x до шарнира A. Определить натяжение T тяги BC в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь.

Ответ: $T = \dfrac{Px}{l \sin\alpha}$.



К задаче 4.2.



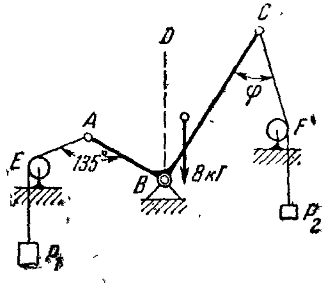
К задаче 4.3.

4.3 (115). Однородный шар весом Q и радиусом a и гиря весом P подвешены на веревках в точке O, как показано на чертеже. Расстояние $OM = b$. Определить, какой угол φ образует прямая OM с вертикалью при равновесии.

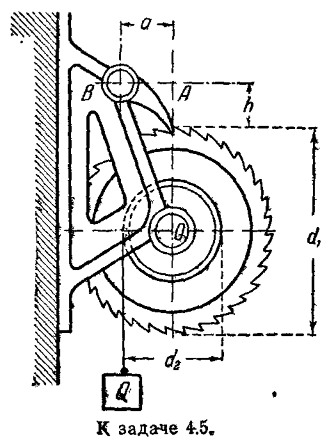
Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{a}{b}\dfrac{P}{P+Q}$.

4.4 (116). Ломаный рычаг ABC, имеющий неподвижную ось B, весит 8 *кГ*; плечо $AB = 4$ *дм*, плечо $BC = 1$ *м*, центр тяжести рычага находится на расстоянии 2,12 *дм* от вертикальной прямой BD. В точках A и C привязаны веревки, перекинутые через блоки E и F и натягиваемые гирями весом $P_1 = 31$ *кГ* и $P_2 = 10$ *кГ*. Пренебрегая трением на блоках, определить угол $BCF = \varphi$ в положении равновесия, если угол $BAE = 135°$.

Ответ: $\varphi_1 = 45°$; $\varphi_2 = 135°$.



К задаче 4.4.



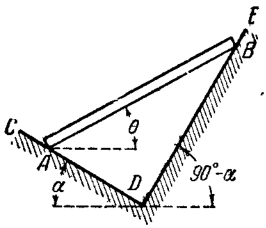
К задаче 4.5.

4.5 (117). Лебедка снабжена храповым колесом диаметром d_1 с собачкой A. На барабан диаметром d_2, неподвижно скрепленный с колесом, намотан трос, поддерживающий груз Q. Определить давление R на ось B собачки, если дано: $Q=50$ *кГ*, $d_1=420$ *мм*, $d_2=240$ *мм*, $h=50$ *мм*, $a=120$ *мм*. Весом собачки пренебречь.

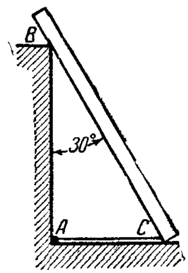
Ответ: $R=Q\frac{d_2}{d_1}\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}=31$ *кГ*.

4.6 (118). Однородная балка AB весом P опирается на две гладкие наклонные прямые CD и DE, находящиеся в вертикальной плоскости; угол наклона первой из них к горизонту равен α, второй: $90°-\alpha$. Найти угол θ наклона балки к горизонту в положении равновесия и давления ее на опорные прямые.

Ответ: $N_A=P\cos\alpha$; $N_B=P\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{ctg}2\alpha$; $\theta=90°-2\alpha$ при $\alpha\leqslant 45°$.



К задаче 4.6.



К задаче 4.7.

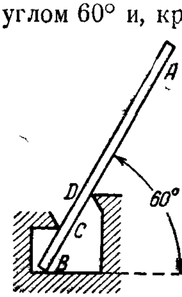
4.7 (119). Однородная балка весом 60 *кГ* и длиной 4 *м* опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B — на столб высотой 3 *м*, образуя с вертикалью угол 30°. Балка удерживается в таком положении веревкой AC, протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.

Ответ: $T=15$ *кГ*; $R_B=17{,}3$ *кГ*; $R_C=51{,}3$ *кГ*.

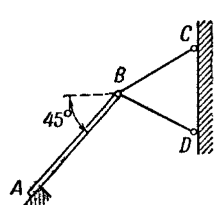
4.8 (120). Однородная балка AB весом 20 *кГ* опирается на гладкий горизонтальный пол в точке B под углом 60° и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB=3$ *м*, $CB=0{,}5$ *м*, $BD=1$ *м*.

Ответ: $R_B=20$ *кГ*; $R_C=30$ *кГ*; $R_D=30$ *кГ*.

4.9 (121). Однородная плита AB весом $P=100$ *кГ* свободно опирается в точке A и удерживается под углом 45° к горизонту двумя стержнями BC и BD. BCD — равносторонний треугольник. Точки C и D лежат на вертикальной прямой CD. Пренебрегая весами стержней и считая крепления в точках B, C и D шарнирными, определить реакцию опоры A и усилия в стержнях.



К задаче 4.8.

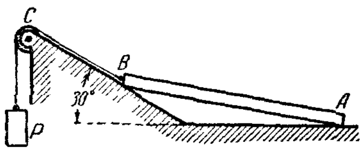


К задаче 4.9.

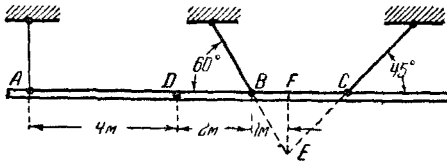
Ответ: $R_A=35{,}4$ *кГ*; $S_C=89{,}5$ *кГ*; $S_D=-60{,}6$ *кГ*.

4.10 (122). Однородный стержень AB весом 100 *н* опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. У конца B стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз P и давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость.

Ответ: $P = 25$ *н*; $N_A = 50$ *н*; $N_B = 43{,}3$ *н*.



К задаче 4.10.



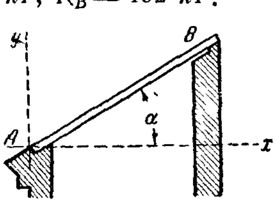
К задаче 4.11.

4.11 (123). При сборке моста пришлось поднимать часть мостовой фермы ABC тремя канатами, расположенными, как указано на чертеже. Вес этой части фермы 4200 *кГ*, центр тяжести находится в точке D. Расстояния соответственно равны: $AD = 4$ *м*, $DB = 2$ *м*, $BF = 1$ *м*. Найти натяжения канатов, если прямая AC горизонтальна.

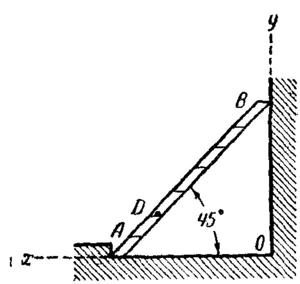
Ответ: $T_A = 1800$ *кГ*; $T_B = 1757$ *кГ*; $T_C = 1243$ *кГ*.

4.12 (124). Стропила односкатной крыши состоят из бруса AB, у верхнего конца B свободно лежащего на гладкой опоре, а нижним A упирающегося в стену. Наклон крыши $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$; на брус AB приходится вертикальная нагрузка 900 *кГ*, приложенная в середине бруса. Определить реакции опор в точках A и B.

Ответ: $X_A = 180$ *кГ*; $Y_A = 540$ *кГ*; $R_B = 402$ *кГ*.



К задаче 4.12.



К задаче 4.13.

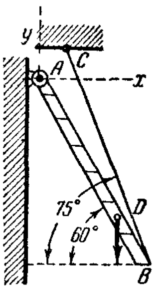
4.13 (125). К гладкой стене прислонена однородная лестница AB под углом 45° к горизонту; вес лестницы 20 *кГ*; в точке D на расстоянии, равном 1/3 длины лестницы, от нижнего конца находится человек весом 60 *кГ*. Найти давление лестницы на опору A и на стену.

Ответ: $X_A = 30$ *кГ*; $Y_A = -80$ *кГ*; $X_B = -30$ *кГ*.

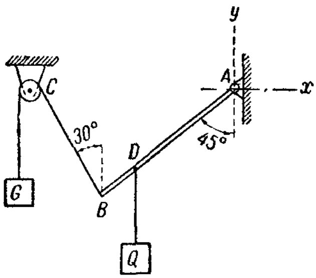
4.14 (126). На подъемной однородной лестнице длиной 6 *м* и весом 240 *кГ*, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси

A и наклонена под углом 60° к горизонту, в точке D стоит человек весом 80 *кГ* на расстоянии 2 *м* от конца B. У конца B лестница поддерживается веревкой BC, наклоненной под углом 75° к горизонту. Определить натяжение T веревки и реакцию A оси.

Ответ: $T = 335$ *кГ*; $X_A = 86,7$ *кГ*; $Y_A = -3,44$ *кГ*.



К задаче 4.14.

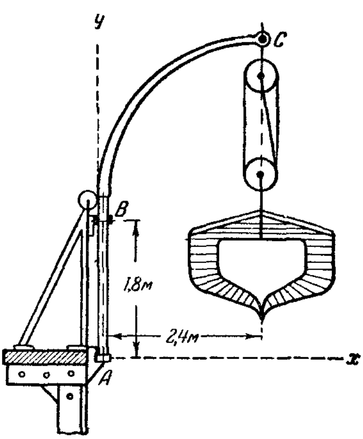


К задаче 4.15.

4.15 (127). Однородная балка AB весом $P = 100$ *кГ* прикреплена к стене шарниром A и удерживается под углом 45° к вертикали при помощи троса, перекинутого через блок и несущего груз G. Ветвь BC троса образует с вертикалью угол 30°. В точке D к балке подвешен груз Q весом 200 *кГ*. Определить вес груза G и реакцию шарнира A, пренебрегая трением на блоке, если $BD = \frac{1}{4} AB$.

Ответ: $G = 146$ *кГ*; $X_A = 73$ *кГ*; $Y_A = 173$ *кГ*.

4.16 (128). Шлюпка висит на двух шлюпбалках, причем вес ее, равный 960 *кГ*, распределяется между ними поровну. Шлюпбалка ABC нижним полушаровым концом опирается на подпятник A и на высоте 1,8 *м* над ним свободно проходит через подшипник B; вылет шлюпбалки равен 2,4 *м*. Пренебрегая весом шлюпбалки, определить давление ее на опоры A и B.



К задаче 4.16.

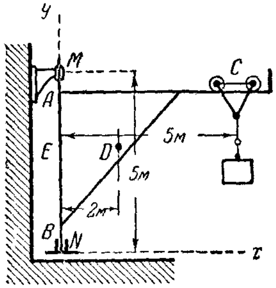
Ответ: $X_A = -640$ *кГ*; $Y_A = -480$ *кГ*; $X_B = 640$ *кГ*.

4.17 (129). Литейный кран ABC имеет вертикальную ось вращения MN; расстояния: $MN = 5$ *м*; $AC = 5$ *м*; вес крана 2 *т*; центр тяжести его D находится от оси вращения на расстоянии 2 *м*; вес груза, подвешенного в точке C, равен 3 *т*. Найти реакции подшипника M и подпятника N.

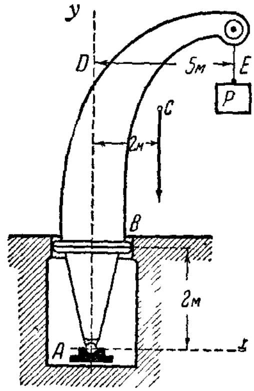
Ответ: $X_M = -3,8$ *т*; $X_N = 3,8$ *т*; $Y_N = 5$ *т*.

4.18 (130). Кран в шахте, поднимающий груз $P=4$ *т*, имеет подпятник A и в точке B опирается на гладкую цилиндрическую поверхность, ось которой Ay вертикальна. Длина хвоста AB равна 2 *м*. Вылет крана $DE=5$ *м*. Вес крана равен 2 *т* и приложен в точке C, расстояние которой от вертикали Ay равно 2 *м*. Определить реакции опор A и B.

Ответ: $X_A=12$ *т*; $Y_A=6$ *т*; $X_B=-12$ *т*.



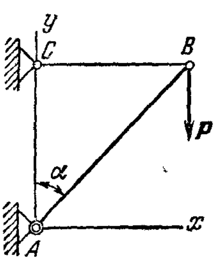
К задаче 4.17.



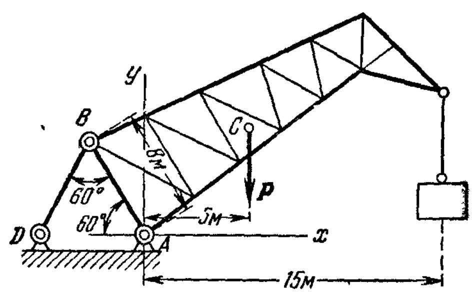
К задаче 4.18.

4.19 (131). Кран для подъема тяжестей состоит из балки AB, нижний конец которой соединен со стеной шарниром A, а верхний удерживается горизонтальным тросом BC. Определить натяжение T троса BC и давление на опору A, если известно, что вес груза $P=200$ *кГ*, вес балки AB равен 100 *кГ* и приложен в середине балки, а угол $\alpha=45°$.

Ответ: $T=250$ *кГ*; $X_A=-250$ *кГ*; $Y_A=-300$ *кГ*.



К задаче 4.19.

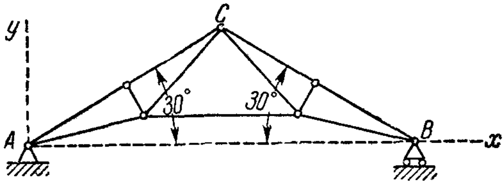


К задаче 4.20.

4.20 (132). Кран имеет шарниры в точках A, B и D, причем $AB=AD=BD=8$ *м*. Центр тяжести фермы крана находится на расстоянии 5 *м* от вертикали, проходящей через точку A. Вылет крана, считая от точки A, при этом равен 15 *м*. Поднимаемый груз весит 20 *т*; вес фермы $P=12$ *т*. Определить опорные реакции и натяжение стержня BD для указанного положения крана.

Ответ: $X_A=26$ *т*; $Y_A=77$ *т*; $T=52$ *т*.

4.21 (133). Симметричная стропильная ферма ABC у одного конца шарнирно укреплена в неподвижной точке A, а у другого конца B опирается катками на гладкую горизонтальную плоскость.

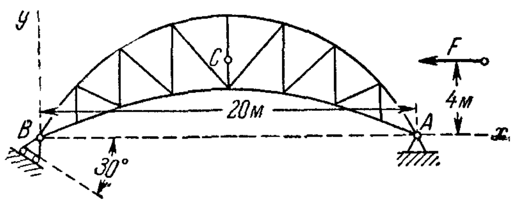


К задаче 4.21.

Вес фермы 10 *т*. Сторона AC находится под равномерно распределенным, перпендикулярным к ней давлением ветра; равнодействующая сил давления ветра равна 0,8 *т*. Длина $AB = 6$ *м*, угол $CAB = 30°$. Определить опорные реакции.

Ответ: $X_A = -0{,}4$ *т*; $Y_A = 5{,}46$ *т*; $Y_B = 5{,}23$ *т*.

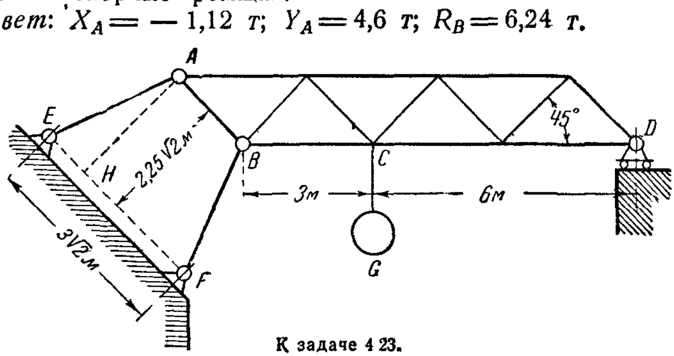
4.22 (134). Арочная ферма имеет неподвижный опорный шарнир в точке A, в точке B — подвижную гладкую опору, плоскость которой наклонена к горизонту под углом 30°. Пролет $AB = 20$ *м*. Центр тяжести фермы, вес которой вместе со снеговой нагрузкой



К задаче 4.22.

равен 10 *т*, находится в точке C, расположенной над серединой пролета AB. Равнодействующая сил давления ветра F равна 2 *т* и направлена параллельно AB, линия ее действия отстоит от AB на 4 *м*. Определить опорные реакции.

Ответ: $X_A = -1{,}12$ *т*; $Y_A = 4{,}6$ *т*; $R_B = 6{,}24$ *т*.



К задаче 4.23.

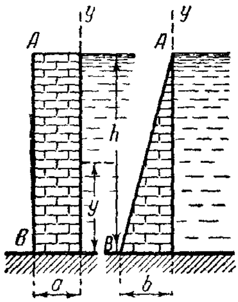
4.23 (135). Ферма $ABCD$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF наклонены к горизонту под углом 45°; длина панели $BC = 3$ *м*; стержни AE и BF одинаковой длины; расстояние $EF = 3\sqrt{2}$ *м*; $AH = 2{,}25\sqrt{2}$ *м*. Вес фермы и нагрузки равен 7,5 *т* и направлен по прямой CQ. Найти реакцию катков R_D.

Ответ: $R_D = 1{,}5$ *т*.

4.24 (139). Давление воды на маленькую площадку плотины возрастает пропорционально расстоянию ее от свободной поверхности воды и равно весу столба воды, высота которого равна этому расстоянию, а площадь основания равна взятой площадке. Определить толщину плотины в ее основании в двух случаях:

1) когда поперечное сечение плотины прямоугольное;

2) когда это сечение треугольное.



К задаче 4 24.

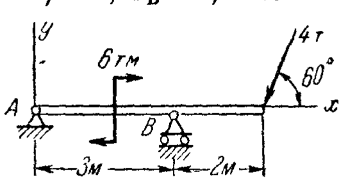
Плотина должна быть рассчитана на опрокидывание вокруг ребра B давлением воды, причем коэффициент устойчивости должен быть равен 2. Высота h плотины такая же, как глубина воды, и равна 5 *м*. Удельный вес воды $\gamma = 1\,т/м^3$, удельный вес материала плотины $\gamma_1 = 2{,}2\,т/м^3$.

Коэффициентом устойчивости называется отношение момента веса массива к моменту опрокидывающей силы. Давление воды на площадку плотины длиной 1 *м* и высотой dy, где y — расстояние площадки от дна в метрах, равно в тоннах $\gamma(h-y)\,dy$. Момент этого давления относительно точки B равен $\gamma(h-y)\,y\,dy$. Опрокидывающий момент равен $\int_0^h \gamma(h-y)\,y\,dy$.

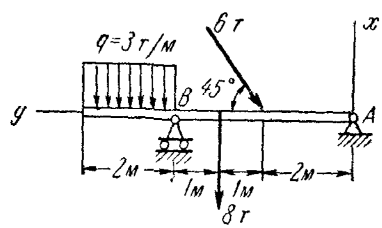
Ответ: $a = 2{,}75$ *м*; $b = 3{,}37$ *м*.

4.25. Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на чертеже.

Ответ: $X_A = 2$ *т*; $Y_A = -4{,}32$ *т*; $Y_B = 7{,}78$ *т*.



К задаче 4 25.



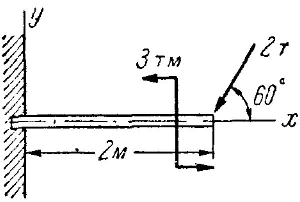
К задаче 4 26.

4.26. Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на чертеже.

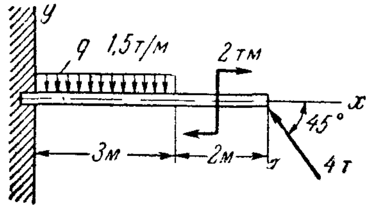
Ответ: $X_A = 2{,}6$ *т*, $Y_A = 4{,}2$ *т*; $X_B = 15{,}6$ *т*.

4.27. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ: $X = 1$ *т*; $Y = 1{,}73$ *т*; $M = 0{,}47$ *тм*.



К задаче 4 27.



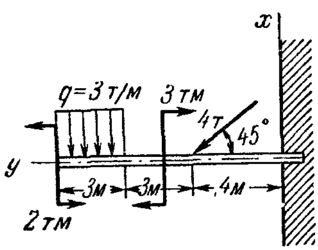
К задаче 4.28.

4.28. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

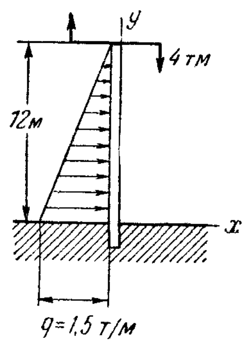
Ответ: $X = 2{,}8$ *т*; $Y = 1{,}7$ *т*; $M = -5{,}35$ *тм*.

4.29. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Ответ: $X = 11{,}8$ *т*; $Y = -2{,}8$ *т*; $M = -86{,}8$ *тм*.



К задаче 4.29.

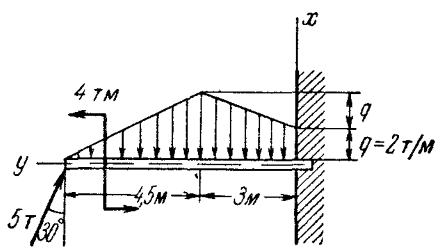


К задаче 4.30.

4.30. Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.

Ответ: $X = -9$ *т*; $Y = 0$; $M = 40$ *тм*.

4.31. Определить реакцию заделки консольной балки, изображенной на чертеже и находящейся под действием сосредоточенной силы, пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.

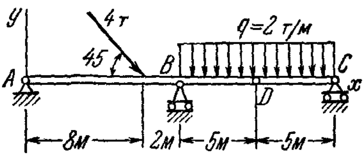


К задаче 4.31.

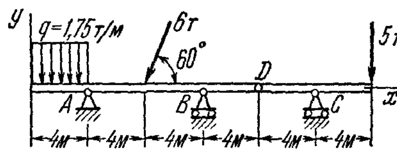
Ответ: $X = 13{,}7$ *т*; $Y = 2{,}5$ *т*; $M = -27$ *тм*.

4.32. Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на чертеже вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = -2{,}8$ *т*; $Y_A = -4{,}4$ *т*; $Y_B = 22{,}2$ *т*; $Y_C = 5$ *т*; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ *т*.



К задаче 4.32.



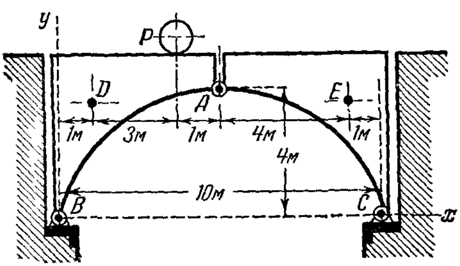
К задаче 4.33.

4.33. Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на чертеже вместе с нагрузкой.

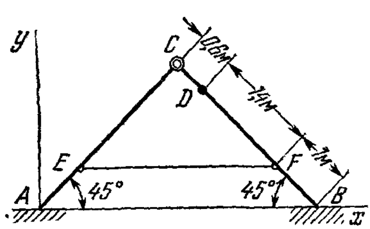
Ответ: $X_A = +3$ *т*; $Y_A = 13{,}8$ *т*; $Y_B = -6{,}6$ *т*; $Y_C = 10$ *т*; $X_D = 0$; $Y_D = \pm 5$ *т*.

4.34 (143). Мост состоит из двух частей, связанных между собой шарниром A и прикрепленных к береговым устоям шарнирами B и C. Вес каждой части моста 4 *т*; их центры тяжести D и E; на мосту находится груз $P = 2$ *т*; размеры указаны на чертеже. Определить давление в шарнире A и реакции в точках B и C.

Ответ: $X_A = \pm 2$ *т*; $Y_A = \mp 0{,}8$ *т*; $X_B = -X_C = 2$ *т*; $Y_B = 5{,}2$ *т*; $Y_C = 4{,}8$ *т*.



К задаче 4.34.



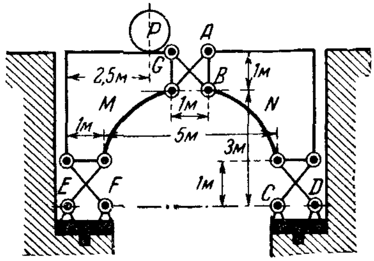
К задаче 4.35.

4.35 (147). На гладкой горизонтальной плоскости стоит передвижная лестница, состоящая из двух частей AC и BC, длиной 3 *м*, весом 12 *кГ* каждая, соединенных шарниром C и веревкой EF; расстояние $BF = AE = 1$ *м*; центр тяжести каждой из частей AC и BC находится в ее середине. В точке D на расстоянии $CD = 0{,}6$ *м* стоит человек, весящий 72 *кГ*.

Определить реакции пола и шарнира, а также натяжение T веревки EF, если угол $BAC = ABC = 45°$.

Ответ: $R_A = 40{,}8$ *кГ*; $R_B = 55{,}2$ *кГ*; $X_C = \pm 52{,}2$ *кГ*; $Y_C = \pm 28{,}8$ *кГ*; $T = 52{,}2$ *кГ*.

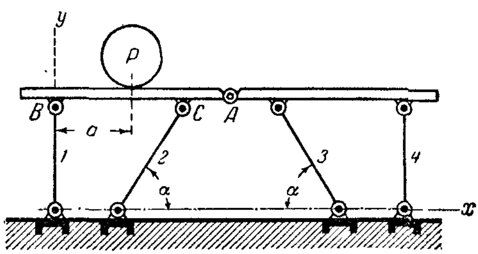
4.36 (148). Мост состоит из двух одинаковых частей M и N, соединенных между собой и с неподвижными опорами посредством шести стержней, наклоненных к горизонту под углом 45° и снабженных на концах шарнирами. Размеры указаны на чертеже. В точке G помещен груз весом P. Определить те усилия в стержнях, которые вызваны действием этого груза.



К задаче 4.36.

Ответ: $R_A = 0$; $R_B = P\frac{\sqrt{2}}{3}$; $R_C = 0$; $R_D = P\frac{\sqrt{2}}{3}$; $R_E = P\frac{\sqrt{2}}{2}$; $R_F = P\frac{\sqrt{2}}{6}$.

4.37 (149). Мост состоит из двух горизонтальных балок, соединенных шарниром A и прикрепленных шарнирно к основанию жесткими стержнями 1, 2, 3, 4, причем крайние стержни вертикальны, а средние наклонены к горизонту под углом $\alpha = 60°$. Соответствующие размеры равны: $BC = 6$ *м*; $AB = 8$ *м*. Определить усилия



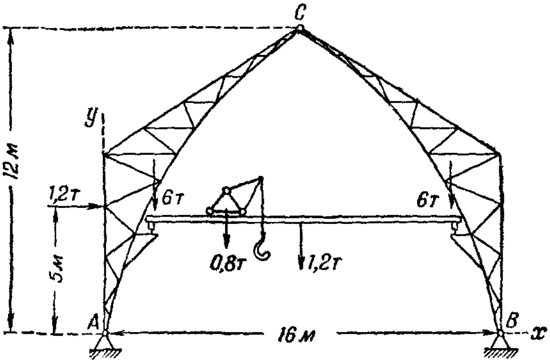
К задаче 4.37.

в стержнях и реакцию шарнира A, если мост несет вертикальную нагрузку $P = 15$ *т* на расстоянии $a = 4$ *м* от точки B.

Ответ: $S_1 = -6{,}25$ *т*; $S_2 = S_3 = -5{,}77$ *т*; $S_4 = 1{,}25$ *т*; $X_A = \pm 2{,}89$ *т*; $Y_A = \mp 3{,}75$ *т*.

4.38 (150). Вдоль мастерской, здание которой поддерживается трехшарнирной аркой, ходит по рельсам мостовой кран. Вес поперечной балки, передвигающейся по рельсам, 1,2 *т*; вес крана 0,8 *т* (кран не нагружен); линия действия веса крана отстоит от левого рельса на расстоянии 0,25 длины поперечной балки. Вес каждой половины арки равен 6 *т* и приложен на расстоянии 2 *м* от вертикали, проходящей через соответствующую опору A или B; опорные рельсы мостового крана расположены на расстоянии 1,8 *м* от этих вертикалей. Высота здания 12 *м*, ширина пролета 16 *м*. Равнодействующая сил давления ветра равна 1,2 *т* и направлена параллельно AB, линия ее действия отстоит от AB на 5 *м*. Определить реакции шарниров A и B и давление в шарнире C.

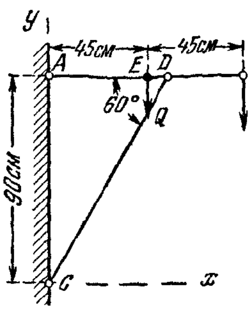
Ответ: $X_A = 0{,}2$ т; $Y_A = 6{,}78$ т; $X_B = -1{,}4$ т; $Y_B = 7{,}22$ т, $X_C = \pm 1{,}4$ т; $Y_C = \mp 0{,}42$ т.



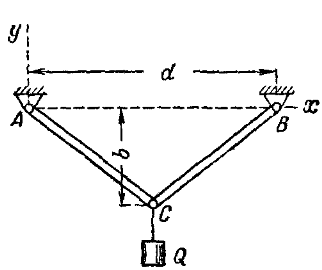
К задаче 4.38.

4.39 (151). Груз $P = 25$ *кГ* подвешен к концу горизонтального бруса AB. Вес бруса $Q = 10$ *кГ* и приложен в точке E. Брус прикреплен к стенке посредством шарнира A и подперт стержнем CD, с которым скреплен тоже посредством шарнира. Весом стержня CD пренебрегаем. Размеры указаны на чертеже. Определить реакции шарниров A и C.

Ответ: $X_A = -30$ *кГ*; $Y_A = -17$ *кГ*; $R_C = 60$ *кГ*.



К задаче 4.39.



К задаче 4.40.

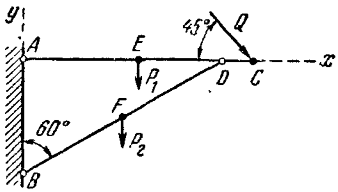
4.40 (152). Два однородных бруса одинаковой длины соединены шарнирно в точке C, а в точках A и B также шарнирно прикреплены к опорам. Вес каждого бруса равен P. В точке C подвешен груз Q. Расстояние $AB = d$. Расстояние точки C до горизонтальной прямой AB равно b. Определить реакции шарниров A и B.

Ответ: $-X_A = X_B = \frac{d}{4b}(P + Q)$; $Y_A = Y_B = P + \frac{Q}{2}$.

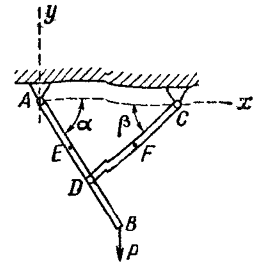
4.41(153). Два стержня AC и BD одинаковой длины шарнирно соединены в точке D и так же прикреплены к вертикальной стене в точках A и B. Стержень AC расположен горизонтально, стержень BD

образует угол 60° с вертикальной стеной. Стержень AC в точке E нагружен вертикальной силой $P_1 = 40$ *кГ* и в точке C силой $Q = 100$ *кГ*, наклоненной к горизонту под углом 45°. Стержень BD в точке F нагружен вертикальной силой $P_2 = 40$ *кГ*. Дано: $AE = EC$; $BF = FD$. Определить реакции шарниров A и B.

Ответ: $X_A = -287$ *кГ*; $Y_A = 6$ *кГ*; $X_B = 216$ *кГ*; $Y_B = 145$ *кГ*.



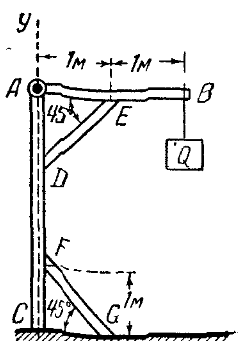
К задаче 4.41.



К задаче 4.42.

4.42 (154). Подвеска состоит из двух балок AB и CD, соединенных шарнирно в точке D и прикрепленных к потолку шарнирами A и C. Вес балки AB равен 60 *кГ* и приложен в точке E. Вес балки CD равен 50 *кГ* и приложен в точке F. В точке B к балке AB приложена вертикальная сила $P = 200$ *кГ*. Определить реакции в шарнирах A и C, если заданы следующие размеры: $AB = 1$ *м*; $CD = 0{,}8$ *м*; $AE = 0{,}4$ *м*; $CF = 0{,}4$ *м*; углы наклона балок AB и CD к горизонту соответственно равны: $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$.

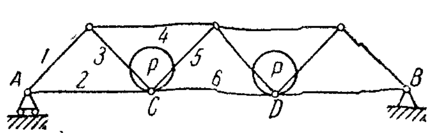
Ответ: $-X_A = X_C = 135$ *кГ*; $Y_A = 150$ *кГ*; $Y_C = 160$ *кГ*.



К задаче 4.43.

4.43 (155). Горизонтальная балка AB длиной 2 *м*, прикрепленная к вертикальному столбу AC в точке A и подпертая подкосом DE, несет на конце груз Q весом 500 *кГ*; столб AC укреплен подкосом FG, причем $AE = CG = 1$ *м*; подкосы DE и FG наклонены под углом 45° к горизонту. Найти усилия S_E и S_F в подкосах DE и FG и реакцию грунта в точке C, предполагая, что крепления шарнирные, и пренебрегая весом балки, столба и подкосов.

Ответ: $S_E = -1410$ *кГ*;
$S_F = -1410$ *кГ*;
$X_C = 1000$ *кГ*;
$Y_C = -500$ *кГ*.

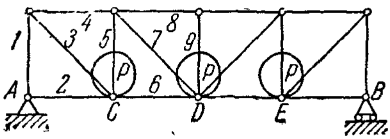


К задаче 4.44.

4.44 (156). В мостовой ферме, изображенной на чертеже, на узлы C и D приходится одинаковая вертикальная нагрузка $P = 10$ *т*; наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1, 2, 3, 4, 5* и *6*, вызываемые данной нагрузкой.

Ответ: $S_1 = -14{,}1$ *т*; $S_2 = 10$ *т*; $S_3 = 14{,}1$ *т*; $S_4 = -20$ *т*; $S_5 = 0$; $S_6 = 20$ *т*.

4.45 (157). В мостовой ферме, изображенной на чертеже, узлы *C*, *D* и *E* загружены одинаковой вертикальной нагрузкой $P = 10$ *т*. Наклонные стержни составляют углы 45° с горизонтом. Найти усилия в стержнях *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* и *9*, вызываемые данной нагрузкой.



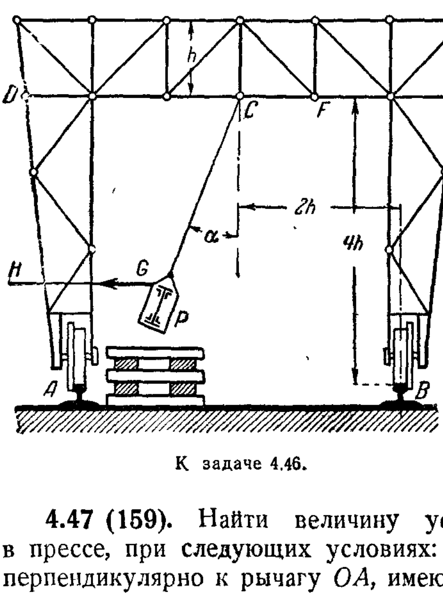
К задаче 4.45.

Ответ: $S_1 = -15$ *т*; $S_2 = 0$; $S_3 = 21{,}2$ *т*; $S_4 = -15$ *т*; $S_5 = -5$ *т*; $S_6 = 15$ *т*; $S_7 = 7{,}1$ *т*; $S_8 = -20$ *т*; $S_9 = 0$.

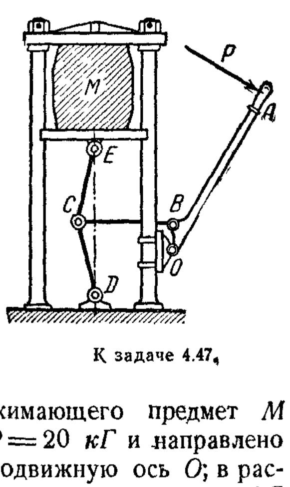
4.46 (158). Для сборки моста устроен временный деревянный кран, перемещающийся по рельсам *A* и *B* на колесах. К среднему узлу *C* нижнего пояса *DE* крана прикреплен блок, служащий для поднятия тяжестей с помощью цепи. Вес поднимаемого с подмостей груза $P = 5$ *т*, причем в момент отделения его от подмостей направление цепи составляет с вертикалью угол $\alpha = 20°$; во избежание колебаний груза он оттягивается горизонтальным канатом *GH*.

Предполагая, что горизонтальная составляющая натяжения цепи воспринимается одним правым рельсом *B*, определить усилие S_1 в горизонтальном стержне *CF* в момент отделения груза от подмостей и сравнить его с тем усилием S_2, которое получилось бы при угле $\alpha = 0$. Размеры указаны на чертеже.

Ответ: $S_1 = 10{,}46$ *т*; $S_2 = 5$ *т*.



К задаче 4.46.



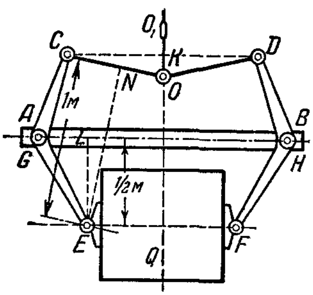
К задаче 4.47.

4.47 (159). Найти величину усилия, сжимающего предмет *M* в прессе, при следующих условиях: усилие $P = 20$ *кГ* и направлено перпендикулярно к рычагу *OA*, имеющему неподвижную ось *O*; в рассматриваемом положении пресса тяж *BC* перпендикулярен к *OB* и делит угол ECD пополам, причем $\angle CED = \operatorname{arctg} 0{,}2 = 11°20'$; длина $OA = 1$ *м*; $OB = 10$ *см*.

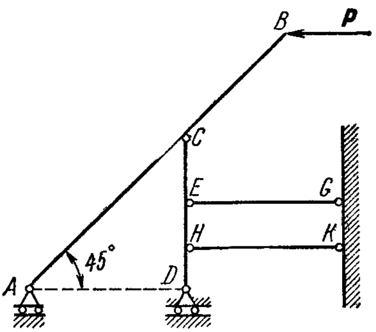
Ответ: 500 *кГ*.

4.48 (160). Цепь OO_1 самозахватывающего грузы приспособления соединена шарниром O со стержнями $OC = OD = 60$ *см*. Стержни соединены шарнирами же с двумя равными ломаными рычагами CAE и DBF, которые могут вращаться вокруг точек A и B соединительного стержня GH. В шарнирах E и F особые колодки удерживают груз $Q = 1$ *т* трением. Расстояние точки E от стержня GH равно $EL = 50$ *см*, а расстояние ее от стержня OC равно $EN = 1$ *м*. Высота треугольника COD равна $OK = 10$ *см*. Найти силу, растягивающую соединительный стержень GH, пренебрегая весом частей механизма.

Ответ: 6 *т*.



К задаче 4.48.



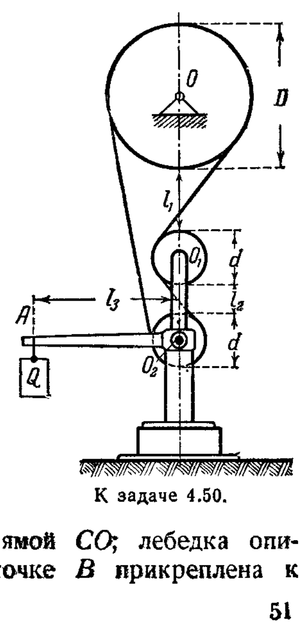
К задаче 4.49.

4.49. Определить реакции шарниров A, C, D, E и H в стержневой системе, изображенной на рисунке, если $CE = EH = HD$ и $AC = CB$.

Ответ. $R_A = R_D = R_H = P$; $R_E = 2P$, $R_C = P\sqrt{2}$. Стержень EG растянут, стержень HK сжат.

4.50 (162). Натяжение приводного ремня, осуществляемое при помощи ломаного рычага AO_2O_1 и натяжного ролика O_1, равно по ту и другую сторону ролика P *кГ*. Найти величину груза Q при равновесии системы, если дано: $\angle AO_2O_1 = 90°$; $D = 55$ *см*; $d = 15$ *см*; $l_1 = 35$ *см*; $l_2 = 15$ *см*; $l_3 = 45$ *см*; $P = 18$ *кГ*.

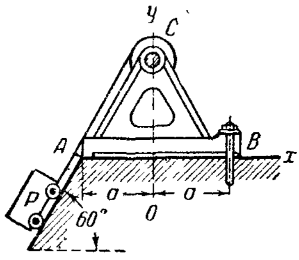
Ответ: $Q = 12$ *кГ*.



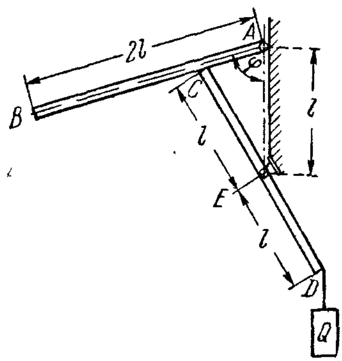
К задаче 4.50.

4.51 (163). Груз P весом 480 *кГ* удерживается на гладкой наклонной плоскости посредством веревки, параллельной плоскости и намотанной на неподвижный вал лебедки ABC. Угол наклона плоскости к горизонту равен 60°. Вес лебедки Q равен 240 *кГ*, ее центр тяжести находится на прямой CO; лебедка опирается в точке A на гладкий пол, а в точке B прикреплена к полу болтом. Найти опорные реакции, пренебрегая расстоянием веревки от плоскости.

Ответ: $Y_A = 480$ *кГ*; $X_B = 208$ *кГ*; $Y_B = 120$ *кГ*.



К задаче 4.51.



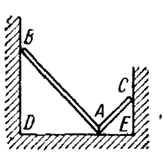
К задаче 4.52.

4.52 (164). Однородный стержень AB длиной $2l$ и весом P может вращаться вокруг горизонтальной оси на конце A стержня. Он опирается на однородный стержень CD той же длины $2l$, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину E. Точки A и E лежат на одной вертикали на расстоянии $AE = l$. К концу D подвешен груз $Q = 2P$. Определить величину угла φ, образуемого стержнем AB с вертикалью в положении равновесия, пренебрегая трением.

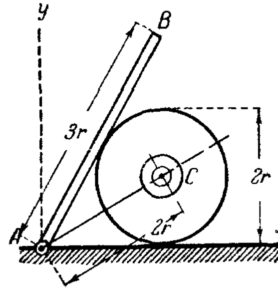
Ответ: $\varphi = \arccos\frac{1}{8} = 82^\circ 50'$.

4.53 (165). Два однородных стержня AB и AC опираются в точке A на гладкий горизонтальный пол и друг на друга по гладким вертикальным плоскостям, а в точках B и C на гладкие вертикальные стены. Определить расстояние DE между стенами, при котором стержни находятся в положении равновесия, образуя друг с другом угол в 90°, если дано: длина AB равна a, длина AC равна b, вес AB равен P_1, вес AC равен P_2.

Ответ: $DE = \dfrac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$.



К задаче 4.53.



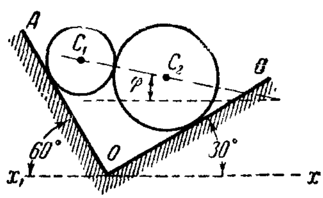
К задаче 4.54.

4.54 (166). Однородный брусок AB, который может вращаться вокруг горизонтальной оси A, опирается на поверхность гладкого цилиндра радиуса r, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости и удерживаемого нерастяжимой нитью AC. Вес бруска 16 *кГ*; длина $AB = 3r$, $AC = 2r$. Определить натяжение нити T и давление бруска на шарнир A.

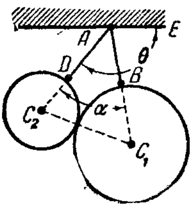
Ответ: $T = 6{,}9$ *кГ*; $X_A = -6$ *кГ*; $Y_A = -12{,}5$ *кГ*.

4.55 (167). Между двумя гладкими наклонными плоскостями OA и OB положены два гладких соприкасающихся однородных цилиндра: цилиндр с центром C_1 весом $P_1 = 10$ *н* и цилиндр с центром C_2 весом $P_2 = 30$ *н*. Определить угол φ, составляемый прямой C_1C_2 с горизонтальной осью xOx_1, давления N_1 и N_2 цилиндров на плоскости, а также величину N взаимного давления цилиндров, если угол $AOx_1 = 60°$, а угол $BOx = 30°$.

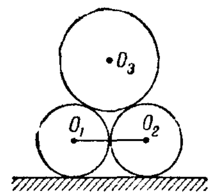
Ответ: $\varphi = 0$; $N_1 = 20$ *н*; $N_2 = 34{,}6$ *н*; $N = 17{,}3$ *н*.



К задаче 4.55.



К задаче 4.56.



К задаче 4.57.

4.56 (168). Два гладких однородных шара C_1 и C_2, радиусы которых R_1 и R_2, а веса P_1 и P_2, подвешены на веревках AB и AD в точке A; $AB = l_1$; $AD = l_2$; $l_1 + R_1 = l_2 + R_2$; угол $BAD = \alpha$. Определить угол θ, образуемый веревкой AD с горизонтальной плоскостью AE, натяжения веревок T_1, T_2 и давление одного шара на другой.

Ответ: $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{P_2 + P_1\cos\alpha}{P_1\sin\alpha}$; $\quad T_1 = P_1\dfrac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

$$T_2 = \bar{P}_2\frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}; \qquad N = P_2\frac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

4.57 (169). На двух одинаковых круглых однородных цилиндрах радиусом r и весом P каждый, лежащих на горизонтальной плоскости и связанных за центры нерастяжимой нитью длиной $2r$, покоится третий однородный цилиндр радиусом R и весом Q. Определить натяжение нити, давление цилиндров на плоскость и взаимное давление цилиндров. Трением пренебречь.

Ответ: Давление каждого нижнего цилиндра на плоскость равно

$$P + \frac{Q}{2}.$$

Давление между верхним и каждым из нижних цилиндров равно

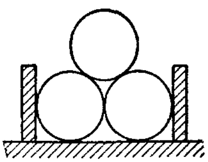
$$\frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

Натяжение нити равно

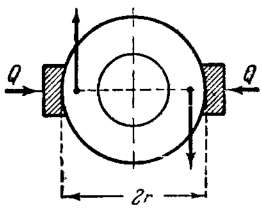
$$\frac{Qr}{2\sqrt{R^2+2rR}}.$$

4.58 (170). Три одинаковых трубы весом $M=120$ *кГ* каждая лежат, как указано на чертеже. Определить давление каждой из нижних труб на землю и на удерживающие их с боков стенки. Трением пренебречь.

Ответ: Давление на землю равно 180 *кГ*. Давление на каждую стенку равно 34,6 *кГ*.



К задаче 4.58.



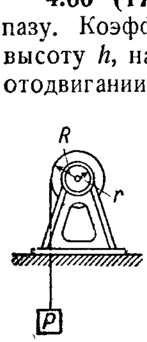
К задаче 4.59.

4.59 (171). К валу приложена пара сил с моментом $M=100$ *кГм*. На валу заклинено тормозное колесо, радиус r которого равен 25 *см*. Найти, с какой силой Q надо прижимать к колесу тормозные колодки, чтобы колесо оставалось в покое, если коэффициент трения покоя f между колесом и колодками равен 0,25.

Ответ: $Q=800$ *кГ*.

4.60 (172). Трамвайная дверь отодвигается с трением в нижнем пазу. Коэффициент трения f не более 0,5. Определить наибольшую высоту h, на которой можно поместить ручку двери, чтобы дверь при отодвигании не опрокидывалась. Ширина двери $l=0,8$ *м*; центр тяжести двери находится на ее вертикальной оси симметрии.

Ответ: $h=\frac{l}{2f}=0,8$ *м*.



К задаче 4.61.

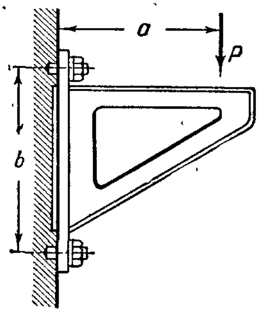
4.61 (173). Цилиндрический вал веса Q и радиуса R приводится во вращение грузом, подвешенным к нему на веревке; вес груза равен P. Радиус шипов вала $r=R/2$. Коэффициент трения в подшипниках равен 0,05. Определить, при каком отношении веса Q к весу P груза последний опускается равномерно.

Ответ: $\frac{Q}{P}=39$.

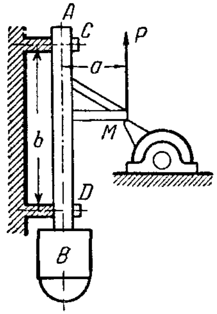
4.62 (174). Кронштейн, нагруженный вертикальной силой $P=600$ *кГ*, прикреплен к стене двумя болтами. Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной $f=0,3$. Для большей осторожности расчет произвести в предположении, что затянут только верхний болт и что болты поставлены с зазором и не должны работать на срез. Дано $\frac{b}{a} > f$.

Указание. Затяжкой называется усилие, действующее вдоль оси болта. Полная затяжка верхнего болта состоит из двух частей: первая устраняет возможность отрыва кронштейна и опрокидывания его вокруг нижнего болта, вторая обеспечивает то нормальное давление верхней части кронштейна на стену, которое вызывает необходимую силу трения.

Ответ: 2000 *кГ*.



К задаче 4.62.

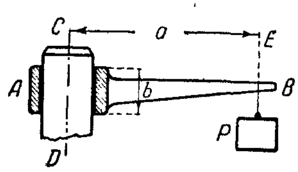


К задаче 4.63.

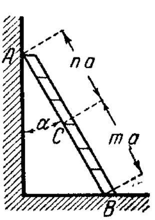
4.63 (175). Пест AB приводится в движение пальцами M, насаженными на вал. Вес песта 180 *кГ*. Расстояние между направляющими C и D равно $b = 1{,}5$ *м*. Расстояние точки прикосновения пальца к выступу от оси песта $a = 0{,}15$ *м*. Найти силу P, необходимую для подъема песта, если принять во внимание силу трения между направляющими C и D и пестом, равную 0,15 давления между трущимися частями.

Ответ: $P = 186$ *кГ*.

4.64 (176). Горизонтальный стержень AB имеет на конце A отверстие, которым он надет на вертикальную круглую стойку CD; длина втулки $b = 2$ *см*; в точке E на расстоянии a от оси стойки к стержню подвешен груз P. Определить, пренебрегая весом стержня AB, расстояние a так, чтобы под действием груза P стержень оставался в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стойкой $f = 0{,}1$.



К задаче 4.64.



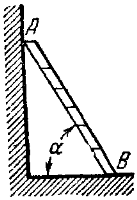
К задаче 4.65.

Ответ: $a \geqslant 10$ *см*.

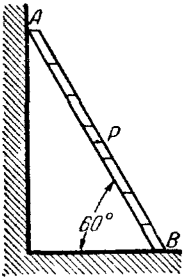
4.65 (177). К вертикальной стене приставлена лестница AB, опирающаяся своим нижним концом на горизонтальный пол. Коэффициент трения лестницы о стену f_1, о пол f_2. Вес лестницы вместе с находящимся на ней человеком равен p и приложен в точке C, которая делит длину лестницы в отношении $m:n$. Определить наибольший угол α, составляемый лестницей со стеной в положении равновесия, а также нормальные составляющие реакций N_A стены и N_B пола для этого значения α.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{(m+n)f_2}{m-nf_1f_2}$; $N_A=\frac{pf_2}{1+f_1f_2}$; $N_B=\frac{p}{1+f_1f_2}$.

4.66 (178). Лестница AB весом P упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный негладкий пол. Коэффициент трения лестницы о пол равен f. Под каким углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться доверху человек, вес которого p?



К задаче 4.66.



К задаче 4.67.

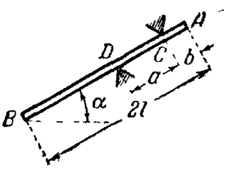
Ответ: $\operatorname{tg}\alpha\geqslant\frac{P+2p}{2f(P+p)}$.

4.67 (179). Лестница AB опирается на негладкую стену и негладкий пол, составляя с последним угол 60°. На лестнице помещается груз P. Пренебрегая весом лестницы, определить графически наибольшее расстояние BP, при котором лестница остается в покое. Угол трения для стены и пола равен 15°.

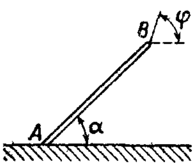
Ответ: $BP=\frac{1}{2}AB$.

4.68 (180). Тяжелый однородный стержень AB лежит на двух опорах C и D, расстояние между которыми $CD=a$, $AC=b$. Коэффициент трения стержня об опоры равен f. Угол наклона стержня к горизонту равен α. Какому условию должна удовлетворять длина стержня $2l$ для того, чтобы стержень находился в равновесии, если толщиной его можно пренебречь?

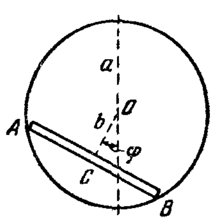
Ответ: $2l\geqslant 2b+a+\frac{a}{f}\operatorname{tg}\alpha$, $l>a+b$. Первое условие включает второе при $\alpha>\varphi$, где $\varphi=\operatorname{arctg}f$ — угол трения; если же $\alpha<\varphi$, то достаточно удовлетворить второму условию. При $l<a+b$ равновесие при принятом на чертеже расположении опоры C невозможно.



К задаче 4.68.



К задаче 4.69.



К задаче 4.70.

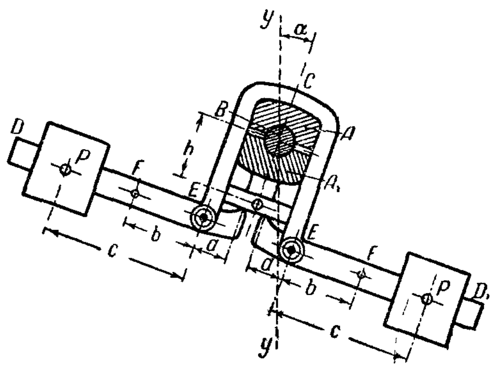
4.69 (181). Однородный брус опирается в точке A на негладкий горизонтальный пол и удерживается в точке B веревкой. Коэффициент трения бруса о пол равен f. Угол α, образуемый брусом с полом, равен 45°. При каком угле φ наклона веревки к горизонту брус начнет скользить?

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi = 2 + \frac{1}{f}$.

4.70 (182). Однородный стержень своими концами A и B может скользить по негладкой окружности радиуса a. Расстояние OC стержня до центра O окружности, расположенной в вертикальной плоскости, равно b. Коэффициент трения между стержнем и окружностью равен f. Определить для положений равновесия стержня угол φ, составляемый прямой OC с вертикальным диаметром окружности.

Ответ: $\operatorname{ctg}\varphi \geqslant \frac{b^2(1+f^2)}{a^2 f} - f$.

4.71 (183). Для определения коэффициента трения употребляется прибор, состоящий из подшипника AA_1, надетого на вращающийся вокруг горизонтальной оси шип B. Обе половины подшипника прижимаются к шипу при помощи скобы C и двух рычагов D и D_1, короткие плечи которых, длиной $a = 30$ *мм*, производят на нижнюю половину A_1 подшипника давление, вызываемое грузами P и весом рычагов. Вес всего прибора, т. е. подшипника, скобы, рычагов и грузов, $Q = 40$ *кГ*, его центр тяжести лежит ниже оси шипа на расстоянии $h = 120$ *мм*; вес каждого из рычагов $p = 7$ *кГ* и приложен к точке F на расстоянии $b = 510$ *мм* от оси рычага E; грузы же P, каждый по 8 *кГ*, действуют в точках, находящихся на расстоянии $c = 900$ *мм* от осей E. Вес q нижней половины подшипника равен 6 *кГ*. При вращении шипа ось прибора отклоняется от вертикали yy на угол $\alpha = 5°$. Определить коэффициент трения f между шипом и подшипником, если диаметр шипа $d = 100$ *мм*.



К задаче 4.71.

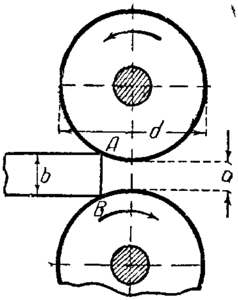
Ответ: $f = 0{,}0057$. Коэффициент трения находим из уравнения

$$\left\{\left(2\frac{pb+Pc}{a} - q\right) + \left[2\frac{pb+Pc}{a} + (Q-q)\right]\right\} f\frac{d}{2} = Qh\operatorname{tg}\alpha.$$

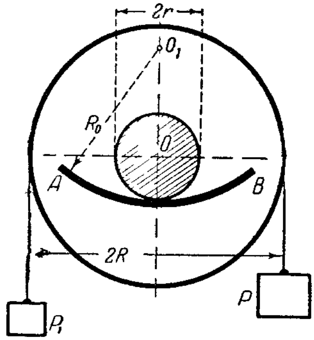
4.72 (184). Прокатный стан состоит из двух валов диаметром $d = 50$ *см*, вращающихся в противоположные стороны, указанные стрелками на чертеже; расстояние между валами $a = 0{,}5$ *см*. Какой толщины b листы можно прокатывать на этом стане, если коэффициент трения для раскаленного железа и чугунных валов $f = 0{,}1$?

Для работы стана необходимо, чтобы лист захватывался вращающимися валами, т. е. чтобы равнодействующая приложенных к листу нормальных реакций и сил трения в точках A и B была направлена по горизонтали вправо

Ответ: $b \leqslant 0,75$ *см*.

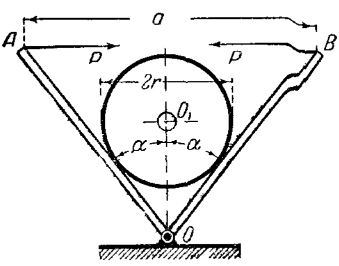


К задаче 4.72



К задаче 4.73.

4.73 (185). Блок радиуса R снабжен двумя шипами радиуса r, симметрично расположенными относительно его средней плоскости. Шипы опираются на две цилиндрические поверхности AB с горизонтальными образующими. На блок намотан трос, к которому подвешены грузы P и P_1, причем $P > P_1$. Определить наименьшую величину груза P_1, при которой блок будет находиться в равновесии, предполагая, что коэффициент трения шипов о цилиндрические поверхности AB равен f, а вес блока с шипами Q.



К задаче 4.74

Указанное на чертеже положение системы не может быть положением равновесия; последнее требуется предварительно найти.

Ответ: В положении равновесия плоскость, проходящая через оси цилиндра AB и блока, образует с вертикалью угол, равный углу трения;

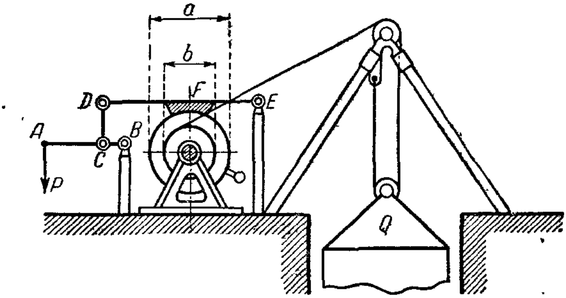
$$P_1 = \frac{P\left(R\sqrt{1+f^2} - fr\right) - frQ}{R\sqrt{1+f^2} + fr}.$$

4.74 (186). Между двумя пластинами AO и BO, соединенными шарниром O, помещен однородный цилиндр, ось которого O_1 параллельна оси шарнира; обе оси горизонтальны и лежат в одной вертикальной плоскости. Пластины сжимают цилиндр под действием двух горизонтальных, равных и прямо противоположных сил P, приложенных в точках A и B. Вес цилиндра Q, его радиус r, коэффициент трения цилиндра о пластины равен f, угол $AOB = 2\alpha$, расстояние $AB = a$. Какому условию должна удовлетворять величина сил P для того, чтобы цилиндр находился в равновесии?

Ответ: 1) $\operatorname{tg}\alpha > f$; $\frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha + f\cos\alpha} \leqslant P \leqslant \frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha - f\cos\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \leqslant f$; $P \geqslant \frac{r}{a}\frac{Q}{\sin\alpha + f\cos\alpha}$.

4.75 (187). Для опускания грузов в шахту употребляется ворот с тормозом, изображенный на чертеже. С барабаном, на который на-

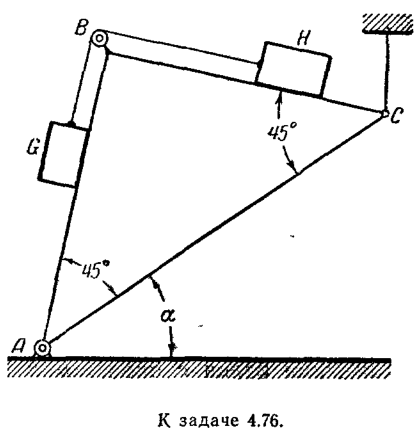


К задаче 4.75.

мотана цепь, скреплено концентрическое деревянное колесо, которое тормозят, надавливая на конец A рычага AB, соединенного цепью CD с концом D тормозного рычага ED. Диаметр колеса $a = 50$ *см*; диаметр барабана $b = 20$ *см*; $ED = 120$ *см*; $FE = 60$ *см*; $AB = 1$ *м*; $BC = 10$ *см*. Определить силу P, уравновешивающую груз $Q = 800$ *кГ*, подвешенный к подвижному блоку, если коэффициент трения дерева о сталь $f = 0{,}4$; размерами колодки F пренебрегаем.

Ответ: $P = 20$ *кГ*.

4.76 (188). На гранях AB и BC призмы ABC помещены два одинаковых тела G и H весом P, связанные нитью, перекинутой через блок в точке B. Коэффициент трения между телами и гранями призмы равен f. Углы BAC и BCA равны 45°. Определить, пренебрегая трением на блоке, величину угла α наклона грани AC к горизонту, необходимую для того, чтобы груз G начал опускаться.



К задаче 4.76.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = f$.

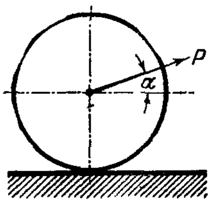
4.77 (189). Глубина заложения опор железнодорожного моста, перекинутого через реку, рассчитана в том предположении, что вес опоры с приходящимся на нее грузом уравновешивается давлением грунта на дно опоры и боковым трением, причем грунт — мелкозернистый песок, насыщенный водой, принимается за жидкое тело. Вычислить глубину h заложения этих опор, если нагрузка на опору

150 *т*, вес опоры на 1 *м* ее высоты 8 *т*, высота опоры над дном реки 9 *м*, высота воды над дном 6 *м*, площадь основания опоры 3,5 $м^2$, боковая поверхность опоры на 1 *м* высоты 7 $м^2$, вес 1 $м^3$ песку, насыщенного водой, равен 1,8 *т*, вес 1 $м^3$ воды равен 1 *т* и коэффициент трения о песок стального футляра, в котором заключена каменная опора, 0,18.

При расчете трения принимаем во внимание, что среднее боковое давление на 1 $м^2$ равно в тоннах $6+0{,}9h$.

Ответ: $h = 11$ *м*.

4.78 (190). Определить угол α наклона плоскости к горизонту, при котором ролик радиуса $r = 50$ *мм* равномерно катится по плоскости. Материал трущихся тел — сталь, коэффициент трения качения $k = 0{,}05$ *мм*.



К задаче 4.79.

Ввиду малости угла α можно принять $\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\alpha = 3'26''$.

4.79 (191). Определить силу P, необходимую для равномерного качения цилиндрического катка диаметром 60 *см* и весом 300 *кГ* по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения качения $k = 0{,}5$ *см*, а угол, составляемый силой P с горизонтальной плоскостью, равен $\alpha = 30°$.

Ответ: $P = 5{,}72$ *кГ*.

4.80 (192). На горизонтальной плоскости лежит шар радиуса R и веса Q. Коэффициент трения скольжения шара о плоскости f, коэффициент трения качения k. При каких условиях горизонтальная сила P, приложенная в центре шара, сообщает ему равномерное качение?

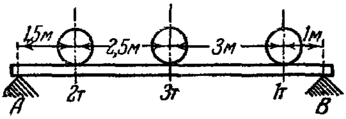
Ответ: $\frac{k}{R} < f$; $P = Q\frac{k}{R}$.

§ 5. Графическая статика

В ответах к задачам по графической статике числа со знаком + выражают растягивающие усилия, а числа со знаком — сжимающие усилия.

5.1 (193). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции балки с пролетом 8 *м*, вызываемые тремя грузами: 2 *т*, 3 *т* и 1 *т*, которые расположены, как указано на чертеже. Вес балки не учитывать.

Ответ: $R_A = 3{,}25$ *т*; $R_B = 2{,}75$ *т*.



К задаче 5.1.

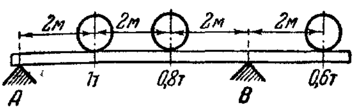
К задаче 5.2.

5.2 (194). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции консольной балки длиной 8 *м* с пролетом 5 *м*, вызываемые грузами 2 *т* и 3 *т*, которые помещены на концах, как указано на чертеже. Вес балки не учитывать.

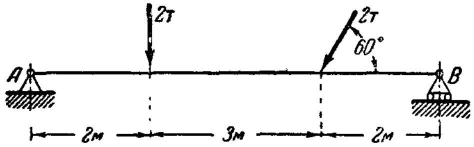
Ответ: $R_A = 2{,}2$ *т*; $R_B = 2{,}8$ *т*.

5.3 (195). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции консольной балки длиной 8 *м* с пролетом 6 *м*, вызываемые тремя грузами: 1 *т*, 0,8 *т* и 0,6 *т*, которые расположены, как указано на чертеже. Вес балки не учитывать.

Ответ: $R_A = 0{,}73$ *т*; $R_B = 1{,}67$ *т*.



К задаче 5.3.



К задаче 5.4.

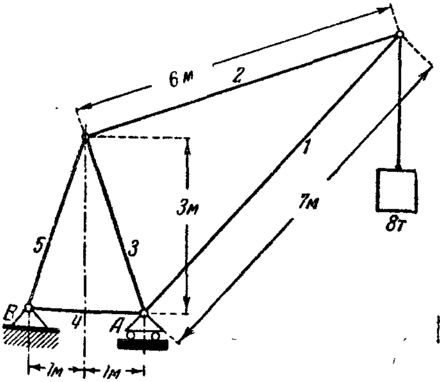
5.4 (196). Невесомая балка *AB* нагружена двумя силами так, как это показано на чертеже. Определить графически и проверить аналитически реакции опор.

Ответ: $R_A = 2{,}17$ *т*; $R_B = 1{,}81$ *т*.

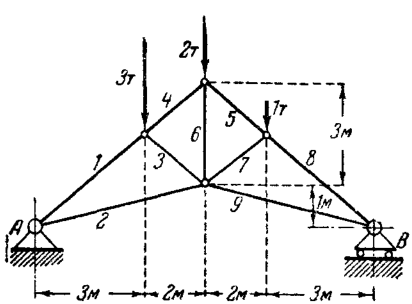
5.5 (197). Определить опорные реакции и усилия в стержнях крана, изображенного на чертеже, при нагрузке в 8 *т*. Весом стержней пренебречь.

Ответ: $R_A = 26$ *т*; $R_B = 18$ *т* — вниз.

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие в *т*	−16,4	+11,5	−14,3	−6	+19



К задаче 5.5.



К задаче 5.6.

5.6 (198). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях стропильной фермы, изображенной вместе с приложенными к ней силами на чертеже.

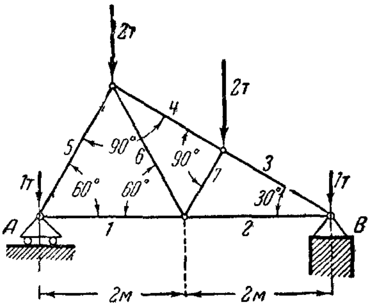
Ответ: $R_A = 3{,}4$ *т*; $R_B = 2{,}6$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в *т*	−7,3	+5,8	−2,44	−4,7	−4,7	+3,9	−0,81	−5,5	+4,4

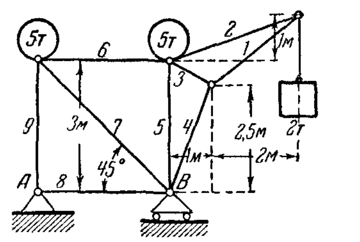
5.7 (199). Определить опорные реакции и усилия в стержнях пильчатой фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на чертеже.

Ответ: $R_A = 3{,}25$ *т*; $R_B = 2{,}75$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Усилие в *т*	+1,3	+3,03	−3,5	−2,5	−2,6	+1,73	−1,73



К задаче 5 7.



К задаче 5 8.

5.8 (200). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях фермы крана, изображенного вместе с приложенными к нему силами на чертеже.

Ответ: $R_A = 3$ *т*; $R_B = 9$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в *т*	−6,0	+5,1	−3,13	−5,4	−2,0	+2,0	−2,83	0	−3,0

5.9 (201). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях фермы крана, изображенного на чертеже, при нагрузке в 2 *т*.

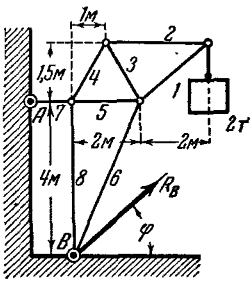
Ответ: $R_A = 2$ *т*; $R_B = 2{,}83$ *т*; $\varphi = 45°$.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8
Усилие в *т*	−3,33	+2,67	−2,4	+2,4	+0,67	−4,47	+2	+2

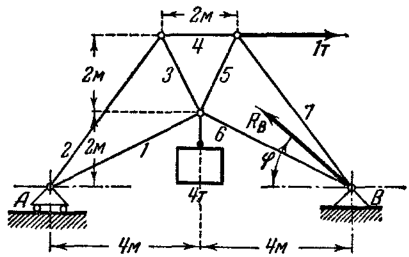
5.10 (202). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на чертеже.

Ответ: $R_A = 1{,}5$ *т*; $R_B = 2{,}7$ *т*; $\varphi = 68°$.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7
Усилие в *т*	+2	−3	+2,7	−3	+3,6	+1,57	−4



К задаче 5.9.



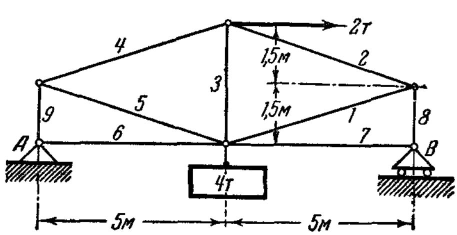
К задаче 5.10.

5.11 (203). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с действующими на него силами на чертеже.

Как в этой, так и в следующих задачах ось Ox направлена по горизонтальной прямой AB вправо, а ось Oy — по вертикали вверх.

Ответ: $X_A = -2$ *т*; $Y_A = 1{,}4$ *т*; $Y_B = 2{,}6$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в *т*	+4,5	−4,5	+2	−2,44	+2,44	+2	0	−2,6	−1,4

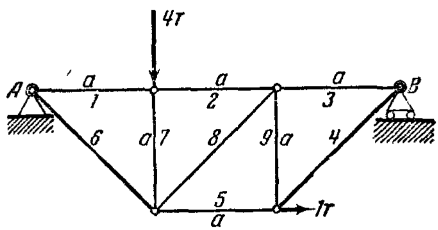


К задаче 5.11.

5.12 (204). Определить опорные реакции и усилия в стержнях раскосной фермы, изображенной на чертеже вместе с нагрузкой.

Ответ: $X_A = -1$ т; $Y_A = 3$ т; $Y_B = 1$ т.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в т	−2	−2	−1	+1,41	+2	+4,24	−4	+1,41	−1

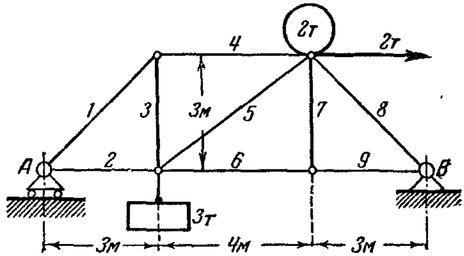


К задаче 5.12.

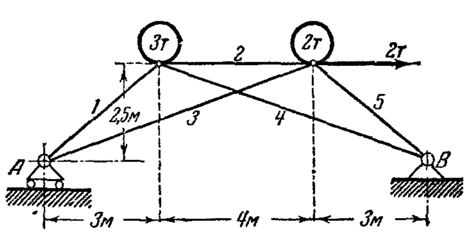
5.13 (205). Определить опорные реакции и усилия в стержнях мостовой фермы, которая вместе с приложенными к ней силами изображена на чертеже.

Ответ: $Y_A = 2{,}1$ т; $X_B = -2$ т; $Y_B = 2{,}9$ т.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Усилие в т	−2,97	+2,1	+2,1	−2,1	+1,5	+0,9	0	−4,1	+0,9



К задаче 5.13.



К задаче 5.14.

5.14 (206). Определить графически и проверить аналитически опорные реакции и усилия в стержнях сооружения, изображенного вместе с приложенными к нему силами на чертеже. Стержни *3* и *4* не соединены шарниром в точке их пересечения.

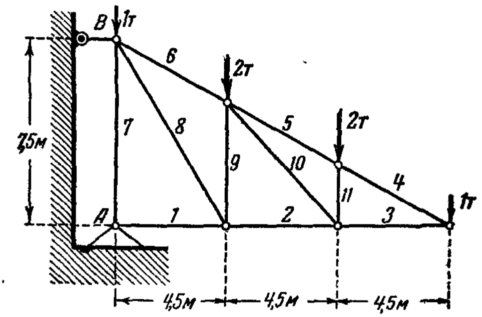
Ответ: $Y_A = 2{,}2$ *т*; $X_B = -2$ *т*; $Y_B = 2{,}8$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5
Усилие в т	−6	−7	+4,9	+2,53	−5,7

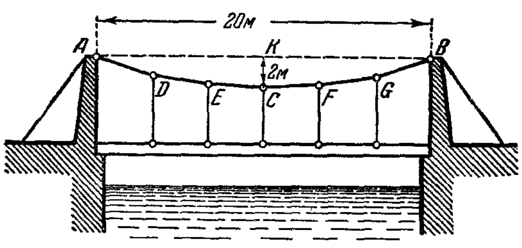
5.15 (207). Определить опорные реакции и усилия в стержнях навесной фермы, изображенной вместе с действующими на нее силами на чертеже.

Ответ: $X_A = 5{,}4$ *т*; $Y_A = 6$ *т*; $X_B = -5{,}4$ *т*.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Усилие в т	−5,4	−3,6	−1,8	+2,06	+2,06	+4,1	−6	+3,5	−3	+2,7	−2



К задаче 5.15

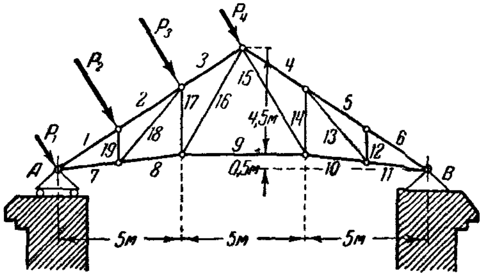


К задаче 5.16.

5.16 (208). Цепной мост длиной $AB = 20$ *м* поддерживается двумя цепями; стрела провисания цепей $CK = 2$ *м*; нагрузка моста составляет 1,6 *т* на погонный метр. Определить натяжение цепи в средней точке C, зная, что кривая, на которой лежат вершины веревочного многоугольника $ADECFGB$, — парабола.

Ответ: 20 *т*.

5.17 (209). В узлах стропильной фермы с равными панелями вследствие давления ветра возникают силы, перпендикулярные к кровле: $P_1 = P_4 = 312{,}5$ *кГ* и $P_2 = P_3 = 625$ *кГ*. Определить вызываемые



К задаче 5.17.

ветром реакции опор и усилия в стержнях фермы, размеры которой указаны на чертеже.

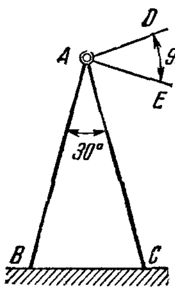
Ответ: $Y_A = 997$ *кГ*; $X_B = 1040$ *кГ*; $Y_B = 563$ *кГ*; $S_1 = -1525$ *кГ*; $S_2 = -1940$ *кГ*; $S_3 = -1560$ *кГ*; $S_4 = S_5 = S_6 = -970$ *кГ*; $S_7 = +1100$ *кГ*; $S_8 = 440$ *кГ*; $S_9 = -215$ *кГ*; $S_{10} = S_{11} = -230$ *кГ*; $S_{12} = S_{13} = S_{14} = 0$; $S_{15} = -26$ *кГ*; $S_{16} = +1340$ *кГ*; $S_{17} = -1130$ *кГ*; $S_{18} = +1050$ *кГ*; $S_{19} = -750$ *кГ*.

ГЛАВА II
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

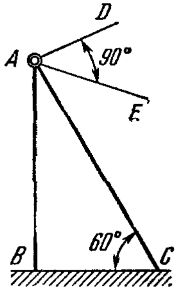
§ 6. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке

6.1 (210). Угловой столб составлен из двух одинаково наклоненных брусьев AB и AC, скрепленных в вершине посредством шарнира. Угол $BAC = 30°$. Столб поддерживает два горизонтальных провода AD и AE, составляющих между собой прямой угол. Натяжение каждого провода равно 100 *кГ*. Определить усилия в брусьях, предполагая, что плоскость BAC делит пополам угол DAE, и пренебрегая весом брусьев.

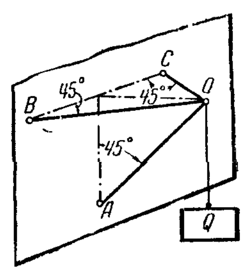
Ответ: $S_B = -S_C = 273$ *кГ*.



К задаче 6.1.



К задаче 6.2.



К задаче 6.3.

6.2 (211). Горизонтальные провода телеграфной линии подвешены к телеграфному столбу AB с подкосом AC и составляют угол $DAE = 90°$. Натяжение проводов AD и AE соответственно равны 120 *н* и 160 *н*. В точке A крепление шарнирное. Найти угол α между плоскостями BAC и BAE, при котором столб не испытывает бокового изгиба, и определить усилие S в подкосе, если он поставлен под углом 60° к горизонту. Весом столба и подкоса пренебречь.

Ответ: $\alpha = \arcsin \frac{3}{5} = 36°50'$; $S = -400$ *н*.

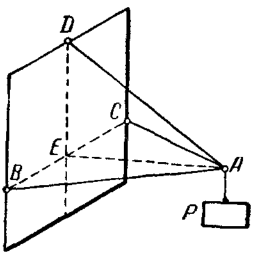
6.3 (212). Груз $Q = 100$ *кГ* поддерживается брусом AO, шарнирно закрепленным в точке A и наклоненным под углом 45°

к горизонту, и двумя горизонтальными цепями BO и CO одинаковой длины; $\angle CBO = \angle BCO = 45°$. Найти усилие S в брусе и натяжения T цепей.

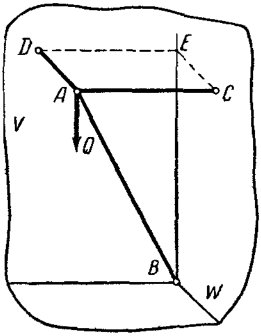
Ответ: $S = -141$ *кГ*; $T = 71$ *кГ*.

6.4 (213). Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AB и AC и усилие T в тросе AD, если дано, что $\angle CBA = \angle BCA = 60°$, $\angle EAD = 30°$. Вес груза P равен 300 *кГ*. Плоскость ABC горизонтальна. Крепления стержней в точках A, B и C шарнирные.

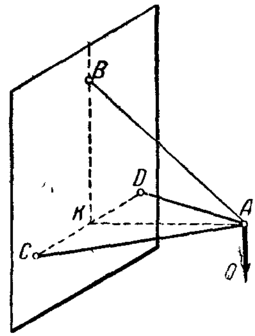
Ответ: $T = 600$ *кГ*; $S_1 = S_2 = -300$ *кГ*.



К задаче 6.4.



К задаче 6.5.



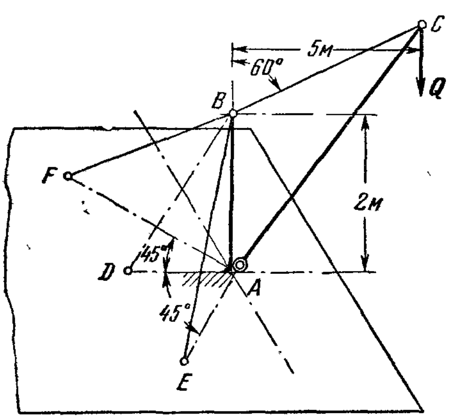
К задаче 6.6.

6.5 (214). Найти усилия в стержне AB и цепях AC и AD, поддерживающих груз Q весом 42 *кГ*, если $AB = 145$ *см*, $AC = 80$ *см*, $AD = 60$ *см*, плоскость прямоугольника $CADE$ горизонтальна, а плоскости V и W вертикальны. Крепление в точке B шарнирное.

Ответ: $T_C = 32$ *кГ*; $T_D = 24$ *кГ*; $T_B = -58$ *кГ*.

6.6 (215). Определить усилия в тросе AB и в стержнях AC и AD, поддерживающих груз Q весом 180 *н*, если $AB = 170$ *см*, $AC = AD = 100$ *см*, $CD = 120$ *см*; $CK = KD$ и плоскость $\triangle CDA$ горизонтальна. Крепления стержней в точках A, C и D шарнирные.

Ответ: 204 *н*; -60 *н*.



К задаче 6.7.

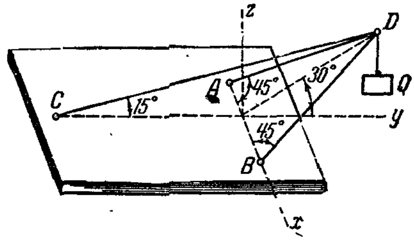
6.7 (216). Переносный кран, поднимающий груз Q весом 2 *т*, устроен так, как указано на чертеже; $AB = AE = AF = 2$ *м*; угол $EAF = 90°$, плоскость крана ABC делит прямой двугранный угол $EABF$ пополам. Определить силу P_1, сжимающую вертикальную стойку

AB, а также силы P_2, P_3 и P_4, растягивающие струну BC и тросы BE и BF, пренебрегая весом частей крана.

Ответ: $P_1=4{,}2$ $т$; $P_2=5{,}8$ $т$; $P_3=P_4=5$ $т$.

6.8 (217). Груз Q весом 1 $т$ подвешен в точке D, как указано на чертеже. Крепления стержней в точках A, B и D шарнирные. Определить реакции опор A, B и C.

Ответ: $R_A=R_B=2{,}64$ $т$; $R_C=3{,}35$ $т$.

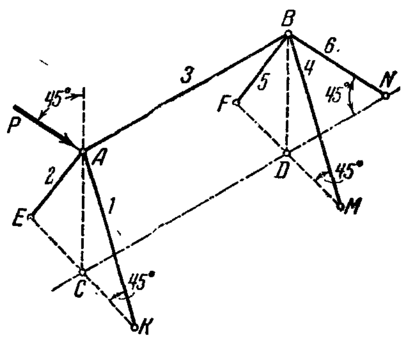


К задаче 6.8.

6.9 (218). Воздушный шар, удерживаемый двумя тросами, находится под действием ветра. Тросы образуют между собой прямой угол: плоскость, в которой они находятся, составляет с плоскостью горизонта угол 60°. Направление ветра перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей и параллельно поверхности земли. Вес шара и заключенного в нем газа 250 $кГ$; объем шара 215,4 $м^3$, вес 1 $м^3$ воздуха 1,3 $кГ$. Определить натяжения T_1 и T_2 тросов и равнодействующую P сил давления ветра на шар, считая, что линии действия всех сил, приложенных к шару, пересекаются в центре шара.

Ответ: $T_1=T_2=24{,}5$ $кГ$; $P=17{,}3$ $кГ$.

6.10 (220). На чертеже изображена пространственная ферма, составленная из шести стержней *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Сила P действует на узел A в плоскости прямоугольника $ABCD$; при этом ее линия действия составляет с вертикалью CA угол 45°. $\triangle EAK=\triangle FBM$. Углы равнобедренных треугольников EAK, FBM и NDB при вершинах A, B и D прямые. Определить усилия в стержнях, если $P=1$ $т$.



К задаче 6.10.

Ответ: $S_1=-0{,}5$ $т$; $S_2=-0{,}5$ $т$; $S_3=-0{,}707$ $т$; $S_4=+0{,}5$ $т$; $S_5=+0{,}5$ $т$; $S_6=-1$ $т$.

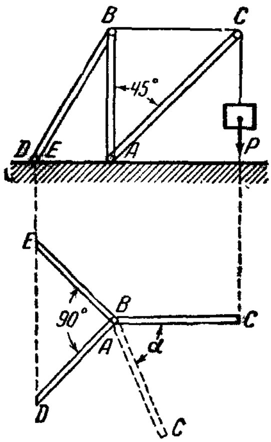
6.11 (221). Определить усилия в вертикальной стойке и в ногах крана, изображенного на чертеже, в зависимости от угла α, если дано: $AB=BC=AD=AE$. Крепления в точках A, B, D и E шарнирные.

Ответ: $S_{BD}=P(\cos\alpha-\sin\alpha)$; $S_{BE}=P(\cos\alpha+\sin\alpha)$;
$S_{AB}=-P\sqrt{2}\cos\alpha$.

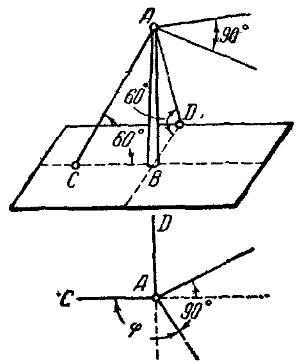
6.12 (222). Угловой столб AB, поддерживающий воздушный кабель, удерживается двумя оттяжками AC и AD, причем $\angle CBD=90°$.

Определить усилия в столбе и оттяжках в зависимости от угла φ, образованного одной из двух ветвей кабеля с плоскостью CBA. Ветви кабеля горизонтальны и взаимно перпендикулярны, натяжения в них одинаковы и равны T.

Ответ: $S_{AC} = 2T(\sin\varphi - \cos\varphi)$; $S_{AD} = 2T(\sin\varphi + \cos\varphi)$;
$S_{AB} = -2\sqrt{3}\,T\sin\varphi$.

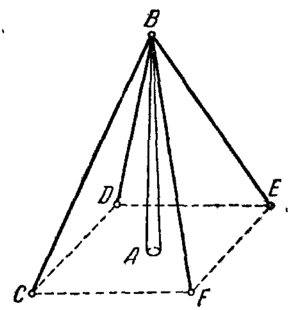


К задаче 6.11.

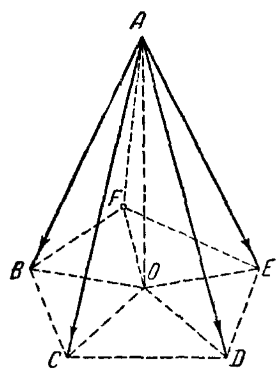


К задаче 6.12.

Оттяжки будут натянуты обе одновременно при условии $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$. При $\varphi < \frac{\pi}{4}$ или $\varphi > \frac{3\pi}{4}$ одна из оттяжек должна быть заменена брусом.



К задаче 6.13.



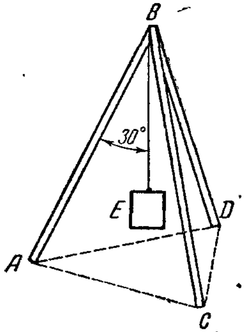
К задаче 6.14.

6.13 (223). Мачта AB удерживается в вертикальном положении посредством четырех симметрично расположенных оттяжек. Угол между каждыми двумя смежными оттяжками равен 60°. Определить давление мачты на землю, если натяжение каждой из оттяжек равно 100 *кГ*, а вес мачты 200 *кГ*.

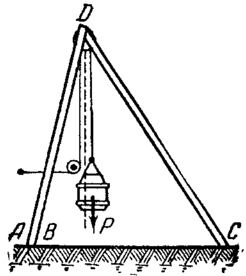
Ответ: 483 *кГ*.

6.14 (224). Четыре ребра AB, AC, AD и AE правильной пятиугольной пирамиды изображают по величине и направлению четыре силы в масштабе: 1 *н* в 1 *м*. Зная высоту пирамиды $AO = 10$ *м* и радиус круга, описанного около основания, $OC = 4{,}5$ *м*, найти равнодействующую R и расстояние x от точки O до точки пересечения равнодействующей с основанием.

Ответ: $R = 40{,}25$ *н*; $x = 1{,}125$ *м*.



К задаче 6.15.



К задаче 6.16.

6.15 (225). К вершине B треножника $ABCD$ подвешен груз E, вес которого 10 *кГ*. Ножки имеют равную длину, укреплены на горизонтальном полу и образуют между собой равные углы. Определить усилие в каждой из ножек, если известно, что они образуют с вертикалью BE углы в 30°.

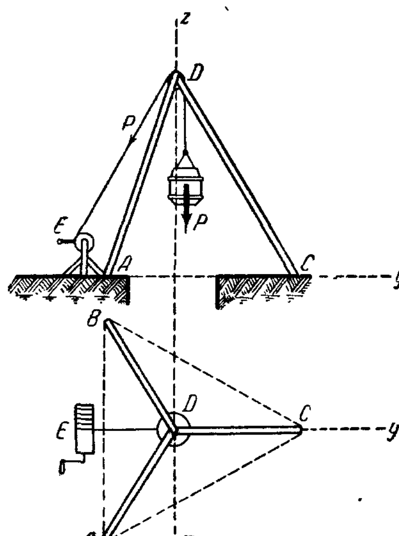
Ответ: 3,85 *кГ*.

6.16 (226). Найти усилия S в ногах AD, BD и CD треноги, образующих углы в 60° с горизонтальной плоскостью, если вес P равномерно поднимаемого груза равен 3 *т*. При этом $AB = BC = AC$.

Ответ: $S = 2{,}3$ *т*.

6.17 (227). Для подъема из шахты груза P весом 3 *т* установлены тренога $ABCD$ и лебедка E. Определить усилия в ногах треноги при равномерном поднятии груза, если треугольник ABC равносторонний и углы, образованные ногами и тросом DE с горизонтальной плоскостью, равны 60°. Расположение лебедки по отношению к треноге видно из чертежа.

Ответ: $S_A = S_B = 3{,}15$ *т*; $S_C = 0{,}155$ *т*.



К задаче 6.17.

6.18 (228). На гладком полу стоит трехногий штатив; нижние концы его ножек связаны шнурами так, что ножки и шнуры штатива образуют правильный тетраэдр. К верхней точке штатива подвешен груз весом P. Определить реакцию пола R в точках опоры и натяжение шнуров T, выразив искомые величины через P.

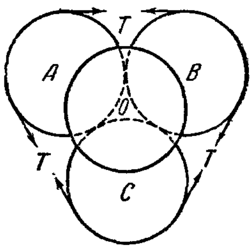
Ответ: $R=\frac{1}{3}P$; $T=\frac{P}{3\sqrt{6}}$.

6.19 (229). Решить предыдущую задачу в том случае, когда ножки штатива связаны шнурами не в концах, а в серединах, принимая при этом во внимание, что вес каждой ножки равен p и приложен к ее середине.

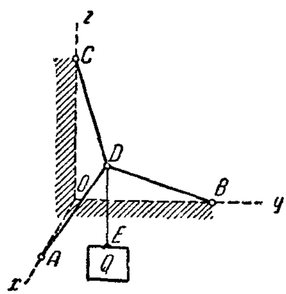
Ответ: $R=\frac{1}{3}P+p$; $T=\frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}$.

6.20 (230). Три однородных шара A, B и C одинаковых радиусов положены на горизонтальную плоскость, взаимно прикасаются и обвязаны шнуром, огибающим их в экваториальной плоскости, а четвертый шар O того же радиуса и также однородный, весом 10 *н*, лежит на трех нижних. Определить натяжение шнура T, вызываемое давлением верхнего шара. Трением шаров между собою и с горизонтальной плоскостью пренебречь.

Ответ: $T=1{,}36$ *н*.



К задаче 6.20.



К задаче 6.21.

6.21 (231). В точках A, B и C, лежащих на прямоугольных координатных осях на одинаковом расстоянии l от начала координат O, закреплены нити: $AD=BD=CD=L$, связанные в точке D, координаты которой

$$x=y=z=\frac{1}{3}\left(l-\sqrt{3L^2-2l^2}\right).$$

В этой точке подвешен груз Q. Определить натяжение нитей T_A, T_B и T_C, предполагая, что $\sqrt{\frac{2}{3}}\,l<L<l$.

Ответ: $T_A=T_B=\frac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ$;

$$T_C=\frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ.$$

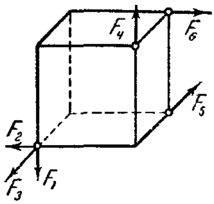
§ 7. Приведение системы сил к простейшему виду

7.1 (232). К вершинам куба приложены по направлениям ребер силы, как указано на чертеже. Каким условиям должны удовлетворять силы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 и F_6, чтобы они находились в равновесии?

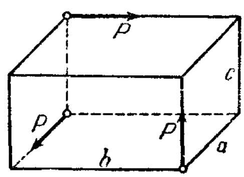
Ответ: $F_1=F_2=F_3=F_4=F_5=F_6$.

7.2 (233). По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные силы P. Какое соотношение должно существовать между ребрами a, b и c, чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?

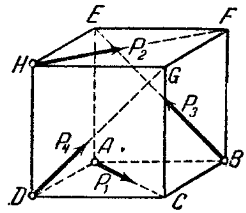
Ответ: $a=b-c$.



К задаче 7.1.



К задаче 7.2.



К задаче 7 3.

7.3 (234). К четырем вершинам A, H, B и D куба приложены четыре равные силы: $P_1=P_2=P_3=P_4=P$, причем сила P_1 направлена по AC, P_2 — по HF, P_3 — по BE и P_4 — по DG. Привести эту систему к простейшему виду.

Ответ: Равнодействующая равна $2P$ и направлена по диагонали DG.

7.4 (235). К правильному тетраэдру $ABCD$, ребра которого равны a, приложены силы: F_1 по ребру AB, F_2 по ребру CD и F_3 в точке E — середине ребра BD. Величины сил F_1 и F_2 какие угодно, а проекции силы F_3 на оси x, y и z равны $+F_2\frac{5\sqrt{3}}{6}$; $-\frac{F_2}{2}$; $-F_2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Приводится ли эта система сил к одной равнодействующей? Если приводится, то найти координаты x и z точки пересечения линии действия равнодействующей с плоскостью Oxz.

Ответ: Приводится, так как проекции главного вектора и главного момента на координатные оси имеют значения:

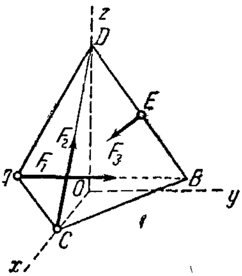
$$V_x=F_2\frac{\sqrt{3}}{2};\quad V_y=F_1-0{,}5F_2;\quad V_z=0;$$

$$M_x=0;\quad M_y=0;\quad M_z=-a\frac{\sqrt{3}}{6}(F_1+F_2).$$

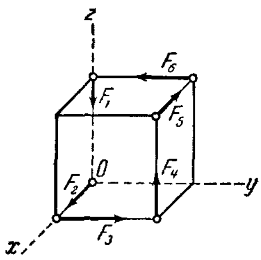
Координаты: $x=\frac{M_z}{V_y}=-\frac{a\sqrt{3}\,(F_1+F_2)}{6F_1-3F_2}$; $z=0$.

7.5 (236). К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 *см*, приложены, как указано на чертеже, шесть равных сил, по 2 *н* каждая. Привести эту систему к простейшему виду.

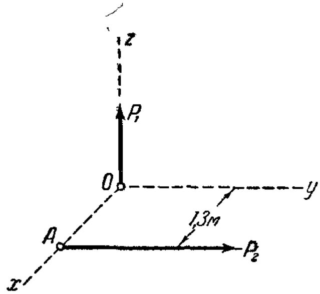
Ответ: Система приводится к паре, момент которой равен $20\sqrt{3}$ *н·см* и составляет с координатными осями углы: $\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



К задаче 7.4.

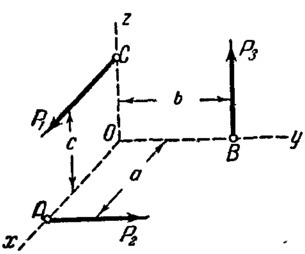


К задаче 7.5.



К задаче 7.6.

7.6 (237). Систему сил: $P_1 = 8$ *кГ*, направленную по Oz, и $P_2 = 12$ *кГ*, направленную параллельно Oy, как указано на чертеже, где $OA = 1{,}3$ *м*, привести к каноническому виду, определив величину главного вектора V всех этих сил и величину их главного момента M относительно произвольной точки, взятой на центральной винтовой оси. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной винтовой осью с координатными осями, а также координаты x и y точки встречи ее с плоскостью Oxy.



К задаче 7.7.

Ответ: $V = 14{,}4$ *кГ*; $M = 8{,}65$ *кГм*; $\alpha = 90°$; $\beta = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; $\gamma = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; $x = 0{,}9$ *м*; $y = 0$.

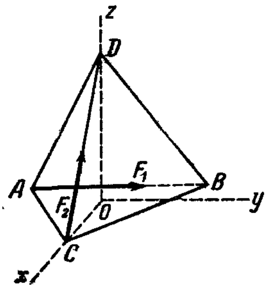
7.7 (238). Три силы P_1, P_2 и P_3 лежат в координатных плоскостях и параллельны осям координат, но могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону. Точки их приложения A, B и C находятся на заданных расстояниях a, b и c от начала координат. Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы они приводились к одной равнодействующей? Какому условию должны удовлетворять величины этих сил, чтобы существовала центральная винтовая ось, проходящая через начало координат?

Ответ: $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$; $\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$.

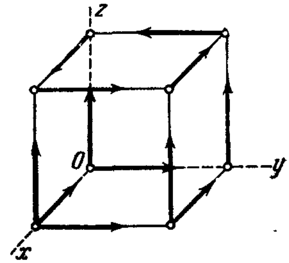
В первом ответе P_1, P_2 и P_3 — алгебраические величины сил.

7.8 (239). К правильному тетраэдру $ABCD$ с ребрами, равными a, приложена сила F_1 по ребру AB и сила F_2 по ребру CD. Найти координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.

Ответ: $x=\frac{a\sqrt{3}}{6}\frac{2F_2^2-F_1^2}{F_1^2+F_2^2}$; $y=-\frac{a}{2}\frac{F_1F_2}{F_1^2+F_2^2}$.



К задаче 7.8.



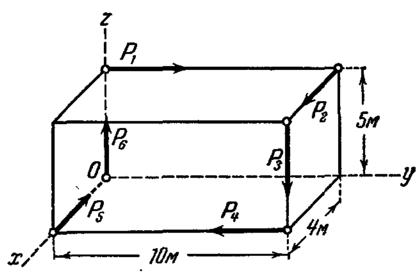
К задаче 7.9.

7.9 (240). По ребрам куба, равным a, действуют двенадцать равных сил P, как указано на чертеже. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.

Ответ: $V=2P\sqrt{6}$; $M=\frac{2}{3}Pa\sqrt{6}$;

$$\cos\alpha=-\cos\beta=-\frac{1}{2}\cos\gamma=-\frac{1}{6}\sqrt{6};\ x=y=\frac{2}{3}a.$$

7.10 (241). По ребрам прямоугольного параллелепипеда, соответственно равным 10 *м*, 4 *м* и 5 *м*, действуют шесть сил, указанных на чертеже: $P_1=4$ *н*, $P_2=6$ *н*, $P_3=3$ *н*, $P_4=2$ *н*, $P_5=6$ *н*, $P_6=8$ *н*. Привести эту систему сил к каноническому виду и определить координаты x и y точки пересечения центральной винтовой оси с плоскостью Oxy.



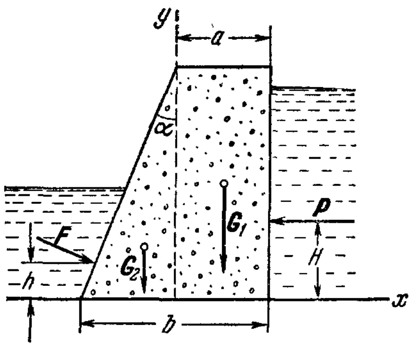
К задаче 7.10.

Ответ: $V=5{,}4$ *н*; $M=-47{,}5$ *дж*; $\cos\alpha=0$; $\cos\beta=0{,}37$; $\cos\gamma=0{,}93$; $x=-11{,}9$ *м*; $y=-10$ *м*.

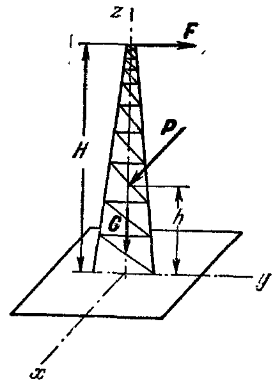
7.11. Равнодействующие $P=8000$ *т* и $F=5200$ *т* сил давления воды на плотину приложены в средней вертикальной плоскости перпендикулярно к соответствующим граням на расстоянии $H=4$ *м* и $h=2{,}4$ *м* от основания. Сила веса $G_1=12\,000$ *т* прямоугольной части плотины приложена в ее центре, а сила веса $G_2=6000$ *т* треугольной части — на расстоянии одной трети длины нижнего основания треугольного сечения от вертикальной грани этого сечения. Ширина плотины в основании $b=10$ *м*, в верхней части

$a=5$ *м*; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$. Определить равнодействующую распределенных сил реакции грунта, на котором установлена плотина.

Ответ: $R_x=3200$ *т*; $R_y=20\,000$ *т*; уравнение линии действия равнодействующей: $125x-20y+53=0$.



К задаче 7.11.



К задаче 7.12.

7.12. Вес радиомачты с бетонным основанием $G=14$ *т*. К мачте приложены сила натяжения антенны $F=2$ *т* и равнодействующая сил давления ветра $P=5$ *т*; обе силы горизонтальны и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях; $H=15$ *м*, $h=6$ *м*. Определить результирующую реакцию грунта, в котором уложено основание мачты.

Ответ: Силы реакции грунта приводятся к левосторонней динаме, состоящей из силы $V=15$ *т*, направленной по центральной оси

$$\frac{-30+14y+2z}{5}=\frac{30-5z-14x}{2}=\frac{-2x+5y}{-14}$$

вверх, и пары сил с моментом $M=6$ *тм*. Ось динамы пересекает плоскость основания в точке $x=2{,}2$ *м*, $y=2$ *м*, $z=0$.

§ 8. Равновесие произвольной системы сил

8.1. На круглой наклонной площадке, которая может вращаться вокруг оси ACD, наклоненной к вертикали под углом 20°, укреплено в точке B тело весом 400 *кГ*. Определить вращающий момент, создаваемый силой тяжести тела, если радиус $CB=3$ *м* в данный момент горизонтален.

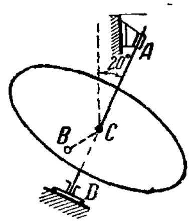
Ответ: 410 *кГм*.

8.2 (243). Ветряной двигатель имеет четыре крыла, наклоненных под углом $\alpha=15°=\arcsin 0{,}259$ к плоскости, перпендикулярной к оси вращения; равнодействующая сил давления ветра на каждое крыло равна 100 *кГ*, направлена по перпендикуляру к плоскости крыла и приложена в точке, отстоящей на 3 *м* от оси вращения. Найти вращающий момент.

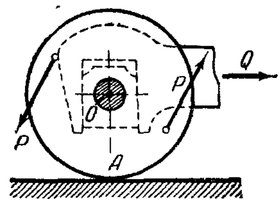
Ответ: 311 *кГм*.

8.3 (244). Электродвигатель, помещенный на оси O колесного ската трамвайного вагона, стремится повернуть ось против часовой стрелки, причем величина момента вращающей пары сил (P, P) равна 600 *кГм*, а радиус колес 60 *см*.

Определить силу тяги Q колесного ската, предполагая, что он стоит на горизонтальных рельсах.



К задаче 8.1.



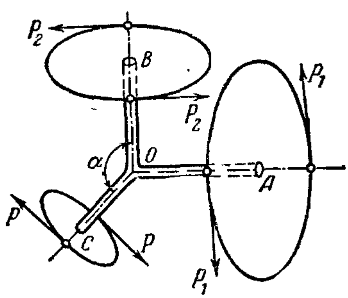
К задаче 8 3.

Сначала находим сумму сил трения между колесами и рельсами, взяв моменты сил относительно оси O. Затем проектируем все силы, приложенные к колесному скату, на горизонтальное направление.

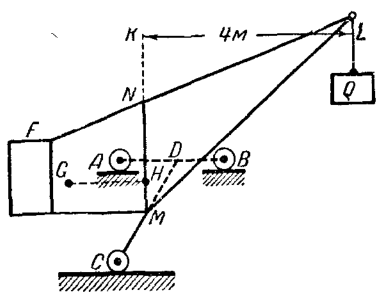
Ответ: $Q = 1$ *т*.

8.4 (245). К окружностям трех дисков: A радиуса 15 *см*, B радиуса 10 *см* и C радиуса 5 *см* приложены пары сил; величины сил, составляющих пары, соответственно равны $P_1 = 10$ *н*, $P_2 = 20$ *н* и P. Оси OA, OB и OC лежат в одной плоскости; угол AOB прямой. Определить величину силы P и угол $BOC = \alpha$ так, чтобы система трех дисков, будучи совершенно свободной, оставалась в равновесии.

Ответ: $P = 50$ *н*; $\alpha = \operatorname{arctg}(-0{,}75) = 143°10'$.



К задаче 8.4.



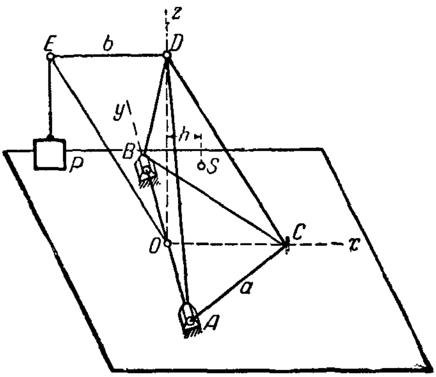
К задаче 8.5.

8.5 (246). Подъемный кран установлен на трехколесной тележке ABC. Известны размеры крана: $AD = DB = 1$ *м*, $CD = 1{,}5$ *м*, $CM = 1$ *м*, $KL = 4$ *м*. Кран уравновешивается противовесом F. Вес крана с противовесом равен $P = 10$ *т* и приложен в точке G, лежащей в плоскости $LMNF$ на расстоянии $GH = 0{,}5$ *м* от оси крана MN; поднимаемый груз Q весит 3 *т*. Найти давление колес на рельсы для такого положения крана, когда плоскость его LMN параллельна AB.

Ответ: $N_A = \frac{5}{6}$ *т*; $N_B = 7\frac{5}{6}$ *т*; $N_C = 4\frac{1}{3}$ *т*.

8.6 (247). Временный подъемный кран состоит из пирамиды с горизонтальным основанием в виде равностороннего треугольника ABC и с вертикальной гранью в виде равнобедренного треугольника ADB; в точках O и D шарнирно закреплена вертикальная ось крана, вокруг которой может вращаться стрела OE, несущая груз P. Основание ABC прикреплено к фундаменту подшипниками A и B и вертикальным болтом C. Определить реакции опор при расположении стрелы в плоскости симметрии крана, если вес груза $P = 1200$ *кГ*, вес крана $Q = 600$ *кГ*, причем расстояние его центра тяжести S от оси OD равно $h = 1$ *м*, $a = 4$ *м*, $b = 4$ *м*.

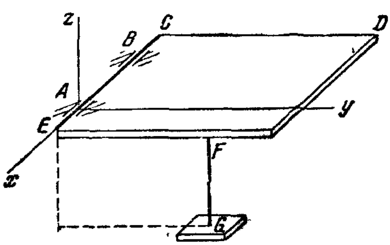
Ответ: $Z_A = Z_B = 1506$ *кГ*; $Z_C = -1212$ *кГ*; $X_A = X_B = 0$.



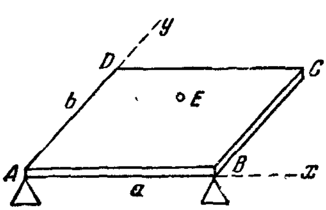
К задаче 8 6.

8.7 (248). Крышка светового машинного люка удерживается в горизонтальном положении стойкой FG, упирающейся в крышку в точке F на расстоянии $EF = 1{,}5$ *м* от оси крышки. Вес крышки $P = 180$ *кГ*; длина ее $CD = 2{,}3$ *м*; ширина $CE = 0{,}75$ *м*, а расстояния шарниров A и B от краев крышки $AE = BC = 0{,}15$ *м*. Найти реакции шарниров A и B и усилие S в стойке FG.

Ответ: $Z_A = -94$ *кГ*; $Z_B = 136$ *кГ*; $Y_A = Y_B = 0$; $S = 138$ *кГ*.



К задаче 8.7.



К задаче 8.8.

8.8 (249). Однородная прямоугольная пластинка $ABCD$, опираясь на три точечные опоры, две из которых расположены в вершинах прямоугольника A и B, а третья — в некоторой точке E, удерживается в горизонтальном положении. Вес пластинки равен P. Давления на опоры в точках A и B соответственно равны $\frac{P}{4}$ и $\frac{P}{5}$.

Найти давление N_E на опору в точке E и координаты этой точки, если длины сторон пластинки равны a и b.

Ответ: $N_E = \frac{11}{20}P$; $x = \frac{6}{11}a$; $y = \frac{10}{11}b$.

8.9 (250). Стол стоит на трех ножках, концы которых A, B и C образуют равносторонний треугольник со стороной a. Вес стола равен P, причем центр тяжести его расположен на вертикали zOO_1, проходящей через центр O_1 треугольника ABC. На столе помещен груз p в точке M, координаты которой x и y; ось Oy параллельна AB. Определить давление каждой ножки на пол.

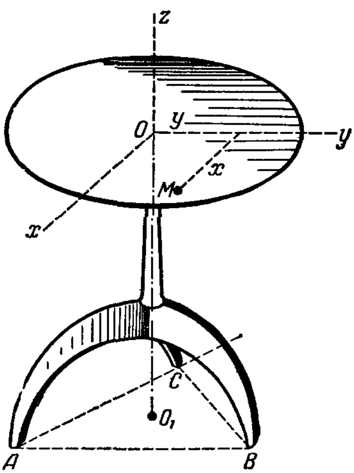
Ответ: $N_A = \frac{P+p}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x - y\right)\frac{p}{a}$;

$$N_B = \frac{P+p}{3} + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\frac{p}{a}; \quad N_C = \frac{P+p}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{x}{a}p.$$

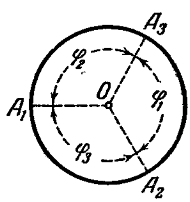
8.10 (251). Круглый стол стоит на трех ножках A_1, A_2 и A_3; в центре O помещен груз. Какому условию должны удовлетворять центральные углы φ_1, φ_2 и φ_3 для того, чтобы давления на ножки A_1, A_2 и A_3 относились, как $1:2:\sqrt{3}$?

При решении задачи берутся моменты сил относительно двух из радиусов OA_1, OA_2 и OA_3.

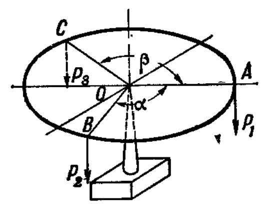
Ответ: $\varphi_1 = 150°$; $\varphi_2 = 90°$; $\varphi_3 = 120°$.



К задаче 8.9.



К задаче 8.10.

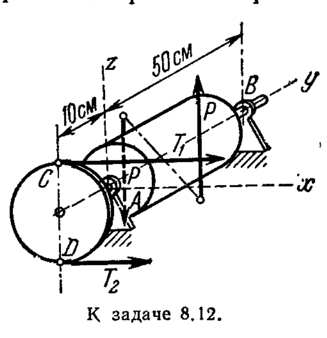


К задаче 8.11.

8.11 (252). Круглая пластинка; весом которой пренебрегаем, покоится в горизонтальном положении, опираясь центром на острие O. Не нарушая равновесия, по окружности пластинки разместили грузы: P_1 весом 1,5 *кГ*, P_2 весом 1 *кГ* и P_3 весом 2 *кГ*. Определить углы α и β.

Ответ: $\alpha = 75°30'$; $\beta = 151°$.

8.12 (253). Ременный шкив CD динамо-машины имеет радиус 10 *см*; размеры вала AB указаны на чертеже. Натяжение верхней ведущей ветви ремня $T_1 = 10$ *кГ*, нижней ведомой $T_2 = 5$ *кГ*. Определить вращающий момент M и реакции подшипников A и B в случае равномерного вращения, пренебрегая весом частей машины; (P, P) — пара, образуемая силами сопротивления.

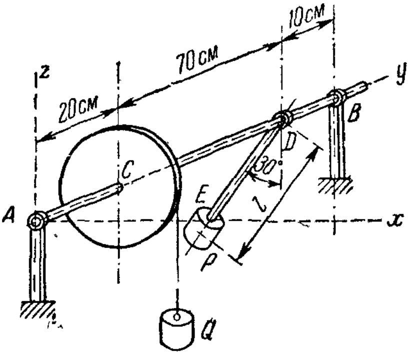


К задаче 8.12.

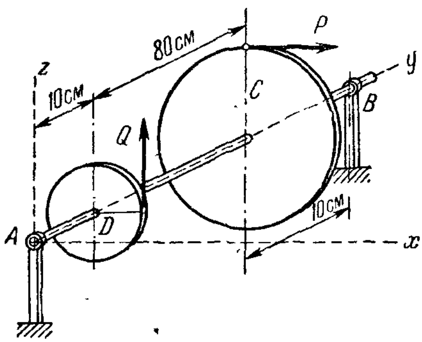
Ответ: $M = 50$ *кГсм*; $X_A = -18$ *кГ*; $X_B = 3$ *кГ*; $Z_A = Z_B = 0$.

8.13 (254). На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B, действуют: с одной стороны вес тела $Q = 25$ *кГ*, привязанного к шкиву C радиуса 20 *см* посредством троса, а с другой стороны вес тела $P = 100$ *кГ*, надетого на стержень DE, неизменно скрепленный с валом AB под прямым углом. Даны расстояния: $AC = 20$ *см*, $CD = 70$ *см*, $BD = 10$ *см*. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на угол 30°. Определить расстояние l центра тяжести тела P от оси вала AB и реакции подшипников A и B.

Ответ: $l = 10$ *см*; $Z_A = 30$ *кГ*; $Z_B = 95$ *кГ*; $X_A = X_B = 0$.



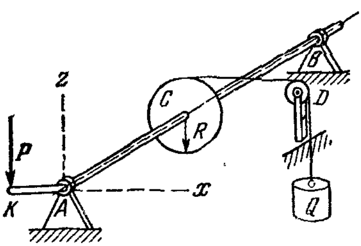
К задаче 8.13.



К задаче 8.14.

8.14 (255). На горизонтальный вал AB насажено зубчатое колесо C радиуса 1 *м* и шестерня D радиуса 10 *см*. Другие размеры указаны на чертеже. К колесу C по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P = 10$ *кГ*, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия.

Ответ: $Q = 100$ *кГ*; $X_A = -1$ *кГ*; $X_B = -9$ *кГ*; $Z_A = -90$ *кГ*; $Z_B = -10$ *кГ*.



К задаче 8.15.

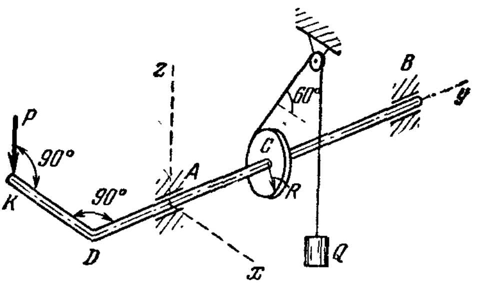
8.15 (256). Рабочий равномерно поднимает груз $Q = 80$ *кГ* с помощью ворота, схематически изображенного на чертеже; радиус барабана $R = 5$ *см*; длина рукоятки $AK = 40$ *см*; $AC = CB = 50$ *см*. Определить давление P на рукоятку и давления оси ворота на опоры A и B при том положении ворота, когда рукоятка AK горизонтальна; сила P вертикальна.

Ответ: $P = 10$ *кГ*; $X_A = 40$ *кГ*; $Z_A = -10$ *кГ*; $X_B = 40$ *кГ*; $Z_B = 0$.

8.16. (257). С помощью ворота, схематически изображенного на чертеже, осуществляется равномерный подъем груза $Q = 100$ *кГ*.

Радиус барабана $R = 5$ *см*. Длина рукоятки $KD = 40$ *см*; $AD = 30$ *см*; $AC = 40$ *см*; $CB = 60$ *см*. Веревка сходит с барабана по касательной, наклоненной к горизонту под углом 60°. Определить давление P на рукоятку и реакции опор A и B при том положении ворота, когда рукоятка KD горизонтальна.

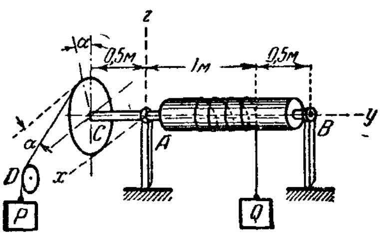
Ответ: $P = 12{,}5$ *кГ*; $X_A = -30$ *кГ*; $Z_A = -35{,}7$ *кГ*; $X_B = -20$ *кГ*; $Z_B = -38{,}4$ *кГ*.



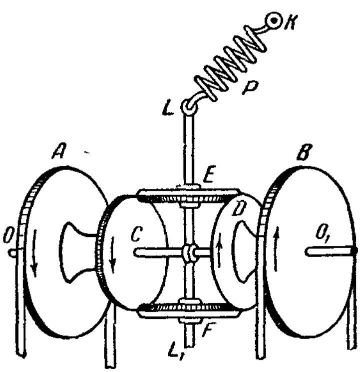
К задаче 8.16.

8.17 (258). На вал AB ворота намотана веревка, поддерживающая груз Q. Радиус колеса C, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса вала; другие размеры указаны на чертеже. Веревка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом P весом 6 *кГ*, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Определить вес груза Q, при котором ворот остается в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала и трением на блоке D.

Ответ: $Q = 36$ *кГ*; $X_A = -6{,}93$ *кГ*; $Z_A = 16$ *кГ*; $X_B = 1{,}73$ *кГ*; $Z_B = 23$ *кГ*.



К задаче 8.17.



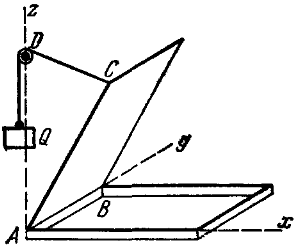
К задаче 8.18.

8.18 (259). Для измерения силы, передаваемой ременным шкивом A шкиву B, служит динамометр, схематически изображенный на чертеже. Шкивы A и B свободно вращаются на неподвижной оси OO_1; шкив A составляет одно целое с зубчаткой C, а шкив B — с зубчаткой D. Эти две зубчатки сцепляются с зубчатками E и F, свободно вращающимися вокруг вертикальной оси LL_1. Диаметры зубчаток C, D, E и F одинаковы, каждый по 20 *см*. Момент силы, вращающей шкив A, 1200 *кГсм* равен моменту силы, тормозящей шкив B. Ось LL_1 удерживается от вращения вокруг оси OO_1 пружинными весами P, прикрепленными к неподвижной точке K. Найти давления, оказываемые зубчатками E и F на ось LL_1, и определить показание P весов, если $LE = 50$ *см*, направление LK перпендикулярно к плоскости OLO_1.

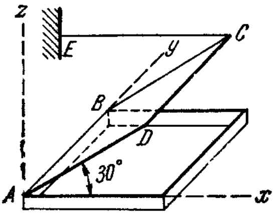
Ответ: $N_E = N_F = 120$ *кГ*; $P = 40$ *кГ*.

8.19 (260). Однородная прямоугольная крышка весом $P = 40$ *н* удерживается приоткрытой на $60°$ над горизонтом противовесом Q. Определить, пренебрегая трением на блоке D, вес Q и реакции шарниров A и B, если блок D укреплен на одной вертикали с A и $AD = AC$.

Ответ: $Q = 10{,}4$ *н*; $X_A = 10$ *н*; $Z_A = 17{,}3$ *н*; $X_B = 0$; $Z_B = 20$ *н*.



К задаче 8.19.



К задаче 8.20.

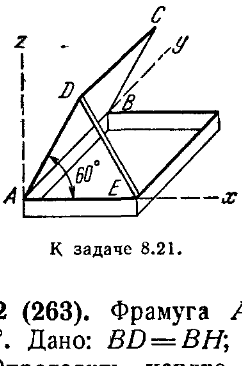
8.20 (261). Однородная прямоугольная крышка $ABCD$ ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси AB на петлях в точках A и B. Горизонтальная веревка CE, параллельная Ax, удерживает крышку под углом $DAx = 30°$. Определить реакции в петлях, если вес крышки 2 *кГ*.

Ответ: $X_A = 0$; $Z_A = 1$ *кГ*; $X_B = 1{,}73$ *кГ*; $Z_B = 1$ *кГ*.

8.21 (262). Крышка прямоугольного ящика $ABCD$ подперта с одной стороны палочкой DE. Вес крышки 12 *кГ*; $AD = AE$; угол $DAE = 60°$.

Определить реакции шарниров A и B, а также усилие S в палочке, пренебрегая ее весом.

Ответ: $X_A = 1{,}73$ *кГ*; $Z_A = 3$ *кГ*; $X_B = 0$; $Z_B = 6$ *кГ*; $S = 3{,}45$ *кГ*.



К задаче 8.21.

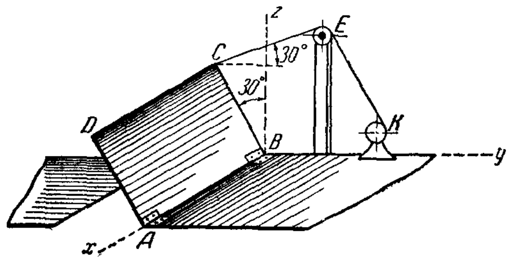
К задаче 8.22.

8.22 (263). Фрамуга $ABDC$ весом $Q = 10$ *кГ* открыта на угол $\alpha = 60°$. Дано: $BD = BH$; $CE = ED$; веревка EF параллельна прямой DH. Определить усилие P, необходимое для удержания фрамуги в равновесии, и реакции петель A и B.

Ответ: $P = 5$ *кГ*; $X_A = X_B = 2{,}17$ *кГ*; $Z_A = Z_B = 3{,}75$ *кГ*.

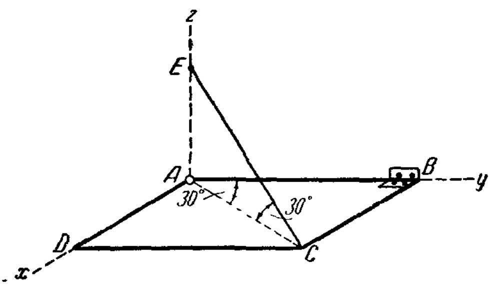
8.23 (264). Разводная часть $ABCD$ моста весом 1500 *кГ* поднята цепью CE, перекинутой через блок E на лебедку K. Точка E находится в вертикальной плоскости CBy. Определить для изображенного на чертеже положения натяжение цепи CE и реакции в точках A и B. Центр тяжести разводной части совпадает с центром прямоугольника $ABCD$.

Ответ: $T = 375$ *кГ*; $Y_A = 0$; $Z_A = 750$ *кГ*; $Y_B = -325$ *кГ*; $Z_B = 562{,}5$ *кГ*.



К задаче 8.23.

8.24 (265). Однородная прямоугольная рама весом 20 *н* прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении веревкой CE, привязанной в точке C рамы и к гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с A, причем $\angle ECA = \angle BAC = 30°$. Определить натяжение веревки и опорные реакции.

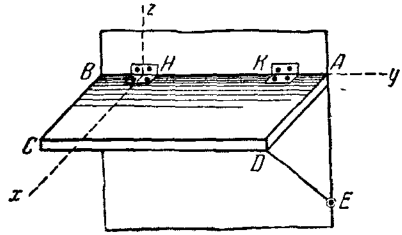


К задаче 8.24.

Ответ: $T = 20$ *н*; $X_A = 8{,}66$ *н*; $Y_A = 15$ *н*; $Z_A = 10$ *н*; $X_B = Z_B = 0$.

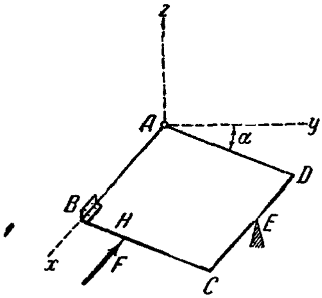
8.25 (266). Полка $ABCD$ вагона, которая может вращаться вокруг оси AB, удерживается в горизонтальном положении стержнем ED, прикрепленным при помощи шарнира E к вертикальной стене BAE. Вес полки и лежащего на ней груза P равен 80 *кГ* и приложен в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Даны размеры: $AB = 150$ *см*; $AD = 60$ *см*; $AK = BH = 25$ *см*. Длина стержня $ED = 75$ *см*. Определить усилие S в стержне ED, пренебрегая его весом, и реакции петель K и H.

Ответ: $S = 66\frac{2}{3}$ *кГ*, $X_K = -66\frac{2}{3}$ *кГ*; $Z_K = -10$ *кГ*; $X_H = 13\frac{1}{3}$ *кГ*; $Z_H = 50$ *кГ*.



К задаче 8.25.

8.26 (267). Квадратная однородная пластинка $ABCD$ со стороной $a = 30$ *см* и весом $P = 5$ *кГ* закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, а в точке B при помощи цилиндрического шарнира. Сторона AB горизонтальна. В точке E пластинка опирается на острие. В точке H на пластинку действует сила F параллельно стороне AB. Найти реакции в точках A, B и E, если $CE = ED$, $BH = 10$ *см*, $F = 10$ *кГ* и пластинка образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha = 30°$.

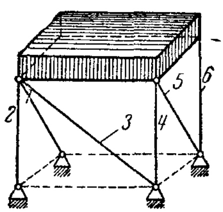


К задаче 8.26.

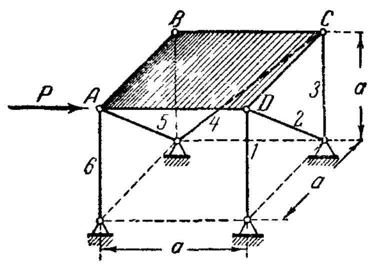
Ответ: $X_A = 10$ *кГ*; $Y_A = 2{,}35$ *кГ*; $Z_A = -0{,}11$ *кГ*; $Y_B = -3{,}43$ *кГ*; $Z_B = 3{,}23$ *кГ*; $R_E = 2{,}17$ *кГ*.

8.27 (268). Однородная горизонтальная плита весом P, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, прикреплена неподвижно к земле шестью прямолинейными стержнями. Определить усилия в опорных стержнях, обусловленные весом плиты, если концы стержней прикреплены к плите и неподвижным устоям шаровыми шарнирами.

Ответ: $S_1 = S_3 = S_4 = S_5 = 0$; $S_2 = S_6 = -\frac{P}{2}$.



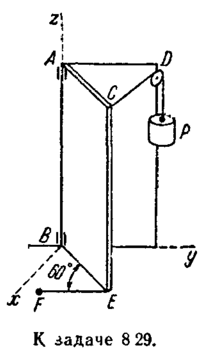
К задаче 8.27.



К задаче 8.28

8.28 (269). Определить усилия в шести опорных стержнях, поддерживающих квадратную плиту $ABCD$, при действии горизонтальной силы P вдоль стороны AD. Размеры указаны на чертеже.

Ответ: $S_1 = P$; $S_2 = -P\sqrt{2}$; $S_3 = -P$; $S_4 = P\sqrt{2}$; $S_5 = P\sqrt{2}$; $S_6 = -P$.

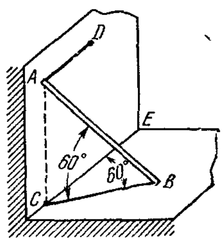


К задаче 8.29.

8.29 (270). Прямоугольная дверь, имеющая вертикальную ось вращения AB, открыта на угол $CAD = 60°$ и удерживается в этом положении двумя веревками, из которых одна, CD, перекинута через блок и натягивается грузом $P = 32$ *кГ*, другая, EF, привязана к точке F пола. Вес двери 64 *кГ*; ее ширина $AC = AD = 18$ *дм*; высота $AB = 24$ *дм*. Пренебрегая трением на блоке, определить натяжение T веревки EF, а также реакции цилиндрического шарнира в точке A и подпятника в точке B.

Ответ: $T = 32$ *кГ*; $X_A = 6{,}9$ *кГ*; $Y_A = -28$ *кГ*; $X_B = 20{,}8$ *кГ*; $Y_B = 44$ *кГ*; $Z_B = 64$ *кГ*.

8.30 (272). Стержень AB удерживается в наклонном положении двумя горизонтальными веревками AD и BC. При этом в точке A стержень опирается на вертикальную стену, на которой находится и точка D, а в точке B — на горизонтальный пол. Точки A и C лежат на одной вертикали. Вес стержня 8 *н*. Трением в точках A и B пренебрегаем. Проверить, может ли стержень оставаться в равновесии, и определить натяжения T_A и T_B веревок и реакции опорных плоскостей, если $\angle ABC = \angle BCE = 60°$.

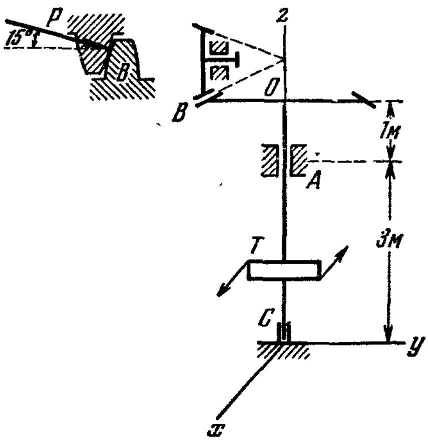


К задаче 8.30.

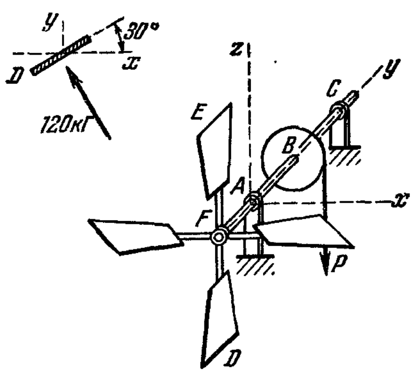
Ответ: $T_A = 1{,}15$ *н*; $T_B = 2{,}3$ *н*; $R_A = 2$ *н*; $R_B = 8$ *н*.

8.31 (273). Пара сил, вращающая водяную турбину T и имеющая момент 120 *кГм*, уравновешивается давлением на зубец B конического зубчатого колеса OB и реакциями опор. Давление на зубец перпендикулярно к радиусу $OB = 0{,}6$ *м* и составляет с горизонтом угол $\alpha = 15° = \operatorname{arctg} 0{,}268$. Определить реакции подпятника C и подшипника A, если вес турбины с валом и колесом равен 1,2 *т* и направлен вдоль оси OC, а расстояния $AC = 3$ *м*, $AO = 1$ *м*.

Ответ: $X_A = 266\frac{2}{3}$ *кГ*; $X_C = -66\frac{2}{3}$ *кГ*; $Y_A = -Y_C = 10{,}7$ *кГ*; $Z_C = 1254$ *кГ*

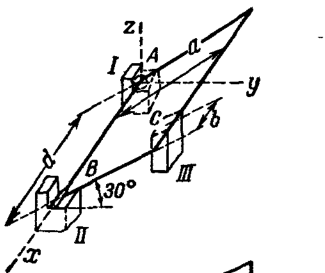


К задаче 8.31.



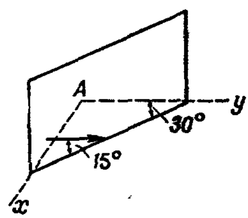
К задаче 8.32.

8.32 (274). Ветряной двигатель с горизонтальной осью AC имеет четыре симметрично расположенных крыла, плоскости которых составляют с вертикальной плоскостью, перпендикулярной к оси AC, равные углы 30°. На расстоянии 2 *м* от оси к каждому крылу приложена нормально к его плоскости равнодействующая сил давления ветра, равная 120 *кГ* (крыло D в проекции на плоскость xy изображено отдельно). Ось двигателя опирается в точке A на подшипник, в точке C — на подпятник и удерживается в покое вертикальным давлением P на зубец колеса B, производимым не показанной на чертеже шестерней. Радиус колеса B равен 1,2 *м*; расстояния: $BC=0{,}5$ *м*, $AB=1$ *м*, $AF=0{,}5$ *м*. Определить давление P и реакции опор в двух случаях: 1) когда ветер давит на все четыре крыла и 2) когда крыло D снято, а линия DE вертикальна.



Ответ: 1) $P=400$ *кГ*; $Z_A=133\frac{1}{3}$ *кГ*; $Y_C=-416$ *кГ*; $Z_C=266\frac{2}{3}$ *кГ*; $X_A=X_C=0$.

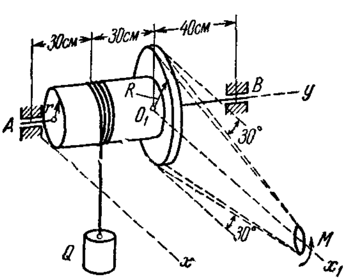
2) $P=300$ *кГ*; $X_A=80$ *кГ*; $Z_A=-38{,}6$ *кГ*; $X_C=-20$ *кГ*; $Y_C=-312$ *кГ*; $Z_C=339$ *кГ*.



К задаче 8.33.

8.33 (275). Однородный прямоугольный навес, сторона AB которого горизонтальна, наклонен к горизонту под углом 30°. Навес соединен шаровым шарниром A со столбом I и цилиндрическим шарниром B со столбом II; кроме того, навес свободно опирается в точке C на наклонную поверхность столба III. Даны размеры: $a=3$ *м*; $d=6$ *м*; $b=2$ *м*. Вес 1 $м^2$ навеса равен 20 *кГ*. Навес находится под равномерно распределенным давлением ветра в 50 *кГ* на 1 $м^2$ поверхности навеса, направленным под углом 15° к горизонту и действующим в вертикальной плоскости, составляющей с осью Ay угол 30°. Определить опорные реакции.

Ответ: $R_C=445$ *кГ*; $X_A=435$ *кГ*; $Y_A=-208$ *кГ*; $Z_A=222$ *кГ*; $Y_B=-323$ *кГ*; $Z_B=-14{,}8$ *кГ*.



К задаче 8.34.

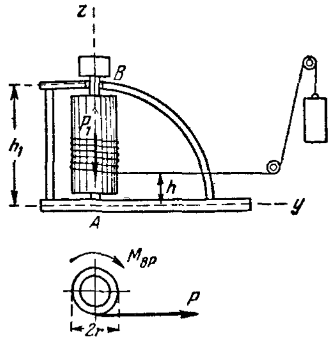
8.34 (276). Груз Q равномерно поднимается мотором M посредством бесконечной цепи. Определить реакции опор A и B и натяжения в цепи, если ветви цепи наклонены к горизонту под углами 30° (ось O_1x_1 параллельна оси Ax). Известно, что $r=10$ *см*, $R=20$ *см*, $Q=1$ *т*; натяжение ведущей части цепи вдвое больше натяжения ведомой части, т. е. $T_1=2T_2$.

Ответ: $T_1=1$ *т*; $T_2=0{,}5$ *т*; $X_A=-0{,}52$ *т*; $Z_A=0{,}6$ *т*; $X_B=-0{,}78$ *т*; $Z_B=0{,}15$ *т*.

8.35 (277). Для подъема копровой бабы весом $P=300$ *кГ* служит вертикальный ворот, вал которого радиусом $r=20$ *см* опирается нижним концом на подпятник A, а верхним концом удерживается в подшипнике B. Вал приводится во вращение мотором.

Найти необходимый для равномерного подъема копровой бабы вращающий момент мотора, а также реакции в подпятнике A и подшипнике B. При этом дано: $h_1 = 1$ *м*, $h = 30$ *см* и вес вращающихся частей ворота $P_1 = 100$ *кГ*.

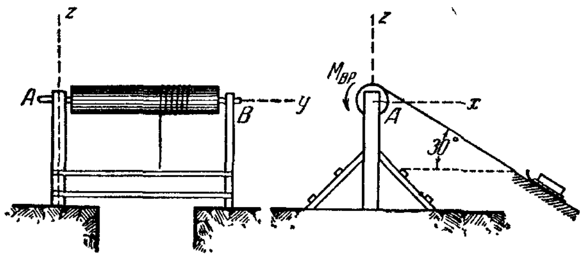
Ответ: $M_{вр} = 60$ *кГм*; $X_A = 0$; $Y_A = -210$ *кГ*; $Z_A = 100$ *кГ*; $X_B = 0$; $Y_B = -90$ *кГ*.



К задаче 8.35.

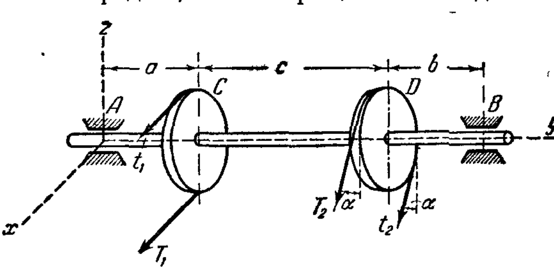
8.36. Ворот, служащий для подъема породы из наклонного шурфа, состоит из вала радиусом 0,25*м* и длиной 1,5 *м*. Вал приводится во вращение при помощи мотора (на рисунке не показан). Определить реакции опор и вращающий момент $M_{вр}$ мотора, если вес вала равен 80 *кГ*, вес груза 400 *кГ*, коэффициент трения между грузом и поверхностью шурфа равен 0,5, угол наклона шурфа к горизонту равен 30° и место схода троса с вала находится на расстоянии 50 *см* от подшипника B. Вращение вала считать равномерным.

Ответ: $M_{вр} = 93$ *кГм*; $X_A = -108$ *кГ*; $Z_A = 102$ *кГ*; $X_B = -215$ *кГ*; $Z_B = 165$ *кГ*.



К задаче 8.36.

8.37 (280). Горизонтальный вал трансмиссии, несущий два шкива C и D ременной передачи, может вращаться в подшипниках A и B.



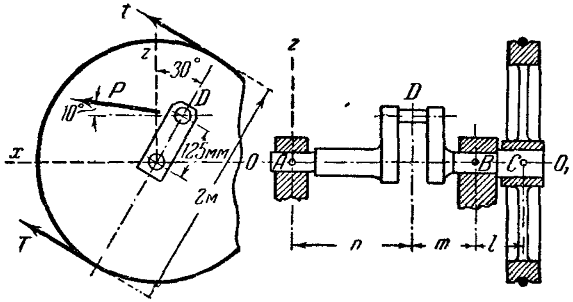
К задаче 8.37.

Радиусы шкивов: $r_C = 20$ *см*, $r_D = 25$ *см*; расстояния шкивов от подшипников: $a = b = 50$ *см*; расстояние между шкивами $c = 100$ *см*.

Натяжения ветвей ремня, надетого на шкив C, горизонтальны и имеют величины T_1 и t_1, причем $T_1 = 2t_1 = 500$ *кГ*; натяжения ветвей ремня, надетого на шкив D, образуют с вертикалью угол $\alpha = 30°$ и имеют величины T_2 и t_2, причем $T_2 = 2t_2$. Определить натяжения T_2 и t_2 в условиях равновесия и реакции подшипников, вызванные натяжениями ремней.

Ответ: $T_2 = 400$ *кГ*; $t_2 = 200$ *кГ*; $X_A = -637{,}5$ *кГ*; $Z_A = 130$ *кГ*; $X_B = -412{,}5$ *кГ*; $Z_B = 390$ *кГ*.

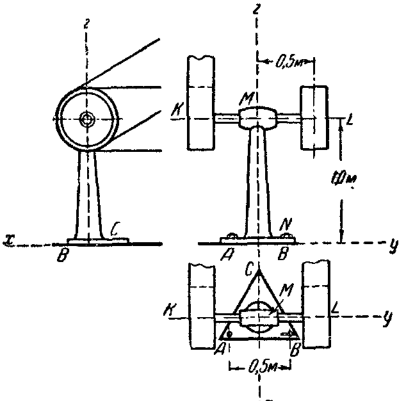
8.38 (281). Давление шатуна двигателя, сосредоточенное в середине D шейки коленчатого вала, равно $P = 2000$ *кГ* и направлено под углом 10° к горизонту, причем плоскость ODO_1, проходящая через



К задаче 8.38.

оси вала OO_1 и шейки D, образует с вертикалью угол 30°. От маховика усилие передается на завод канатом, ветви которого параллельны и наклонены к горизонту под углом 30°. Действие силы P уравновешивается натяжениями T и t ветвей каната и реакциями подшипников A и B. Вес маховика 1300 *кГ*, диаметр его $d = 2$ *м*, сумма натяжений ветвей каната $T + t = 750$ *кГ*, а указанные на чертеже расстояния равны: точки D от оси OO_1 $r = 125$ *мм*, $l = 250$ *мм*, $m = 300$ *мм*, $n = 450$ *мм*. Определить реакции подшипников A и B и натяжения t и T.

Ответ: $X_A = -571$ *кГ*; $Z_A = -447$ *кГ*; $X_B = -2048$ *кГ*; $Z_B = 1025$ *кГ*; $T = 492$ *кГ*; $t = 258$ *кГ*.

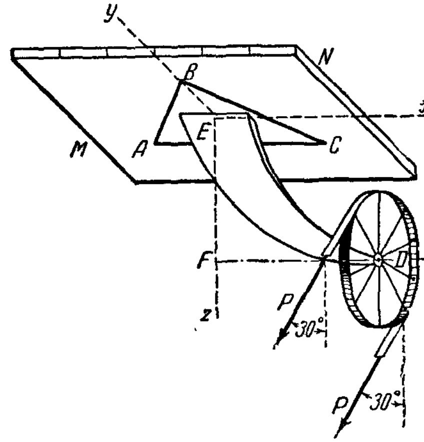


К задаче 8.39.

8.39 (282). Для передачи вращения с одного вала на другой, ему параллельный, установлены два одинаковых вспомогательных шкива, заклиненных на горизонтальной оси KL. Ось может вращаться в подшипнике M, укрепленном на колонке MN. Треугольное основание этой колонки притянуто к полу двумя болтами A и B и свободно опирается точкой C. Болт A проходит через круглое отверстие в основании, болт же B — через продолговатое отверстие, имеющее направление линии AB. Ось колонки проходит через центр треугольника ABC.

Определить реакции в точках A, B и C, если расстояние оси KL от пола равно 1 *м*, расстояния середин шкивов от оси колонки равны 0,5 *м* и натяжения всех четырех ветвей ремней принимаются одинаковыми и равными 60 *кГ*. Ветви правого ремня горизонтальны, а ветви левого наклонены к горизонту под углом 30°. Вес всей установки равен 300 *кГ* и приложен к точке, лежащей на оси колонки; даны размеры: $AB = BC = CA = 50$ *см*.

Ответ: $X_A = 96$ *кГ*; $Y_A = 0$; $Z_A = -239$ *кГ*; $X_B = 128$ *кГ*; $Z_B = -119$ *кГ*; $Z_C = 597$ *кГ*.



К задаче 8.40.

8.40 (283). Подвеска ременного шкива D прикреплена к гладкому горизонтальному потолку MN подшипниками в точках A и C и упирается в него точкой B. Эти точки лежат в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 30 *см*. Положение центра ременного шкива D определяется вертикалью $EF = 40$ *см*, опущенной из центра E треугольника ABC, и горизонталью $FD = 50$ *см*, параллельной стороне AC. Плоскость шкива перпендикулярна к прямой FD. Натяжение P каждой ветви ремня равно 120 *кГ* и наклонено к вертикали под углом 30°. Определить реакции в опорах A, B и C, пренебрегая весом частей.

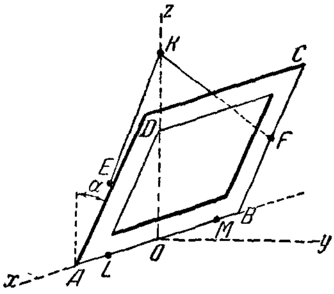
Ответ: $Y_A = 140$ *кГ*; $Z_A = 185$ *кГ*; $Z_B = 115$ *кГ*; $Y_C = -260$ *кГ*; $Z_C = -508$ *кГ*.

8.41 (284). Картина в раме, имеющей форму прямоугольника $ABCD$, подвешена на вертикальной стене при помощи шнура EKF, надетого на крюк K так, что край AB горизонтален; точки E, F — середины сторон AD и BC. Картина наклонена к стене под углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ и опирается на два гвоздя L и M, вбитых в стену, причем $AL = MB$. Размеры картины: $AB = 60$ *см*, $AD = 75$ *см*; вес картины 20 *кГ* и приложен в центре прямоугольника $ABCD$; длина шнура 85 *см*. Определить натяжение T шнура и давления на гвозди L и M.

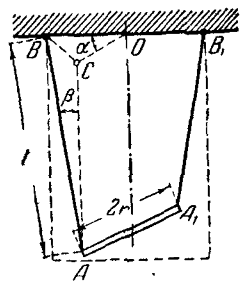
Ответ: $T = 8{,}5$ *кГ*; $Y_L = Y_M = -4{,}5$ *кГ*; $Z_L = Z_M = -6$ *кГ*.

8.42 (285). Бифиляр состоит из однородного стержня AA_1, подвешенного на двух нерастяжимых нитях длиной l, которые укреплены в точках B и B_1. Длина стержня $AA_1 = BB_1 = 2r$, а вес P. Стержень повернут вокруг вертикальной оси на угол α. Определить момент M пары, которую нужно приложить к стержню, чтобы удержать его в равновесии, а также натяжение T нитей.

Ответ: $M = \dfrac{Pr^2 \sin\alpha}{\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$; $T = \dfrac{lP}{2\sqrt{l^2 - 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

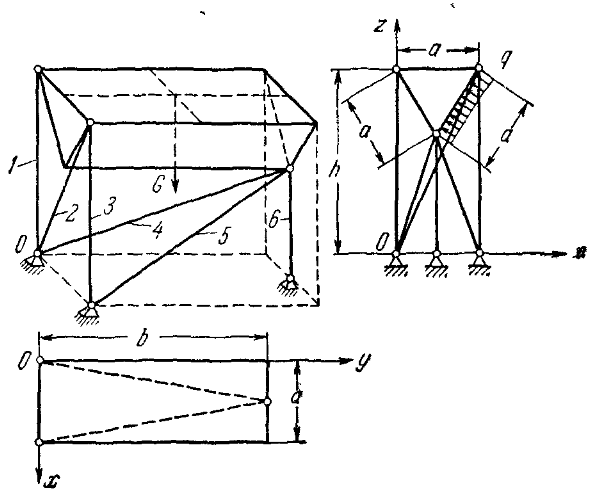


К задаче 8.41.



К задаче 8.42.

8.43. Бункер, имеющий вид треугольной призмы, прикреплен к основанию шестью стержнями. Определить усилия в стержнях,

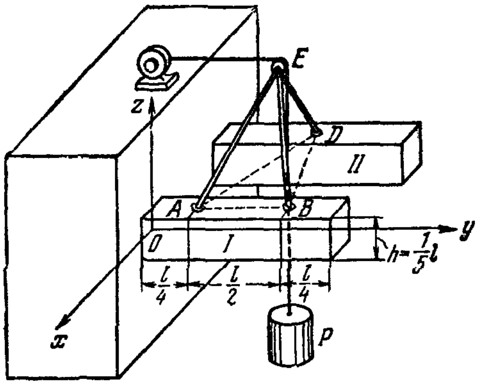


К задаче 8.43.

возникающие от действия силы тяжести наполненного бункера $G = 30$ *т* и давления ветра на переднюю наклонную грань интенсивностью $q = 50$ *кГ/м*^{2}. Размеры бункера: $a = 4$ *м*, $b = 12$ *м*, $h = 8$ *м*.

Ответ: $S_1 = -7{,}49$ *т*, $S_2 = -2{,}33$ *т*, $S_3 = -4{,}82$ *т*, $S_4 = -3{,}37$ *т*, $S_5 = 3{,}37$ *т*, $S_6 = -14{,}4$ *т*.

8.44. Тренога $ABDE$, имеющая форму правильной пирамиды, укреплена шарнирно на двух консольных балках. Через блок, укрепленный в вершине E треноги, перекинут трос, равномерно поднимающий с помощью лебедки груз веса P. От блока к лебедке трос



К задаче 8.44.

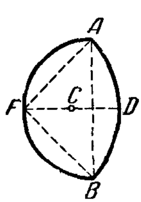
тянется параллельно консоли. Определить реакции заделки первой консоли, пренебрегая ее весом и весом треноги. Высота треноги равна $\frac{l}{2}$.

Ответ: $X_0 = -\frac{\sqrt{3}}{9}P$; $Y_0 = P$; $Z_0 = \frac{2}{3}P$; $M_x = -\frac{9}{15}Pl$; $M_y = -\frac{\sqrt{3}}{90}Pl$; $M_z = -\frac{\sqrt{3}}{36}Pl$.

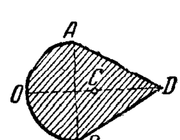
§ 9. Центр тяжести

9.1 (286). Определить положение центра тяжести C стержневого контура $AFBD$, состоящего из дуги ADB четверти окружности радиуса $FD = R$ и из дуги полуокружности AFB, построенной на хорде AB как на диаметре. Линейные плотности стержней одинаковы.

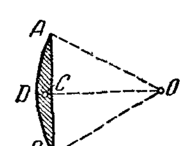
Ответ: $CF = R(\sqrt{2} - 1) + \frac{2R}{\pi}(3 - 2\sqrt{2}) = 0,524R$.



К задаче 9.1.



К задаче 9.2.



К задаче 9.3.

9.2 (287). Определить положение центра тяжести C площади, ограниченной полуокружностью AOB радиуса R и двумя прямыми равной длины AD и DB, причем $OD = 3R$.

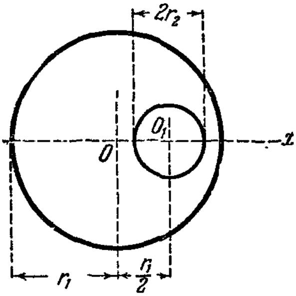
Ответ: $OC = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12}R = 1,19R$.

9.3 (288). Найти центр тяжести C площади кругового сегмента ADB радиуса $AO = 30$ *см*, если угол $AOB = 60°$.

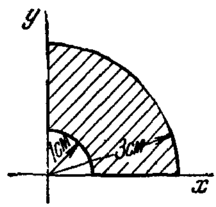
Ответ: $OC = 27{,}7$ *см*.

9.4 (289). Определить положение центра тяжести однородного диска с круглым отверстием, предполагая радиус диска равным r_1, радиус отверстия равным r_2 и центр этого отверстия находящимся на расстоянии $\frac{r_1}{2}$ от центра диска.

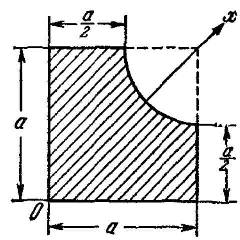
Ответ: $x_C = -\frac{r_1 r_2^2}{2(r_1^2 - r_2^2)}$.



К задаче 9.4.



К задаче 9.5.



К задаче 9.6.

9.5. Определить координаты центра тяжести четверти кольца, показанного на рисунке.

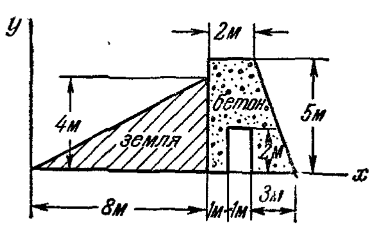
Ответ: $x_C = y_C = 1{,}38$ *см*.

9.6. Найти координаты центра тяжести фигуры, изображенной на рисунке.

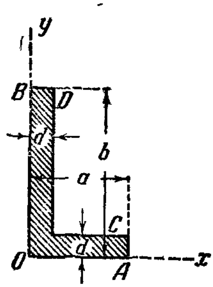
Ответ: $x_C = 0{,}61\ a$.

9.7. Найти центр тяжести поперечного сечения плотины, показанного на рисунке, принимая, что удельный вес бетона равен 2,4 $т/м^3$, а земляного грунта 1,6 $т/м^3$.

Ответ: $x_C = 8{,}19$ *м*; $y_C = 1{,}9$ *м*.



К задаче 9.7.



К задаче 9.8.

9.8 (290). Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину $OA = a$, $OB = в$ и толщину $AC = BD = d$.

Ответ: $x = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$; $y = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b + a - d)}$.

9.9 (291). Найти расстояние центра тяжести таврового сечения $ABCD$ от стороны его AC, если высота тавра $BD=h$, ширина полки $AC=a$, толщина полки равна d и толщина стенки равна b.

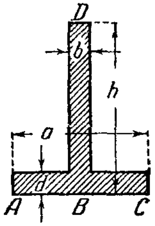
Ответ: $\dfrac{ad^2+bh^2-bd^2}{2(ad+bh-bd)}$.

9.10 (292). Найти центр тяжести двутаврового профиля, размеры которого указаны на чертеже.

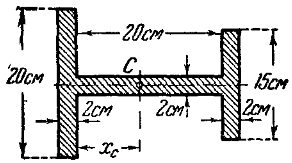
Ответ: $x_C=9$ *см.*

9.11 (293). Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, изображенной на чертеже, зная, что $AH=2$ *см*, $HG=1{,}5$ *см*, $AB=3$ *см*, $BC=10$ *см*, $EF=4$ *см*, $ED=2$ *см.*

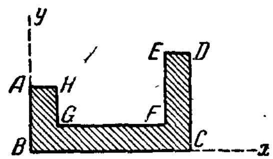
Ответ: $x=5\frac{10}{13}$ *см*; $y=1\frac{10}{13}$ *см.*



К задаче 9.9.



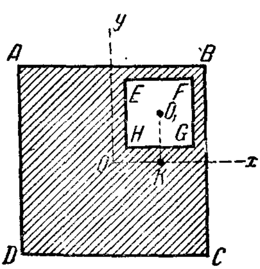
К задаче 9.10.



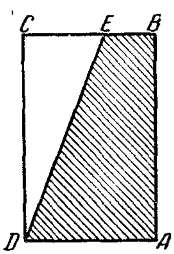
К задаче 9.11.

9.12 (294). В однородной квадратной доске $ABCD$ со стороной $AB=2$ *м* вырезано квадратное отверстие $EFGH$, стороны которого соответственно параллельны сторонам $ABCD$ и равны 0,7 *м* каждая. Определить координаты x и y центра тяжести оставшейся части доски, зная, что $OK=O_1K=0{,}5$ *м*, где O и O_1 — центры квадратов, OK и O_1K соответственно параллельны сторонам квадратов.

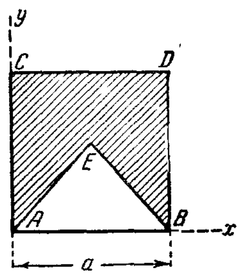
Ответ: $x=y=-0{,}07$ *м.*



К задаче 9.12.



К задаче 9.13.



К задаче 9.14.

9.13 (295). Провести через вершину D однородного прямоугольника $ABCD$ прямую DE так, чтобы при подвешивании отрезанной по этой прямой трапеции $ABED$ за вершину E сторона AD, равная a, была горизонтальна.

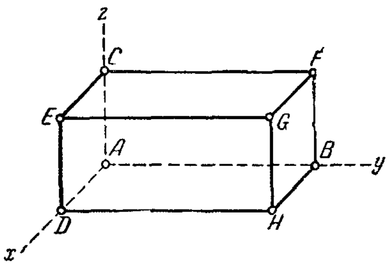
Ответ: $BE=0{,}366a$.

9.14 (296). Дан квадрат $ABDC$, сторона которого равна a. Найти внутри него такую точку E, чтобы она была центром тяжести площади, которая получится, если из квадрата вырезать равнобедренный треугольник AEB.

Ответ: $x_E = \frac{a}{2}$; $y_E = 0{,}634a$.

9.15 (297). Четыре человека несут однородную треугольную пластину. Двое взялись за две вершины, остальные — за стороны, примыкающие к третьей вершине. На каком расстоянии от третьей вершины они должны поместиться для того, чтобы каждый из четырех поддерживал четверть полного веса пластины?

Ответ: На расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ длины соответствующей стороны.



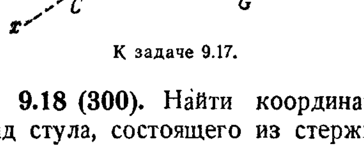
К задаче 9.16.

9.16 (298). Определить координаты центра тяжести системы грузов, расположенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда, ребра которого соответственно равны: $AB = 20$ *см*, $AC = 10$ *см*, $AD = 5$ *см*. Веса грузов в вершинах A, B, C, D, E, F, G, H соответственно равны 1 *кГ*, 2 *кГ*, 3 *кГ*, 4 *кГ*, 5 *кГ*, 3 *кГ*, 4 *кГ*, 3 *кГ*.

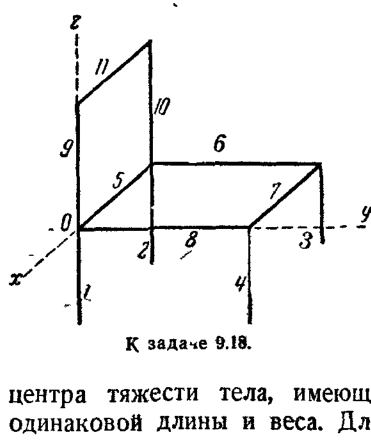
Ответ: $x = 3{,}2$ *см*; $y = 9{,}6$ *см*; $z = 6$ *см*.

9.17 (299). Определить координаты центра тяжести контура прямоугольного параллелепипеда, ребра которого суть однородные бруски длиной: $OA = 8$ *дм*, $OB = 4$ *дм*, $OC = 6$ *дм*. Веса брусков равны соответственно: OA — 250 *н*, OB, OC и CD по 75 *н*; CG — 200 *н*; AF — 125 *н*; AG и GF по 50 *н*; BD, BF, DE и EF по 25 *н*.

Ответ: $x = 2{,}625$ *дм*; $y = 4$ *дм*; $z = 1{,}05$ *дм*.



К задаче 9.17.



К задаче 9.18.

9.18 (300). Найти координаты центра тяжести тела, имеющего вид стула, состоящего из стержней одинаковой длины и веса. Длина стержня равна 44 *см*.

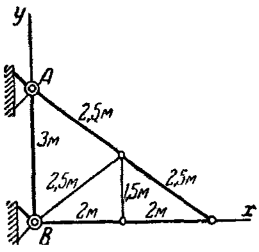
Ответ: $x = -22$ *см*; $y = 16$ *см*; $z = 0$.

9.19 (301). Найти координаты центра тяжести плоской фермы, состоящей из семи стержней, длины которых указаны на чертеже, если вес 1 *м* для всех стержней один и тот же.

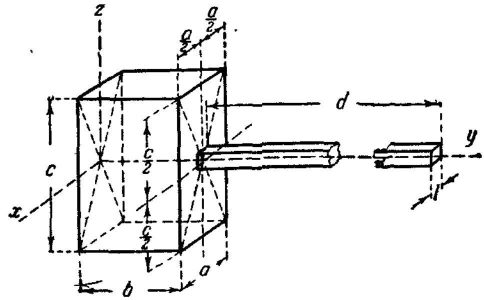
Ответ: $x = 1{,}47$ *м*; $y = 0{,}94$ *м*.

9.20 (302). Найти координаты центра тяжести деревянного молотка, состоящего из прямоугольного параллелепипеда и ручки с квадратным сечением. Дано: $a = 10$ *см*; $b = 8$ *см*; $c = 18$ *см*; $d = 40$ *см*; $l = 3$ *см*.

Ответ: $x = 0$; $y = 8{,}8$ *см*; $z = 0$.



К задаче 9.19.



К задаче 9.20.

9.21 (303). Корпус легкого крейсера весит 1900 *т*. Центр тяжести корпуса находится по вертикали над килем на высоте $y_1 = 6$ *м*. После спуска на воду внутри корпуса установлены главные машины и котлы. Главные машины весят 450 *т*, и ордината центра тяжести их $y_2 = 3$ *м*. Вес котлов равен 500 *т*, и ордината центра тяжести их $y_3 = 4{,}6$ *м*. Определить ординату y_C общего центра тяжести корпуса, машин и котлов.

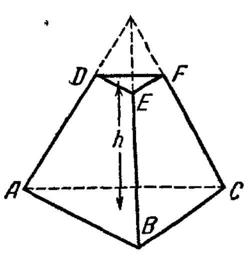
Ответ: $y_C = 5{,}28$ *м*.

9.22 (304). На корабле водоизмещением в 4500 *т* груз весом в 30 *т* перемещен из носового отсека в кормовой на расстояние 60 *м*. Насколько переместился общий центр тяжести корабля и груза?

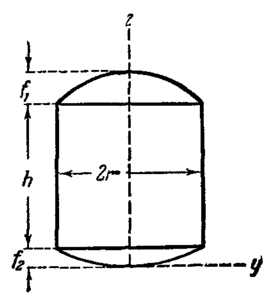
Ответ: На 0,4 *м*.

9.23 (305). Для однородного тетраэдра $ABCDEF$, усеченного параллельно основанию, даны: площадь $ABC = a$, площадь $DEF = b$, расстояние между ними h. Найти расстояние z центра тяжести данного усеченного тетраэдра от основания ABC.

Ответ: $z = \dfrac{h}{4}\,\dfrac{a + 2\sqrt{ab} + 3b}{a + \sqrt{ab} + b}$.



К задаче 9.23.

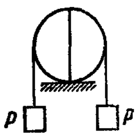


К задаче 9.24.

9.24 (306). Корпус якорной подводной мины имеет форму цилиндра с выпуклыми сферическими днищами. Радиус цилиндрического пояса $r = 0{,}4$ *м*, высота цилиндрического пояса $h = 2r$; высоты сферических сегментов соответственно равны: $f_1 = 0{,}5r$ и $f_2 = 0{,}2r$. Найти центр тяжести поверхности корпуса мины.

Ответ: $x_C = y_C = 0$; $z_C = 1{,}267r = 0{,}507$ *м*.

9.25 (307). Две половины круглого однородного цилиндра соединены нитью, перекинутой через цилиндр, к концам которой подвешены гири весом P *кГ* каждая. Вес цилиндра Q *кГ*. Плоскость соприкасания половин цилиндра вертикальна. Определить наименьшую величину P веса гирь, при которой обе половины цилиндра будут находиться в покое на горизонтальной плоскости.



К задаче 9.25.

Ответ: $P=\frac{2}{3}\frac{Q}{\pi}$ *кГ*.

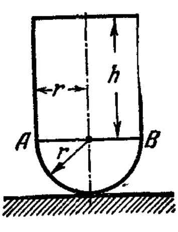
9.26 (308). Найти предельную высоту h цилиндра, при которой тело, состоящее из цилиндра и полушара одинаковой плотности и одинакового радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия, когда оно опирается поверхностью полушара на гладкую горизонтальную плоскость.

Центр тяжести всего тела должен совпадать с центром полушара. Расстояние центра тяжести однородного полушара от его основания равно $\frac{3}{8}r$.

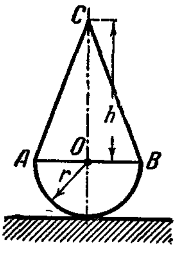
Ответ: $h=\frac{r}{\sqrt{2}}$.

9.27 (309). Найти предельную высоту h конуса, при которой тело, состоящее из конуса и полушара одинаковой плотности и радиуса r, теряет устойчивость в положении равновесия при условии предыдущей задачи.

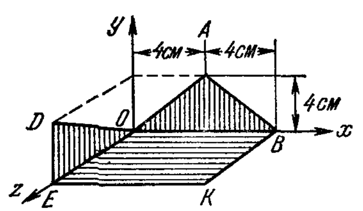
Ответ: $h=r\sqrt{3}$.



К задаче 9.26.



К задаче 9.27.



К задаче 9.28.

9.28. Тонкий однородный лист изогнут в виде двух треугольников и квадрата, как показано на рисунке: равнобедренный треугольник OAB лежит в плоскости xy, прямоугольный треугольник ODE — в плоскости yz (вершина прямого угла — точка E), квадрат $OBKE$ — в горизонтальной плоскости. Определить координаты центра тяжести изогнутого листа.

Ответ: $x_C=3{,}33$ *см*, $y_C=0{,}444$ *см*, $z_C=3{,}55$ *см*.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА III

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 10. Траектория и уравнения движения точки

10.1. По данному уравнению движения точки на произвольно выбранной траектории построить через равные промежутки времени шесть положений точки, определить расстояние s по траектории от начала отсчета до конечного положения точки и пройденный ею путь σ за указанный промежуток времени (s и σ — в сантиметрах, t — в секундах).

1) $s = 5 - 4t + t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Ответ: $s = 10$ *см*, $\sigma = 13$ *см*.

2) $s = 1 + 2t - t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 2{,}5$.

Ответ: $s = -0{,}25$ *см*, $\sigma = 3{,}25$ *см*.

3) $s = 4 \sin 10t$, $\frac{\pi}{20} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{10}$.

Ответ: $s = 0$, $\sigma = 20$ *см*.

10.2. По данным уравнениям движения точки найти уравнения ее траектории в координатной форме и указать на рисунке направление движения.

1) $x = 3t - 5$, $y = 4 - 2t$.

Ответ: Полупрямая $2x + 3y - 2 = 0$ с началом в точке $x = -5$, $y = 4$.

2) $x = 2t$, $y = 8t^2$.

Ответ: Правая ветвь параболы $y = 2x^2$ с начальной точкой $x = 0$, $y = 0$.

3) $x = 5 \sin 10t$, $y = 3 \cos 10t$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ с начальной точкой $x = 0$, $y = 3$.

4) $x = 2 - 3 \cos 5t$, $y = 4 \sin 5t - 1$.

Ответ: Эллипс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ с начальной точкой $x = -1$, $y = -1$.

5) $x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, $y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Ответ: Верхняя часть правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ с начальной точкой $x = 1$, $y = 0$.

10.3. Построить траекторию точки, радиус-вектор которой изменяется согласно уравнению ($\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{e}$ — постоянные заданные векторы, $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — координатные орты):

1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\cdot\boldsymbol{e}$.

Ответ: Полупрямая, проходящая через начальную точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{e}$.

2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\cos t\cdot\boldsymbol{e}$.

Ответ: Отрезок M_0M_1 прямой линии, проходящей через точку $M(\boldsymbol{r}_0)$ параллельно вектору $\boldsymbol{e}$. Начальная точка $M_0(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{e})$; вторая крайняя точка $M_1(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{e})$. При $t\to\infty$ конец радиус-вектора пройдет бесчисленное число раз через каждую точку траектории.

3) $\boldsymbol{r}=a\cos\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{i}+b\sin\frac{\pi}{1+t^2}\boldsymbol{j}$.

Ответ: Отрезок верхней части эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Точка начинает движение от левой вершины эллипса, монотонно приближаясь к его правой вершине.

10.4 (312). По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки:

1) $x=3t^2$, $y=4t^2$.

Ответ: Полупрямая $4x-3y=0$; $s=5t^2$.

2) $x=3\sin t$, $y=3\cos t$.

Ответ: Окружность $x^2+y^2=9$; $s=3t$.

3) $x=a\cos^2 t$, $y=a\sin^2 t$.

Ответ: Отрезок прямой $x+y-a=0$, причем $0\leqslant x\leqslant a$; $s=a\sqrt{2}\sin^2 t$.

4) $x=5\cos 5t^2$, $y=5\sin 5t^2$.

Ответ: Окружность $x^2+y^2=25$; $s=25t^2$.

10.5 (313). Мостовой кран движется вдоль мастерской согласно уравнению $x=t$; *по крану катится в поперечном направлении тележка* согласно уравнению $y=1{,}5t$ (x и y — в метрах, t — в секундах). Цепь укорачивается со скоростью $v=0{,}5$ *м/сек*. Определить траекторию центра тяжести груза; в начальном положении центр тяжести груза находился в горизонтальной плоскости Oxy; ось Oz направлена вертикально вверх.

Ответ: Траектория — прямая: $y=1{,}5x$; $z=0{,}5x$.

10.6 (314). Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями $x=3\sin t$, $y=2\cos 2t$ (t — в секундах). Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки в различные моменты времени. Указать также ближайший после начала движения момент времени t_1, когда траектория пересечет ось Ox.

Ответ: Часть параболы $4x^2+9y=18$, вдоль которой $|x|\leqslant 3$, $|y|\leqslant 2$;

$$t_1=\frac{\pi}{4}\ \textit{сек}.$$

10.7. При соответствующем выборе осей координат уравнения движения электрона в постоянном магнитном поле определяются равенствами

$$x = a\sin kt, \quad y = a\cos kt, \quad z = \nu t,$$

где a, k и ν — некоторые постоянные, зависящие от напряженности магнитного поля, массы, заряда и скорости электрона. Определить траекторию электрона и закон движения его по траектории.

Ответ: Электрон движется по винтовой линии. Начальная точка $x = 0$, $y = a$, $z = 0$; шаг винта $h = \frac{2\pi}{k}\nu$. Закон движения электрона по винтовой линии: $s = \sqrt{a^2k^2 + \nu^2}\,t$.

10.8. Гармонические колебания точки определяются законом $x = a\sin(kt + \varepsilon)$, где $a > 0$ — амплитуда колебаний, $k > 0$ — круговая частота колебаний и ε $(-\pi \leqslant \varepsilon \leqslant \pi)$ — начальная фаза.

Определить центр колебаний a_0, амплитуду, круговую частоту, период T, частоту колебаний f в герцах и начальную фазу по следующим уравнениям движения (x — в сантиметрах, t — в секундах):

Уравнение движения	Ответ					
	a_0 (*см*)	a (*см*)	k (*сек*$^{-1}$)	T (*сек*)	f (*гц*)	ε
1. $x = -7\cos 12t$	0	7	12	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
2. $x = 4\sin\frac{\pi t}{20} - 3\cos\frac{\pi t}{20}$	0	5	$\frac{\pi}{20}$	40	0,025	$-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$
3. $x = 2 - 4\sin 140t$	2	4	140	$\frac{\pi}{70}$	$\frac{70}{\pi}$	π
4. $x = 6\sin^2 18t$	3	3	36	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{18}{\pi}$	$-\frac{\pi}{2}$
5. $x = 1 - 4\cos^2\frac{\pi}{60}t$	-1	2	$\frac{\pi}{30}$	60	$\frac{1}{60}$	$\frac{\pi}{2}$

10.9 (310). Груз, поднятый на упругом канате, колеблется согласно уравнению $x = a\sin\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$, где a — в сантиметрах, k — в *сек*$^{-1}$. Определить амплитуду и круговую частоту колебаний груза, если период колебаний равен 0,4 *сек* и в начальный момент $x_0 = -4$ *см*. Построить также кривую расстояний.

Ответ: $a = 4$ *см*; $k = 5\pi$ *сек*$^{-1}$.

10.10 (315). Определить траекторию точки, совершающей одновременно два гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если колебания происходят по двум взаимно перпендикулярным осям:

$$x = a\sin(kt + \alpha), \quad y = b\sin(kt + \beta).$$

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$.

10.11 (316). Найти уравнение траектории движения точки, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты:

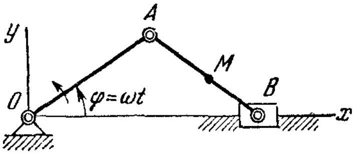
1) $x = a \sin 2\omega t$, $y = a \sin \omega t$;

2) $x = a \cos 2\omega t$, $y = a \cos \omega t$.

Ответ: 1) $x^2 a^2 = 4y^2 (a^2 - y^2)$;

2) $2y^2 - ax - a^2 = 0$, причем $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$.

10.12 (317). Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ *сек*$^{-1}$. Длина $OA = AB = 80$ *см*. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B, если в начальный момент ползун находился в крайнем правом положении; оси координат указаны на чертеже.



К задаче 10.12.

Ответ: 1) Траекторией точки M является эллипс

$$\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{40^2} = 1;$$

2) уравнение движения ползуна B

$$x = 160 \cos 10t.$$

10.13 (318). Уравнения движения точки обода колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, имеют вид

$$x = a(kt - \sin kt), \qquad y = a(1 - \cos kt).$$

Определить моменты времени, когда точка занимает низшее, среднее и высшее положения на траектории, считая, что ось y направлена вверх.

Ответ: 1) $\frac{2\pi}{k}\lambda$ *сек*; 2) $\left(\frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{k}\lambda\right)$ *сек*; 3) $\left(\frac{\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\lambda\right)$ ***сек***, где $\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$

10.14 (319). Определить уравнения движения и траекторию точки обода колеса радиуса $R = 1$ *м* автомобиля, если автомобиль движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью 20 *м/сек*. Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось Ox.

Ответ: Циклоида $x = 20t - \sin 20t$; $y = 1 - \cos 20t$.

10.15. Даны уравнения движения снаряда:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость снаряда, α — угол между $\boldsymbol{v}_0$ и горизонтальной осью x, g — ускорение силы тяжести.

Определить траекторию движения снаряда, высоту H, дальность L и время T полета снаряда.

Ответ: Траектория — парабола $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$; высота $H=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$; $L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$; $T=2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$.

10.16. В условиях предыдущей задачи определить, при каком угле бросания α дальность полета L будет максимальной. Найти соответствующие высоту и время полета.

Ответ: $\alpha=45°$; $L_{\max}=\frac{v_0^2}{g}$; $H=\frac{v_0^2}{4g}$; $T=\sqrt{2}\,\frac{v_0}{g}$.

10.17. В условиях задачи 10.15 определить угол бросания α, при котором снаряд попадет в точку A с координатами x и y.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2\pm\sqrt{v_0^4-2v_0^2gy-g^2x^2}}{gx}$.

10.18. Определить параболу безопасности (все точки, лежащие вне этой параболы, не могут быть достигнуты снарядом при данной начальной скорости v_0 и любом угле бросания α).

Ответ: $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$.

10.19. Точка движется по винтовой линии

$$x=a\cos kt,\quad y=a\sin kt,\ z=vt.$$

Определить уравнения движения точки в цилиндрических координатах.

Ответ: $r=a,\ \varphi=kt,\ z=vt$.

10.20. Даны уравнения движения точки:

$$x=2a\cos^2\frac{kt}{2},\quad y=a\sin kt,$$

где a и k — положительные постоянные. Определить траекторию и закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Ответ: Окружность $(x-a)^2+y^2=a^2$; $s=akt$.

10.21. В условиях предыдущей задачи определить уравнения движения точки в полярных координатах.

Ответ: $r=2a\cos\frac{kt}{2}$; $\varphi=\frac{kt}{2}$.

10.22. По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах

$$x=R\cos^2\frac{kt}{2},\quad y=\frac{R}{2}\sin kt,\quad z=R\sin\frac{kt}{2}$$

найти ее траекторию и уравнения движения в сферических координатах.

Ответ: Линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндра $\left(x-\frac{R}{4}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Уравнения движения в сферических координатах: $r=R,\ \varphi=\frac{kt}{2},\ \theta=\frac{kt}{2}$.

10.23. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных затухающих колебаниях, уравнения которых имеют вид

$$x=Ae^{-ht}\cos(kt+\varepsilon),\quad y=Ae^{-ht}\sin(kt+\varepsilon),$$

где $A > 0$, $h > 0$, $k > 0$ и ε — некоторые постоянные. Определить уравнения движения в полярных координатах и найти траекторию точки.

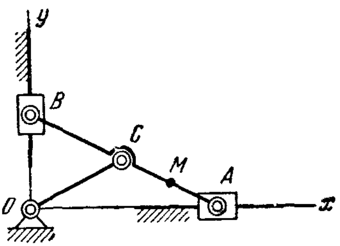
Ответ: $r = Ae^{-ht}$, $\varphi = kt + \varepsilon$; траектория — логарифмическая спираль $r = Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi - \varepsilon)}$.

§ 11. Скорость точки

11.1 (325). Точка совершает гармонические колебания по закону $x = a \sin kt$. Определить амплитуду a и круговую частоту k колебаний, если при $x = x_1$ скорость $v = v_1$, а при $x = x_2$ скорость $v = v_2$.

Ответ: $a = \sqrt{\dfrac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$;

$k = \sqrt{\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$.



К задаче 11.2.

11.2 (327). Длина линейки эллипсографа $AB = 40$ *см*, длина кривошипа $OC = 20$ *см*, $AC = CB$. Кривошип равномерно вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω. Найти уравнения траектории и годографа скорости точки M линейки, лежащей на расстоянии $AM = 10$ *см* от конца A.

Ответ: $\dfrac{x^2}{900} + \dfrac{y^2}{100} = 1$; $\dfrac{x_1^2}{900\omega^2} + \dfrac{y_1^2}{100\omega^2} = 1$.

11.3 (328). Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям

$$x = 2\cos t, \quad y = 4\cos 2t$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Oy.

Ответ: 1) $v = 2$ *см/сек*; $\cos(v, x) = -1$. 2) $v = 2$ *см/сек*; $\cos(v, x) = 1$.

11.4 (329). Точка движется согласно уравнениям

$$x = 4\sin\frac{\pi}{2}t, \quad y = 3\sin\frac{\pi}{2}t$$

(t — в секундах, x, y — в сантиметрах). Определить величину и направление скорости точки при $t = 0$; $t = 1$ *сек*; $t = 2$ *сек*.

Ответ: 1) $v_0 = \dfrac{5}{2}\pi$ *см/сек*; $\cos(v_0, x) = \dfrac{4}{5}$; $\cos(v_0, y) = \dfrac{3}{5}$.

2) $v_1 = 0$.

3) $v_2 = \dfrac{5}{2}\pi$ *см/сек*; $\cos(v_2, x) = -\dfrac{4}{5}$; $\cos(v_2, y) = -\dfrac{3}{5}$.

11.5 (330). Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти скорость середины M шатуна кривошипно-шатунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени, если $OA=AB=a$ (см. чертеж к задаче 10.12).

Ответ: 1) $v_M=\frac{a}{2}\omega\sqrt{8\sin^2\omega t+1}$. 2) $v_B=2a\omega\sin\omega t$.

11.6 (363). Движение точки задано уравнениями

$$x=v_0t\cos\alpha_0,\quad y=v_0t\sin\alpha_0-\frac{1}{2}gt^2,$$

причем ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, v_0, g и $\alpha_0<\frac{\pi}{2}$ — величины постоянные. Найти: 1) траекторию точки, 2) координаты наивысшего ее положения, 3) проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox.

Ответ: 1) Парабола $y=x\operatorname{tg}\alpha_0-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2$.

2) $x=\frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0$; $y=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha_0$.

3) $v_x=v_0\cos\alpha_0$; $v_y=\pm v_0\sin\alpha_0$,

причем верхний знак соответствует начальному моменту времени, а нижний — моменту

$$t=\frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}.$$

11.7 (364). Движение точки задано теми же уравнениями, что и в предыдущей задаче, причем $v_0=20$ *м/сек*, $\alpha_0=60°$, $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}. Найти, с какой скоростью v_1 должна выйти из начала координат в момент $t=0$ вторая точка для того, чтобы, двигаясь равномерно по оси Ox, она встретилась с первой точкой, и определить расстояние x_1 до места встречи.

Ответ: $v_1=10$ *м/сек*; $x_1=35{,}3$ *м*.

11.8 (365). Определить высоты h_1, h_2 и h_3 над поверхностью воды трех пунктов отвесного берега, если известно, что три пули, выпущенные одновременно в этих пунктах с горизонтальными скоростями 50, 75 и 100 *м/сек*, одновременно упали в воду, причем расстояние точки падения первой пули от берега равно 100 *м*; принять во внимание только ускорение силы тяжести $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}. Определить также продолжительность T полета пуль и их скорости v_1, v_2 и v_3 в момент падения в воду.

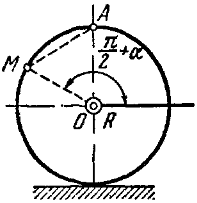
Ответ: $h_1=h_2=h_3=19{,}62$ *м*; $T=2$ *сек*; $v_1=53{,}71$ *м/сек*, $v_2=77{,}52$ *м/сек*, $v_3=101{,}95$ *м/сек*.

11.9 (366). Из орудия, ось которого образует угол 30° с горизонтом, выпущен снаряд со скоростью 500 *м/сек*. Предполагая, что снаряд имеет только ускорение силы тяжести $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}, найти годограф скорости снаряда и скорость точки, вычерчивающей годограф.

Ответ: Годограф — вертикальная прямая, отстоящая от начала координат на 432 *м*; $v_1=9{,}81$ *м/сек*^{2}.

11.10 (332). Определить уравнения движения и траекторию точки колеса электровоза радиуса $R=1$ *м*, лежащей на расстоянии

$a = 0{,}5$ *м* от оси, если колесо катится без скольжения по горизонтальному прямолинейному участку пути; скорость оси колеса $v = 10$ *м/сек*. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy — с радиусом точки при ее начальном низшем положении. Определить также скорость этой точки в те моменты времени, когда диаметр колеса, на котором она расположена, займет горизонтальное и вертикальное положения.

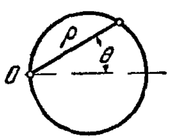


Ответ: Укороченная циклоида

$$x = 10t - 0{,}5 \sin 10t, \qquad y = 1 - 0{,}5 \cos 10t.$$

Скорость: 1) 11,18 *м/сек*; 2) 5 *м/сек*; 15 *м/сек*.

11.11 (333). Скорость электровоза $v_0 = 72$ *км/час*; радиус колеса его $R = 1$ *м*; колесо катится по прямолинейному рельсу без скольжения.



К задаче 11.11.

1) Определить величину и направление скорости v точки M на ободе колеса в тот момент, когда радиус точки M составляет с направлением скорости v_0 угол $\pi/2 + \alpha$.

2) Построить годограф скорости точки M и определить скорость v_1 точки, вычерчивающей годограф.

Ответ: 1) Скорость $v = 40 \cos\frac{\alpha}{2}$ *м/сек* и направлена по прямой MA.

2) Окружность $\rho = 2v_0 \cos\theta$, где $\theta = \frac{\alpha}{2}$, радиуса $r = v_0$ (см. чертеж); $v_1 = \frac{v_0^2}{R} = 400$ *м/сек*^{2}.

11.12 (334). Определить уравнения движения и траекторию точки M колеса вагона радиуса $R = 0{,}5$ *м*, отстоящей от оси на расстоянии $a = 0{,}6$ *м* и лежащей в начальный момент на 0,1 *м* ниже рельса, если вагон движется по прямолинейному пути со скоростью $v = 10$ *м/сек*. Найти также моменты времени, когда эта точка будет проходить свое нижнее и верхнее положения, и проекции ее скорости на оси Ox, Oy в эти моменты времени. Ось Ox совпадает с рельсом, ось Oy проходит через начальное нижнее положение точки.

Ответ: Удлиненная циклоида

$$x = 10t - 0{,}6 \sin 20t; \quad y = 0{,}5 - 0{,}6 \cos 20t;$$

при $t = \frac{\pi k}{10}$ *сек* — нижнее положение точки, $v_x = -2$ *м/сек*, $v_y = 0$; при $t = \frac{\pi}{20}(1 + 2k)$ *сек* — верхнее положение точки, $v_x = 22$ *м/сек*, $v_y = 0$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

11.13. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных затухающих колебаниях согласно уравнениям

$$x = Ae^{-ht} \cos(kt + \varepsilon), \qquad y = Ae^{-ht} \sin(kt + \varepsilon).$$

Определить проекции скорости точки на оси декартовых и полярных координат и найти модуль скорости точки

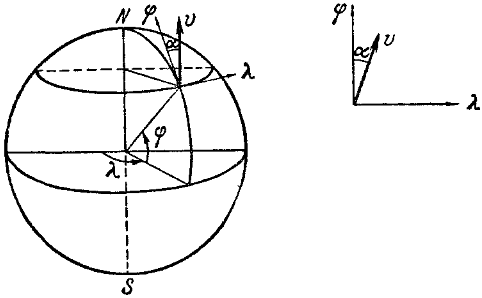
Ответ: 1) $v_x = -Ae^{-ht}[h\cos(kt+\varepsilon) + k\sin(kt+\varepsilon)]$,

$v_y = -Ae^{-ht}[h\sin(kt+\varepsilon) - k\cos(kt+\varepsilon)]$;

2) $v_r = -Ahe^{-ht}$, $v_\varphi = Ake^{-ht}$;

3) $v = A\sqrt{h^2+k^2}\,e^{-ht} = \sqrt{h^2+k^2}\,r$.

11.14. Какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану? Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара.



К задаче 11.14.

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_0}{2}\right)e^{(\lambda-\lambda_0)\operatorname{ctg}\alpha}$, где φ — широта, а λ — долгота текущего положения корабля (эта кривая называется локсодромией).

Указание. Воспользоваться сферическими координатами r, λ и φ.

11.15. Уравнения движения точки M в цилиндрической системе координат имеют вид (см. задачу 10.19)

$$r = a, \quad \varphi = kt, \quad z = \nu t.$$

Найти проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

Ответ: 1) $v_r = 0$, $v_\varphi = ak$, $v_z = \nu$;

2) $r_1 = ak$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$, $z_1 = \nu$;

3) $v_{r_1} = 0$, $v_{\varphi_1} = ak^2$, $v_{z_1} = 0$.

11.16. Точка M движется по окружности согласно уравнениям

$$r = 2a\cos\frac{kt}{2}, \quad \varphi = \frac{kt}{2}$$

(r, φ — полярные координаты). Найти проекции скорости точки M на оси полярной системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

Ответ: 1) $v_r = -ak\sin\frac{kt}{2}$, $v_\varphi = ak\cos\frac{kt}{2}$;

2) $r_1 = ak$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$;

3) $v_{r_1} = 0$, $v_{\varphi_1} = ak^2$.

11.17. Точка движется по линии пересечения сферы и цилиндра согласно уравнениям

$$r = R, \quad \varphi = \frac{kt}{2}, \quad \theta = \frac{kt}{2}$$

(r, φ, θ — сферические координаты; см. задачу 10.22). Найти модуль и проекции скорости точки на оси сферической системы координат.

Ответ: $v_r = 0$, $v_\varphi = \frac{Rk}{2}\cos\frac{kt}{2}$, $v_\theta = \frac{Rk}{2}$; $v = \frac{Rk}{2}\sqrt{1 + \cos^2\frac{kt}{2}}$.

11.18 (335). Найти в полярных координатах (r, φ) уравнение кривой, которую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на неподвижную точку (угол между направлением скорости и направлением на точку), если дано: α и $r_{\varphi=0} = r_0$. Корабль принять за точку, движущуюся на плоскости, и за полюс взять произвольную неподвижную точку в этой плоскости. Исследовать частные случаи $\alpha = 0$, $\pi/2$ и π.

Ответ: Логарифмическая спираль $r = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$. При $\alpha = \pi/2$ окружность $r = r_0$; при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ прямая.

§ 12. Ускорение точки

12.1 (336). Поезд движется со скоростью 72 *км/час*; при торможении он получает замедление, равное 0,4 *м/сек*^{2}. Найти, за какое время до прихода поезда на станцию и на каком от нее расстоянии должно быть начато торможение.

Ответ: 50 *сек*; 500 *м*.

12.2 (337). Копровая баба, ударив сваю, движется затем вместе с ней в течение 0,02 *сек* до остановки, причем свая углубляется в землю на 6 *см*. Определить начальную скорость движения сваи, считая его равнозамедленным.

Ответ: 6 *м/сек*.

12.3 (338). Водяные капли вытекают из отверстия вертикальной трубочки через 0,1 *сек* одна после другой и падают с ускорением 981 *см/сек*^{2}. Определить расстояние между первой и второй каплями через 1 *сек* после момента истечения первой капли.

Ответ: 93,2 *см*.

12.4 (339). Движение трамвая по прямолинейному пути в период разгона характеризуется тем, что проходимый трамваем путь пропорционален кубу времени; в течение первой минуты трамвай прошел путь 90 *м*. Найти скорость и ускорение в моменты $t = 0$ и $t = 5$ *сек*. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ: $v_0 = 0$; $w_0 = 0$; $v_5 = \frac{15}{8}$ *м/мин*; $w_5 = 45$ *м/мин*^{2}.

12.5 (341). Считая посадочную скорость самолета равной 400 *км/час*, определить замедление его при посадке на пути $l = 1200$ *м*, считая, что замедление постоянно.

Ответ: $w = 5{,}15$ *м/сек*^{2}.

12.6 (342). Копровая баба падает с высоты 2,5 *м*, а для ее поднятия на ту же высоту требуется втрое больше времени, чем на падение. Сколько ударов она делает в минуту, если считать, что свободное падение копровой бабы совершается с ускорением 9,81 *м/сек*^{2}?

Ответ: 21 удар.

12.7 (344). Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $w_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ *м/сек*^{2}. Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $v_{0x} = 2\pi$ *м/сек*, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат. Построить кривые расстояний, скоростей и ускорений.

Ответ: $x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ *м*.

12.8 (343). Поезд, имея начальную скорость 54 *км/час*, прошел 600 *м* в первые 30 *сек*. Считая движение поезда равнопеременным, определить скорость и ускорение поезда в конце 30-й секунды, если рассматриваемое движение поезда происходит на закруглении радиуса $R = 1$ *км*.

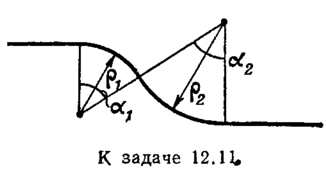
Ответ: $v = 25$ *м/сек*; $w = 0{,}708$ *м/сек*^{2}.

12.9 (372). При отходе от станции скорость поезда возрастает равномерно и достигает величины 72 *км/час* через 3 *мин* после отхода; путь расположен на закруглении радиуса 800 *м*. Определить касательное, нормальное и полное ускорения поезда через 2 *мин* после момента отхода от станции.

Ответ: $w_t = \frac{1}{9}$ *м/сек*^{2}; $w_n = \frac{2}{9}$ *м/сек*^{2}; $w = 0{,}25$ *м/сек*^{2}.

12.10 (345). Поезд движется равнозамедленно по дуге окружности радиуса $R = 800$ *м* и проходит путь $s = 800$ *м*, имея начальную скорость $v_0 = 54$ *км/час* и конечную $v = 18$ *км/час*. Определить полное ускорение поезда в начале и в конце дуги, а также время движения по этой дуге.

Ответ: $w_0 = 0{,}308$ *м/сек*^{2}; $w = 0{,}129$ *м/сек*^{2}; $T = 80$ *сек*.



К задаче 12.11.

12.11 (346). Закругление трамвайного пути состоит из двух дуг радиусов $\rho_1 = 300$ *м* и $\rho_2 = 400$ *м*. Центральные углы $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$. Построить график нормального ускорения вагона, идущего по закруглению со скоростью $v = 36$ *км/час*.

12.12 (348). Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20$ *см*. Закон ее движения по траектории: $s = 20 \sin \pi t$ (t — в секундах, s — в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t=5$ *сек*. Построить также график скорости, касательного и нормального ускорений.

Ответ: Скорость равна по величине 20π *см/сек* и направлена в сторону, противоположную положительному направлению отсчета дуги s; $w_t=0$; $w=w_n=20\pi^2$ *см/сек*^{2}.

12.13 (349). Прямолинейное движение точки происходит по закону $s=\frac{g}{a^2}(at+e^{-at})$, где a и g — постоянные величины. Найти начальную скорость точки, а также определить ее ускорение в функции от скорости.

Ответ: $v_0=0$; $w=g-av$.

12.14 (350). Движение точки задано уравнениями

$$x=10\cos 2\pi\frac{t}{5},\quad y=10\sin 2\pi\frac{t}{5}$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Найти траекторию точки, величину и направление скорости, а также величину и направление ускорения.

Ответ: Окружность радиуса 10 *см*; скорость $v=4\pi$ *см/сек* и направлена по касательной в сторону перехода от оси Ox к оси Oy поворотом на $90°$; ускорение $w=1{,}6\pi^2$ *см/сек*^{2} и направлено к центру.

12.15 (355). Уравнения движения пальца кривошипа дизеля в период пуска имеют вид $x=75\cos 4t^2$, $y=75\sin 4t^2$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Найти скорость, касательное и нормальное ускорения пальца.

Ответ: $v=600t$ *см/сек*; $w_t=600$ *см/сек*^{2}; $w_n=4800t^2$ *см/сек*^{2}.

12.16 (352). Движение точки задано уравнениями

$$x=a(e^{kt}+e^{-kt}),\quad y=a(e^{kt}-e^{-kt}),$$

где a и k — заданные постоянные величины.

Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки как функции радиуса-вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ответ: Гипербола $x^2-y^2=4a^2$; $v=kr$; $w=k^2r$.

12.17 (356). Найти ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент $t=1$ *сек*, если уравнения движения точки имеют вид

$$x=4\sin\frac{\pi}{2}t,\quad y=3\sin\frac{\pi}{2}t$$

(t — в секундах, x, y — в сантиметрах).

Ответ: $w=1{,}25\pi^2$ *см/сек*^{2}; $\rho=\infty$.

12.18 (357). Найти радиус кривизны при $x=y=0$ траектории точки, описывающей фигуру Лиссажу согласно уравнениям

$$x=-a\sin 2\omega t,\quad y=-a\sin\omega t.$$

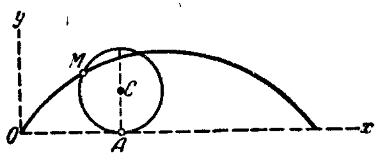
Ответ: $\rho=\infty$.

12.19 (358). Найти величину и направление ускорения, а также радиус кривизны траектории точки колеса, катящегося без скольжения по горизонтальной оси Ox, если точка описывает циклоиду согласно уравнениям

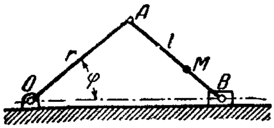
$$x = 20t - \sin 20t, \quad y = 1 - \cos 20t$$

(t — в секундах, x, y — в метрах). Определить также значение радиуса кривизны ρ при $t = 0$.

Ответ: Ускорение $w = 400$ *м/сек*^{2} и направлено по MC к центру C катящегося круга; $\rho = 2MA$; $\rho_0 = 0$.



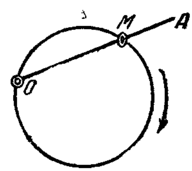
К задаче 12.19.



К задаче 12.20.

12.20. Найти траекторию точки M шатуна кривошипно-шатунного механизма, если $r = l = 60$ *см*, $MB = \frac{1}{3} l$, $\varphi = 4\pi t$ (t — в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.

Ответ: Эллипс $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$; $v = 80\pi$ *см/сек*; $w = 1600\pi^2$ *см/сек*^{2}; $\rho = 4$ *см*.



К задаче 12.21.

12.21. На проволочной окружности радиуса 10 *см* надето колечко M; через него проходит стержень OA, который равномерно вращается вокруг точки O, лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 *сек*. Определить скорость v и ускорение w колечка.

Ответ: $v = 2\pi$ *см/сек*; $w = 0{,}4\pi^2$ *см/сек*^{2}.

12.22 (367). Движение снаряда задано уравнениями

$$x = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

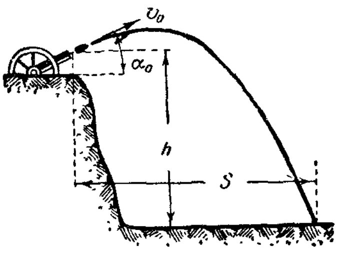
где v_0 и α_0 — постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при $t = 0$ и в момент падения на землю.

Ответ: $\rho = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha_0}$.

12.23 (368). Снаряд движется в вертикальной плоскости согласно уравнениям $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t — в секундах, x, y — в метрах). Найти: 1) скорость и ускорение в начальный момент, 2) высоту и дальность обстрела, 3) радиус кривизны траектории в начальной и в наивысшей точке.

Ответ: $v_0 = 500$ *м/сек*; $w_0 = 10$ *м/сек*^{2}; $h = 8$ *км*; $s = 24$ *км*; $\rho_0 = 41{,}67$ *км*; $\rho = 9$ *км*.

12.24 (370). Из орудия береговой артиллерии с высоты $h=30$ *м* над уровнем моря произведен выстрел под углом $\alpha_0=45°$ к горизонту с начальной скоростью снаряда $v_0=1000$ *м/сек*. Определить, на каком расстоянии от орудия снаряд попадет в цель, находящуюся на уровне моря. Сопротивлением воздуха пренебречь.



К задаче 12.24.

Ответ: 102 *км*.

12.25 (371). Найти касательное и нормальное ускорения точки, движение которой выражается уравнениями

$$x=\alpha t,\quad y=\beta t-\frac{gt^2}{2}.$$

Ответ: $w_t=-\frac{g(\beta-gt)}{v}$; $w_n=\frac{g\alpha}{v}$, где v — скорость точки.

12.26 (373). Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x=2\cos 4t$, $y=2\sin 4t$, $z=2t$, причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории.

Ответ: $\rho=2\frac{1}{8}$ *м*.

12.27 (374). Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r=ae^{kt}$ и $\varphi=kt$, где a и k — заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции ее радиуса-вектора r.

Ответ: $r=ae^{\varphi}$ — логарифмическая спираль; $v=kr\sqrt{2}$; $w=2k^2r$; $\rho=r\sqrt{2}$.

12.28. Движение точки задано уравнениями

$$x=2t,\quad y=t^2$$

(t — в секундах, x и y — в сантиметрах). Определить величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t=1$ *сек*.

Ответ: $v=2\sqrt{2}$ *см/сек*; $w=2$ *см/сек*^{2}; $(\widehat{v,x})=45°$, $(\widehat{w,x})=90°$.

12.29. Построить траекторию движения точки, годограф скорости и определить радиус кривизны траектории в начальный момент, если точка движется согласно уравнениям

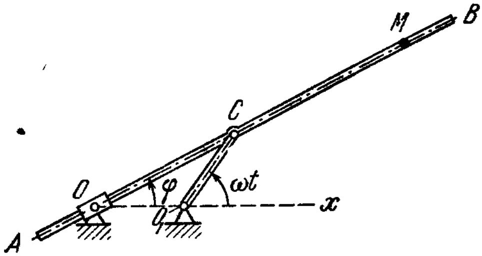
$$x=4t,\quad y=t^3$$

(t — в секундах, x и y — в сантиметрах).

Ответ: Уравнение траектории $y=\frac{x^3}{64}$ — кубическая парабола; годограф скорости — прямая, параллельная оси v_y; $\rho_0=\infty$ (начальная точка траектории — точка перегиба).

12.30. Кривошип O_1C длиной $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O_1. В точке C с кривошипом шарнирно связана линейка AB, проходящая все время через качающуюся муфту O, находящуюся на расстоянии $a/2$ от оси вращения O_1.

Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах уравнения движения точки M линейки, отстоящей от шарнира C на



К задаче 12.30.

расстоянии a, ее траекторию, скорость и ускорение (в начальный момент угол $\varphi = \angle COO_1 = 0$).

Ответ: 1) $r = a\left(1 + \cos\frac{\omega t}{2}\right)$, $\varphi = \frac{\omega t}{2}$;

2) $r = a(1 + \cos\varphi)$ — кардиоида;

3) $v = a\omega\cos\frac{\omega t}{4}$;

4) $w = \frac{a\omega^2}{4}\sqrt{5 + 4\cos\frac{\omega t}{2}}$.

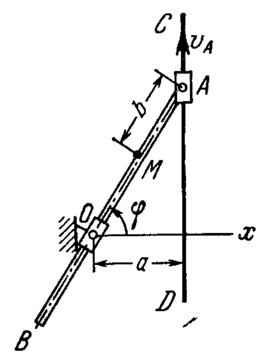
12.31. В условиях предыдущей задачи определить положение точки M, ее скорость и ускорение в начальный момент и в момент, когда кривошип сделает один полный оборот.

Ответ: 1) При $t = 0$ точка M будет находиться в крайнем правом положении на расстоянии $2a$ от точки O; скорость v перпендикулярна к оси x и равна $a\omega$; ускорение направлено к точке O и равно $\frac{3}{4}a\omega^2$.

2) После одного оборота кривошипа точка M будет проходить через точку O, $v = 0$, ускорение направлено к точке O_1 и равно $\frac{a\omega^2}{4}$.

12.32. В условиях задачи 12.31 определить радиус кривизны кардиоиды при $r = 2a$, $\varphi = 0$.

Ответ: $\rho_0 = \frac{4}{3}a$.



К задаче 12.33.

12.33. Конец A стержня AB перемещается по прямолинейной направляющей CD с постоянной скоростью v_A. Стержень AB все время проходит через качающуюся муфту O, отстоящую от направляющей CD на расстоянии a. Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах r, φ скорость и ускорение точки M, находящейся на линейке на расстоянии b от ползуна A.

Ответ: $v=\frac{v_A}{a}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+r^2\cos^4\varphi}$;

$$w=\frac{v_A^2}{a}\cos^2\varphi\left(1-\frac{r}{a}\cos\varphi\right)\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}.$$

12.34. Точка M движется по винтовой линии. Уравнения движения ее в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r=a,\quad \varphi=kt,\quad z=\nu t.$$

Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат, касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны винтовой линии.

Ответ: 1) $w_r=-ak^2$, $w_\varphi=0$, $w_z=0$;

2) $w_\tau=0$, $w_n=ak^2$;

3) $\rho=\frac{a^2k^2+\nu^2}{ak^2}$.

12.35. Точка M движется по линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндра $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$. Уравнения движения точки в сферических координатах имеют вид (см. задачу 10.22)

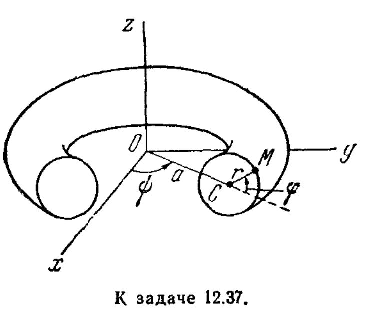
$$r=R,\quad \varphi=\frac{kt}{2},\quad \theta=\frac{kt}{2}.$$

Найти проекции и модуль ускорения точки в сферических координатах.

Ответ: $w_r=-\frac{Rk^2}{4}(1+\cos^2\theta)$, $w_\varphi=-\frac{Rk^2}{2}\sin\theta$,

$$w_\theta=-\frac{Rk^2}{4}\sin\theta\cos\theta;\qquad w=\frac{Rk^2}{4}\sqrt{4+\sin^2\theta}.$$

12.36. Корабль движется под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану, описывая при этом локсодромию (см задачу 11.14). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат r, λ и φ (λ — долгота, φ — широта места плавания), модуль ускорения и радиус кривизны локсодромии.



К задаче 12.37.

Ответ: $w_r=-\frac{v^2}{R}$,

$$w_\lambda=-\frac{v^2}{R}\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

$$w_\varphi=-\frac{v^2}{R}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi;$$

$$w=\frac{v^2}{R}\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi};$$

$$\rho=\frac{R}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}},$$

где R — радиус Земли.

12.37. Выразить декартовы координаты точки через тороидальные координаты $r=CM$, ψ и φ и определить коэффициенты Ляме.

Ответ: 1) $x=(a+r\cos\varphi)\cos\psi$, $\quad y=(a+r\cos\varphi)\sin\psi$, $z=r\sin\varphi$;

$$2)\ H_r=1, \quad H_\psi=a+r\cos\varphi, \quad H_\varphi=r.$$

12.38. Движение точки задано в тороидальной системе координат r, ψ и φ. Найти проекции скорости и ускорения точки на оси этой системы отсчета.

Ответ: 1) $v_r=\dot{r}$, $v_\psi=(a+r\cos\varphi)\dot{\psi}$, $v_\varphi=r\dot{\varphi}$;

2) $w_r=\ddot{r}-(a+r\cos\varphi)\cos\varphi\,\dot{\psi}^2-r\dot{\varphi}^2$,

$w_\psi=(a+r\cos\varphi)\ddot{\psi}+2\cos\varphi\,\dot{r}\dot{\psi}-2r\sin\varphi\dot{\psi}\dot{\varphi}$,

$w_\varphi=r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}+(a+r\cos\varphi)\sin\varphi\dot{\psi}^2$.

12.39. Точка движется по винтовой линии, намотанной на тор, по закону

$$r=R=\text{const}, \quad \psi=\omega t, \quad \varphi=kt.$$

Определить проекции скорости и ускорения точки в тороидальной системе координат ($\omega=\text{const}$, $k=\text{const}$).

Ответ: $v_r=0$, $v_\psi=(a+R\cos\varphi)\,\omega$, $v_\varphi=Rk$;

$w_r=-[(a+R\cos\varphi)\cos\varphi\omega^2+Rk^2]$, $w_\psi=-2R\omega k\sin\varphi$,

$w_\varphi=\omega^2(a+R\cos\varphi)\sin\varphi$.

ГЛАВА IV
ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 13. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

13.1 (375). Определить угловую скорость: 1) секундной стрелки часов, 2) минутной стрелки часов, 3) часовой стрелки часов, 4) вращения Земли вокруг своей оси, считая, что Земля делает один оборот за 24 часа, 5) паровой турбины Лаваля, делающей 15 000 *об/мин*.

Ответ: 1) $\omega = \frac{\pi}{30}$ *сек*$^{-1}$ $= 0{,}1047$ *сек*$^{-1}$;

2) $\omega = \frac{\pi}{1800}$ *сек*$^{-1}$ $= 0{,}001745$ *сек*$^{-1}$;

3) $\omega = \frac{\pi}{21\,600}$ *сек*$^{-1}$ $= 0{,}0001455$ *сек*$^{-1}$;

4) $\omega = \frac{\pi}{43\,200}$ *сек*$^{-1}$ $= 0{,}0000727$ *сек*$^{-1}$;

5) $\omega = 1571$ *сек*$^{-1}$.

13.2 (376). Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол поворота пропорционален кубу времени и при $t = 3$ *сек* угловая скорость диска соответствует $n = 810$ *об/мин*.

Ответ: $\varphi = \pi t^3$ *рад*.

13.3 (377). Маятник центробежного регулятора, вращающийся вокруг вертикальной оси AB, делает 120 *об/мин*. В начальный момент угол поворота был равен $\frac{\pi}{6}$ *рад*. Найти угол поворота и угловое перемещение маятника за время $t = 1/2$ *сек*.

Ответ: $\varphi = \frac{13}{6}\pi$ *рад*; $\Delta\varphi = 2\pi$ *рад*.

13.4 (378). Тело, начиная вращаться равноускоренно из состояния покоя, делает 3600 оборотов в первые 2 *мин*. Определить угловое ускорение.

Ответ: $\varepsilon = \pi$ *сек*$^{-2}$.

13.5 (379). Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5 *сек* он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечении этих 5 *сек*?

Ответ: $\omega = 5$ *об/сек* $= 10\pi$ *сек*$^{-1}$.

13.6 (380). *Маховое колесо начинает вращаться из состояния* покоя равноускоренно; через 10 *мин* после начала движения оно имеет угловую скорость, соответствующую 120 *об/мин.* Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 *мин*?

Ответ: 600 оборотов.

13.7 (381). Колесо, имеющее неподвижную ось, получило начальную угловую скорость 2π *сек*$^{-1}$; сделав 10 оборотов, оно вследствие трения в подшипниках остановилось. Определить угловое ускорение ε колеса, считая его постоянным.

Ответ: $\varepsilon = 0{,}1\pi$ *сек*$^{-2}$, вращение замедленное.

13.8 (382). С момента выключения мотора пропеллер самолета, вращавшийся с угловой скоростью, соответствующей $n = 1200$ *об/мин*, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Ответ: 8 *сек*.

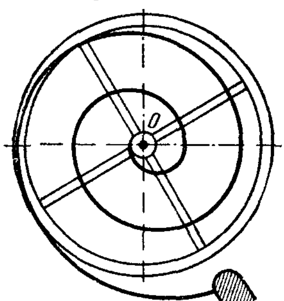
13.9 (383). Тело совершает колебания около неподвижной оси, причем угол поворота выражается уравнением

$$\varphi = 20^\circ \sin\psi,$$

где угол ψ выражен в угловых градусах зависимостью $\psi = (2t)^\circ$, причем t обозначает секунды. Определить угловую скорость тела в момент $t = 0$, ближайшие моменты t_1 и t_2, в которые изменяется направление вращения, и период колебания T.

Ответ: $\omega = \frac{1}{810}\pi^2$ *сек*$^{-1}$; $t_1 = 45$ *сек*; $t_2 = 135$ *сек*; $T = 180$ *сек*.

13.10 (384). Часовой балансир совершает крутильные гармонические колебания с периодом $T = 1/2$ *сек*. Наибольший угол отклонения точки обода балансира от положения равновесия $\alpha = \pi/2$ *рад*. Найти угловую скорость и угловое ускорение баланса через 2 *сек* после момента, когда балансир проходит положение равновесия.



К задаче 13.10.

Ответ: $\omega = 2\pi^2$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 0$.

13.11 (385). Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси O. Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\alpha = \pi/16$ *рад* через $2/3$ *сек*.

1) Написать закон колебаний маятника, считая, что он совершает гармонические колебания.

2) В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость и чему она равна?

Ответ: 1) $\varphi = \frac{\pi}{16}\sin\frac{3}{4}\pi t$ *рад*.

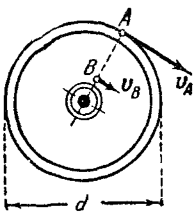
2) В отвесном положении; $\omega_{max} = \frac{3}{64}\pi^2$ *сек*$^{-1}$.

13.12 (386). Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда 60°; радиус Земли 6370 *км*.

Ответ: $v = 0{,}232$ *км/сек*; $w = 0{,}0169$ *м/сек*^{2}.

13.13 (387). Маховое колесо радиуса 0,5 *м* вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна 2 *м/сек*. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

Ответ: $n = 38{,}2$ *об/мин*.



К задаче 13.14.

13.14 (388). Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью 50 *см/сек*, а некоторая точка B, взятая на одном радиусе с точкой A, движется со скоростью 10 *см/сек*; расстояние $AB = 20$ *см*. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

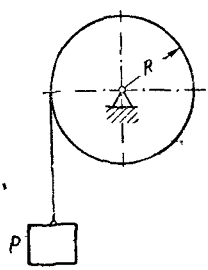
Ответ: $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$; $d = 50$ *см*.

13.15 (389). Маховое колесо радиуса $R = 2$ *м* вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10$ *сек* точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100$ *м/сек*. Найти скорость, нормальное и касательное ускорения точек обода колеса для момента $t = 15$ *сек*.

Ответ: $v = 150$ *м/сек*; $w_n = 11250$ *м/сек*^{2}; $w_\tau = 10$ *м/сек*^{2}.

13.16 (390). Найти горизонтальную скорость v, которую нужно сообщить телу, находящемуся на экваторе, для того, чтобы оно, двигаясь равномерно вокруг Земли по экватору в особых направляющих, имело ускорение свободного падения. Определить также время T, по истечении которого тело вернется в первоначальное положение. Радиус Земли $R = 637 \cdot 10^6$ *см*, а ускорение силы тяжести на экваторе $g = 978$ *см/сек*^{2}.

Ответ: $v = 7{,}9$ *км/сек*; $T = 1{,}4$ часа.



К задаче 13.18.

13.17 (391). Угол наклона полного ускорения точки обода махового колеса к радиусу равен 60°. Касательное ускорение ее в данный момент $w_\tau = 10\sqrt{3}$ *м/сек*^{2}. Найти нормальное ускорение точки, отстоящей от оси вращения на расстоянии $r = 0{,}5$ *м*. Радиус махового колеса $R = 1$ *м*.

Ответ: $w_n = 5$ *м/сек*^{2}.

13.18 (392). Вал радиуса $R = 10$ *см* приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x — расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t — время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t.

Ответ: $\omega = 20t$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 20$ *сек*$^{-2}$;

$$w = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ см/сек}^2.$$

13.19. Решить предыдущую задачу в общем виде, выразив ускорение точек обода колеса через пройденное гирей расстояние x, радиус колеса R и ускорение гири $\ddot{x} = w_0 = \text{const}$.

Ответ: $w = w_0 \sqrt{1 + 4\frac{x^2}{R^2}}$.

13.20. Стрелка гальванометра длиной 3 *см* колеблется вокруг неподвижной оси по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin kt.$$

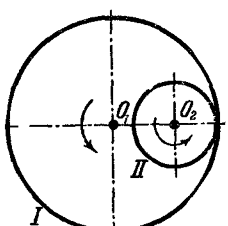
Определить ускорение конца стрелки в ее среднем и крайних положениях, а также моменты времени, при которых угловая скорость ω и угловое ускорение ε обращаются в нуль, если период колебаний равен 0,4 *сек*, а угловая амплитуда $\varphi_0 = \frac{\pi}{30}$.

Ответ: 1) В среднем положении стрелки $w = 8{,}1$ *см/сек*^{2}.
2) В крайних положениях стрелки $w = 77{,}5$ *см/сек*^{2}.
3) $\omega = 0$ при $t = (0{,}1 + 0{,}2n)$ *сек* ($n = 0, 1, 2, \ldots$).
4) $\varepsilon = 0$ при $t = 0{,}2n$ *сек* ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

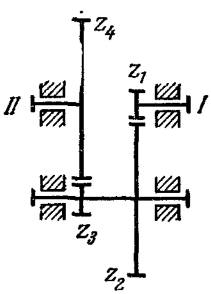
§ 14. Преобразование простейших движений твердого тела

14.1 (395). Зубчатое колесо *I* диаметром $D_1 = 360$ *мм* делает $n_1 = 100$ *об/мин*. Чему должен равняться диаметр зубчатого колеса *II*, находящегося с колесом *I* во внутреннем зацеплении и делающего $n_2 = 300$ *об/мин*?

Ответ: $D_2 = 120$ *мм*.



К задаче 14.1.

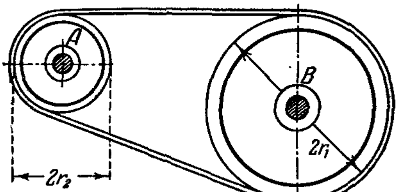


К задаче 14.2.

14.2 (396). Редуктор скорости, служащий для замедления вращения вала *I* и передающий вращение валу *II*, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубцов: $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$. Определить передаточное отношение механизма.

Ответ: $i_{I\,II} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = 35$.

14.3 (398). Станок со шкивом *A* приводится в движение из состояния покоя бесконечным ремнем от шкива *B* электромотора; радиусы шкивов: $r_1 = 75$ *см*, $r_2 = 30$ *см*; после пуска в ход электромотора его угловое ускорение равно $0{,}4\pi$ *сек*$^{-2}$. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить, через сколько времени станок будет делать 300 *об/мин*.

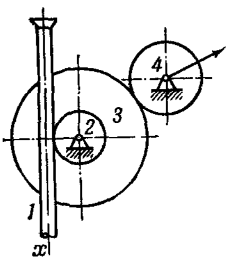


К задаче 14.3.

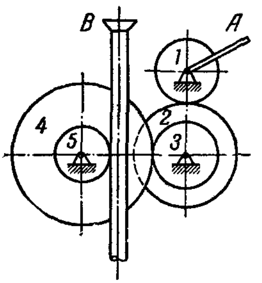
Ответ: 10 *сек*.

14.4 (400). В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного штифта *1* передается шестерне *2*, на оси которой укреплено зубчатое колесо *3*, сцепляющееся с шестерней *4*, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением $x = a \sin kt$ и радиусы зубчатых колес соответственно равны r_2, r_3 и r_4.

Ответ: $\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak \cos kt$.



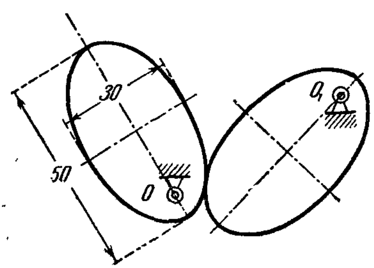
К задаче 14.4.



К задаче 14.5.

14.5 (401). В механизме домкрата при вращении рукоятки *A* начинают вращаться шестерни *1*, *2*, *3*, *4* и *5*, которые приводят в движение зубчатую рейку *B* домкрата. Определить скорость последней, если рукоятка *A* делает 30 *об/мин*. Числа зубцов шестерен: $z_1 = 6$, $z_2 = 24$, $z_3 = 8$, $z_4 = 32$; радиус пятой шестерни $r_5 = 4$ *см*.

Ответ: $v_B = 7{,}8$ *мм/сек*.



К задаче 14.6.

14.6 (402). Для получения периодически изменяющихся угловых скоростей сцеплены два одинаковых эллиптических зубчатых колеса, из которых одно вращается равномерно вокруг оси *O*, делая 270 *об/мин*, а другое приводится первым во вращательное движение вокруг оси O_1. Оси *O* и O_1 параллельны и проходят через фокусы эллипсов. Расстояние OO_1 равно 50 *см*; полуоси эллипсов 25 и 15 *см*. Определить наименьшую и наибольшую угловые скорости колеса O_1.

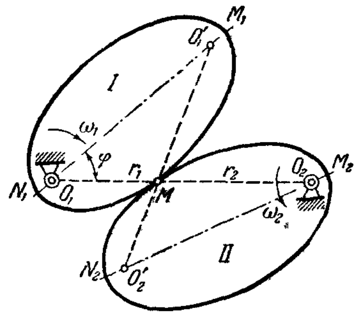
Ответ: $\omega_{min} = \pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{max} = 81\pi$ *сек*$^{-1}$.

14.7 (403). Вывести закон передачи вращения пары эллиптических зубчатых колес с полуосями a и b. Угловая скорость колеса I $\omega_1 = \text{const}$. Расстояние между осями $O_1O_2 = 2a$; φ — угол, образованный прямой, соединяющей оси вращения, и большой осью эллиптического колеса I. Оси проходят через фокусы эллипсов.

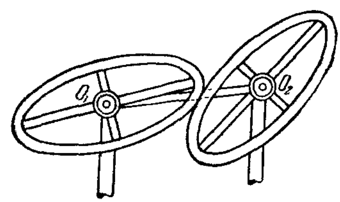
Ответ: $\omega_2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac\cos\varphi + c^2}\,\omega_1$, где c — линейный эксцентриситет эллипсов: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

14.8 (404). Найти наибольшую и наименьшую угловые скорости овального колеса O_2, сцепленного с колесом O_1, делающим 240 *об/мин*. Оси вращения колес находятся в центрах овалов. Расстояние между осями равно 50 *см*. Полуоси овалов равны 40 и 10 *см*.

Ответ: $\omega_{\min} = 2\pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{\max} = 32\pi$ *сек*$^{-1}$.



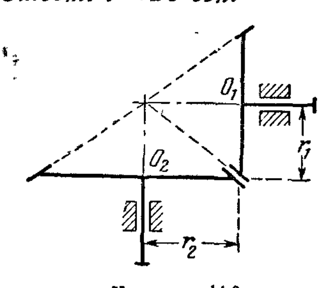
К задаче 14.7.



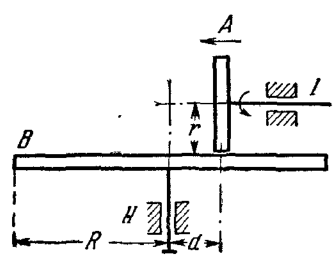
К задаче 14.8.

14.9 (405). Определить, через какой промежуток времени зубчатое коническое колесо O_1 радиуса $r_1 = 10$ *см* будет иметь угловую скорость, соответствующую $n_1 = 4320$ *об/мин*, если оно приводится во вращение из состояния покоя таким же колесом O_2 радиуса $r_2 = 15$ *см*, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением 2 *об/сек*^{2}.

Ответ: $t = 24$ *сек*.



К задаче 14.9.



К задаче 14.10.

14.10 (406). Ведущий вал I фрикционной передачи делает 600 *об/мин* и на ходу передвигается (направление указано стрелкой) так, что расстояние d меняется по закону $d = (10 - 0{,}5t)$ *см* (t — в секундах).

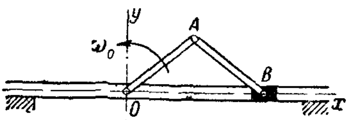
Определить: 1) угловое ускорение вала II как функцию от расстояния d;

2) ускорение точки на ободе колеса B в момент, когда $d=r$; даны радиусы фрикционных колес: $r=5$ *см*, $R=15$ *см*.

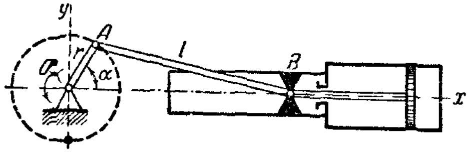
Ответ: 1) $\varepsilon=\frac{50\pi}{d^2}$ *сек*$^{-2}$; 2) $w=30\pi\sqrt{40\,000\pi^2+1}$ *см/сек*^{2}.

14.11 (407). Найти закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-шатунного механизма OAB, если длины шатуна и кривошипа одинаковы: $AB=OA=r$, а вращение кривошипа OA вокруг вала O равномерно: $\omega=\omega_0$. Ось x направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в центре O кривошипа.

Ответ: $x=2r\cos\omega_0 t$; $v_x=-2r\omega_0\sin\omega_0 t$; $w_x=-\omega_0^2 x$.



К задаче 14.11.



К задаче 14.12.

14.12 (408). Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-шатунного механизма, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Длина кривошипа $OA=r$, длина шатуна $AB=l$.

Ось Ox направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета — в центре O кривошипа. Отношение $\frac{r}{l}=\lambda$ следует считать весьма малым ($\lambda \ll 1$); $\alpha=\omega_0 t$.

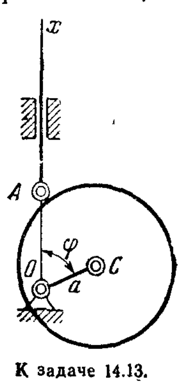
Ответ: $x=r\left(\cos\omega_0 t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega_0 t\right)+l-\frac{\lambda}{4}r$;

$$v_x=-r\omega_0\left(\sin\omega_0 t+\frac{\lambda}{2}\sin 2\omega_0 t\right);$$

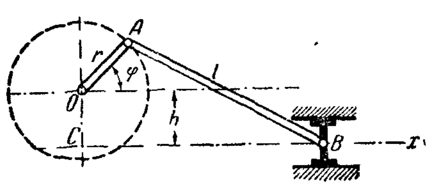
$$w_x=-r\omega_0^2(\cos\omega_0 t+\lambda\cos 2\omega_0 t).$$

14.13 (409). Найти закон движения стержня, если диаметр эксцентрика $d=2r$, а ось вращения O находится от оси диска C на расстоянии $OC=a$; ось Ox направлена по стержню, начало отсчета — на оси вращения, $\frac{a}{r}=\lambda$.

Ответ: $x=a\cos\varphi+r\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}$.



К задаче 14.13.

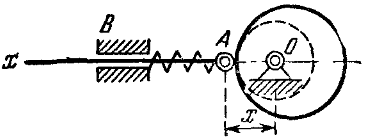


К задаче 14.14.

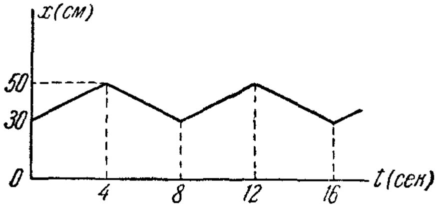
14.14 (411). Написать уравнение движения поршня нецентрального кривошипно-шатунного механизма. Расстояние от оси вращения кривошипа до направляющей линейки h, длина кривошипа r, длина шатуна l; ось Ox направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета расстояний — в крайнем правом положении ползуна; $\frac{l}{r}=\lambda$, $\frac{h}{r}=k$, $\varphi=\omega_0 t$.

Ответ: $x=r\left[\sqrt{(\lambda+1)^2-k^2}-\sqrt{\lambda^2-(\sin\varphi+k)^2}-\cos\varphi\right]$.

14.15. Кулак, равномерно вращаясь вокруг оси O, создает равномерное возвратно-поступательное движение стержня AB. Время



К задаче 14.15.



К ответу задачи 14.15.

одного полного оборота кулака 8 *сек*; уравнения движения стержня в течение этого времени имеют вид (x — в сантиметрах, t — в секундах)

$$x=\begin{cases}30+5t, & 0\leqslant t\leqslant 4,\\ 30+5(8-t), & 4\leqslant t\leqslant 8.\end{cases}$$

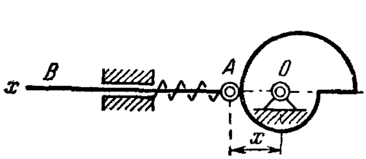
Определить уравнения контура кулака и построить график движения стержня.

Ответ: $r=\begin{cases}30+\frac{20}{\pi}\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ 30+\frac{20}{\pi}(2\pi-\varphi), & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$

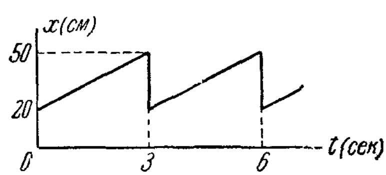
14.16. Найти закон движения и построить график возвратно-поступательного движения стержня AB, если задано уравнение профиля кулака

$$r=\left(20+\frac{15}{\pi}\varphi\right) см,\quad 0<\varphi<2\pi.$$

Кулак, вращаясь равномерно, делает 20 *об/мин*.



К задаче 14.16.



К ответу задачи 14.16.

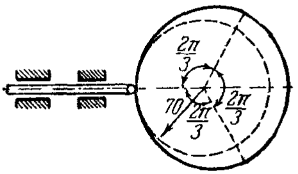
Ответ: $x=20+10t$ за время одного оборота кулака (3 *сек*), после чего движение периодически повторяется.

14.17 (414). Написать уравнение контура кулака, у которого полный ход стержня $h = 20$ *см* соответствовал бы одной трети оборота, причем перемещения стержня должны быть в это время пропорциональны углу поворота. В течение следующей трети оборота стержень должен оставаться неподвижным, и, наконец, на протяжении последней трети он должен совершать обратный ход при тех же условиях, что и на первой трети. Наименьшее расстояние конца стержня от центра кулака равно 70 *см*. Кулак делает 20 *об/мин*.

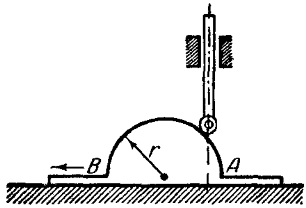
Ответ: Контур кулака, соответствующий первой трети оборота, представляет архимедову спираль:

$$r = \left(\frac{30}{\pi}\varphi + 70\right) \text{ см}.$$

Второй трети оборота соответствует окружность радиуса $r = 90$ *см*.



К задаче 14.17.



К задаче 14.18.

Для последней трети оборота контур кулака представляет собой также архимедову спираль:

$$r = \left(90 - \frac{30}{\pi}\varphi\right) \text{ см}.$$

14.18 (415). Найти, на какую длину опускается стержень, опирающийся своим концом о круговой контур радиуса $r = 30$ *см* кулака, движущегося возвратно-поступательно со скоростью $v = 5$ *см/сек*. Время опускания стержня $t = 3$ *сек*. В начальный момент стержень находится в наивысшем положении.

Ответ: $h = 4{,}020$ *см*.

14.19 (416). Найти ускорение кругового поступательно движущегося кулака, если при его равноускоренном движении без начальной скорости стержень опустился за 4 *сек* из наивысшего положения на $h = 4$ *см*. Радиус кругового контура кулака $r = 10$ *см*. (См. чертеж к задаче 14.18.)

Ответ: $w = 1$ *см/сек*^{2}.

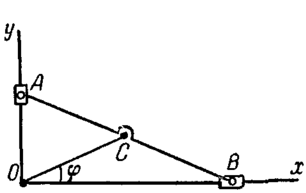
ГЛАВА V
ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 15. Уравнения движения плоской фигуры

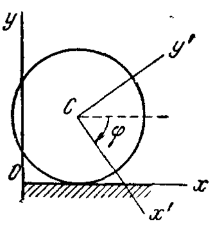
15.1 (492). Линейка эллипсографа приводится в движение кривошипом OC, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси O.

Приняв ползун B за полюс, написать уравнения плоского движения линейки эллипсографа, если $OC = BC = AC = r$. В начальный момент линейка AB была расположена горизонтально.

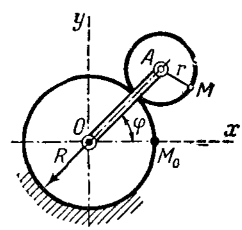
Ответ: $x_B = 2r\cos\omega_0 t$; $y_B = 0$; $\varphi = -\omega_0 t$.



К задаче 15.1.



К задаче 15.2.



К задаче 15.3.

15.2. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной прямой. Скорость центра C колеса постоянна и равна v.

Определить уравнения движения колеса, если в начальный момент ось y', жестко связанная с колесом, была вертикальна, а неподвижная ось y проходила в это время через центр C колеса. За полюс принять точку C.

Ответ: $x_C = vt$; $y_C = -R$; $\varphi = \frac{v}{R}t$.

15.3 (493). Шестеренка радиуса r, катящаяся по неподвижной шестеренке радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равноускоренно с угловым ускорением ε_0 вокруг оси O неподвижной шестеренки.

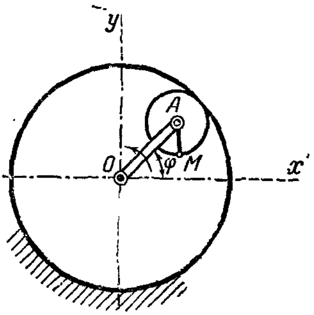
Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв за полюс ее центр A, если при $t = 0$ угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 0$ и начальный угол поворота $\varphi_0 = 0$.

Ответ: $x_A = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$;

$$y_A = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}; \quad \varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},$$

где φ_1 — угол поворота подвижной шестеренки.

15.4 (494). Шестеренка радиуса r, катящаяся внутри неподвижной шестеренки радиуса R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равномерно вокруг оси O неподвижной шестеренки с угловой скоростью ω_0. При $t = 0$ угол $\varphi_0 = 0$.



К задаче 15.4.

Составить уравнения движения подвижной шестеренки, приняв ее центр A за полюс.

Ответ: $x_A = (R - r)\cos\omega_0 t$;

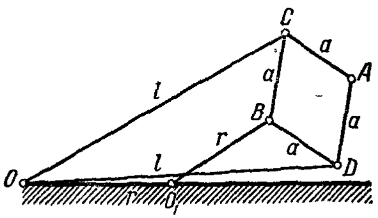
$$y_A = (R - r)\sin\omega_0 t; \quad \varphi_1 = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega_0 t,$$

где φ_1 — угол поворота подвижной шестеренки; знак минус показывает, что шестеренка вращается в сторону, противоположную кривошипу.

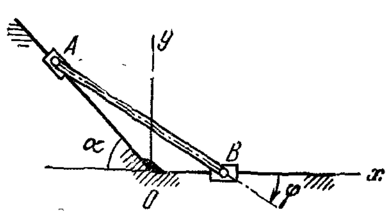
15.5 (495). *Найти уравнения движения шатуна паровой машины,* если кривошип вращается равномерно; за полюс взять точку A на оси пальца кривошипа; r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω_0 — угловая скорость кривошипа. При $t = 0$ угол $\alpha = 0$. (См. чертеж к задаче 14.12.)

Ответ: $x = r\cos\omega_0 t$; $y = r\sin\omega_0 t$; $\varphi = -\arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\omega_0 t\right)$.

15.6 (498). Инверсор, или прямило Поселье — Липкина представляет собой шарнирный механизм, состоящий из ромба $ADBC$



К задаче 15.6.



К задаче 15.7.

со сторонами длиной a, причем вершины C и D движутся по одной окружности при помощи стержней OC и OD длиной l, вершина B — по другой окружности при помощи стержня O_1B длиной $r = OO_1$.

Найти траекторию вершины A.

Ответ: Прямая, перпендикулярная к OO_1 и отстоящая от точки O на расстоянии $x = \frac{l^2 - a^2}{2r}$.

15.7. Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных направляющих, соединены стержнем AB длиной l. Муфта A движется с постоянной скоростью v_A.

Написать уравнения движения стержня AB, предполагая, что муфта A начала двигаться от точки O. За полюс принять точку A. Угол BOA равен $\pi - \alpha$.

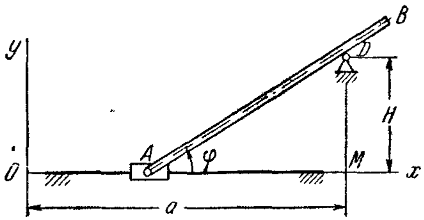
Ответ: $x_A = -v_A t \cos\alpha$; $y_A = v_A t \sin\alpha$; $\varphi = -\arcsin \frac{v_A t}{l} \sin\alpha$.

15.8. Конец A стержня AB скользит по прямолинейной направляющей с постоянной скоростью v, причем стержень при движении опирается на штифт D.

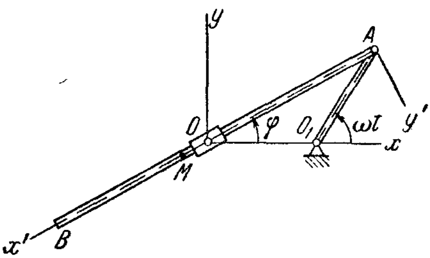
Написать уравнения движения стержня и его конца B. Длина стержня равна l, превышение штифта D над прямолинейной направляющей равно H. В начале движения конец стержня A совпадал с точкой O — началом неподвижной системы координат; $OM = a$. За полюс принять точку A.

Ответ: $x_A = vt$, $y_A = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{H}{a - vt}$;

$$x_B = vt + l \frac{a - vt}{\sqrt{H^2 + (a - vt)^2}}, \quad y_B = \frac{Hl}{\sqrt{H^2 + (a - vt)^2}}.$$



К задаче 15.8.



К задаче 15.9.

15.9. Кривошип O_1A длиной $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω. С кривошипом в точке A шарнирно соединен стержень AB, проходящий все время через качающуюся муфту O, причем $OO_1 = a/2$.

Найти уравнения движения стержня AB и траекторию (в полярных и декартовых координатах) точки M, находящейся на стержне на расстоянии a от шарнира A. За полюс принять точку A.

Ответ: 1) $x_A = \frac{a}{2}(1 + \cos\omega t)$, $y_A = \frac{a}{2}\sin\omega t$, $\varphi = \frac{\omega t}{2}$;

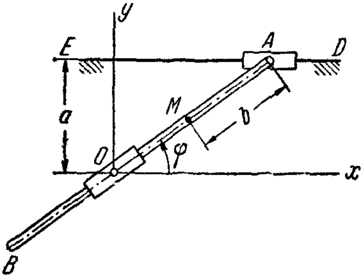
2) Кардиоида: $\rho = a(\cos\varphi - 1)$, $x^2 + y^2 = a\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

15.10 (500). Конхоидограф состоит из линейки AB, которая шарнирно соединена в точке A с ползуном, скользящим по прямолинейной направляющей ED, и проходит через качающуюся около неподвижной оси O муфту. Ползун совершает колебательное движение по закону $x = c \sin\omega t$, где c и ω — заданные постоянные числа (оси координат показаны на рисунке).

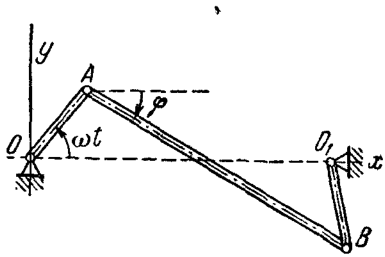
Найти уравнения движения линейки AB и уравнения в полярных и декартовых координатах кривой, которую описывает точка M линейки AB, если $AM = b$.

Ответ: 1) $x_A = c \sin \omega t,\ y_A = a,\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{c \sin \omega t}$;

2) $\rho = \frac{a}{\sin \varphi} - b,\ (x_M^2 + y_M^2)(y_M - a)^2 = b^2 y_M^2$.



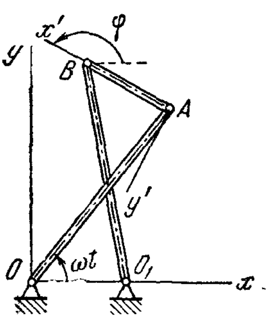
К задаче 15.10.



К задаче 15.11.

15.11. Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на большое звено OO_1, равномерно вращается с угловой скоростью ω. Приняв за полюс точку A, составить уравнения движения звена AB, если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ $(a < b)$; в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1.

Ответ: $x_A = a \cos \omega t$; $y_A = a \sin \omega t$; $\varphi = -2 \operatorname{arctg} \frac{a \sin \omega t}{b - a \cos \omega t}$.



К задаче 15.12.

15.12. Кривошип OA антипараллелограмма $OABO_1$, поставленного на малое звено OO_1, равномерно вращается с угловой скоростью ω.

Приняв за полюс точку A, составить уравнения движения звена AB, если $OA = O_1B = a$ и $OO_1 = AB = b$ $(a > b)$; в начальный момент кривошип OA был направлен по OO_1.

Ответ: $x_A = a \cos \omega t$; $y_A = a \sin \omega t$; $\varphi = 2 \operatorname{arcctg} \frac{\cos \omega t - b/a}{\sin \omega t}$.

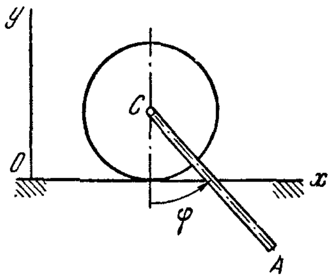
§ 16. Скорости точек твердого тела в плоском движении. Мгновенный центр скоростей

16.1. Направив ось перпендикулярно к скорости любой из точек плоской фигуры, показать, что проекции на эту ось скоростей всех лежащих на ней точек равны нулю.

16.2. Центр C колеса, катящегося по прямолинейному горизонтальному рельсу, движется по закону $x_C = 2t^2$ *см*. Стержень AC длиной $l = 12$ *см* совершает колебания вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной к плоскости чертежа, согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ *рад*.

Определить скорость конца A стержня AC в момент времени $t=0$.

Ответ: Скорость направлена по горизонтали вправо и равна по модулю 9,86 *см/сек*.

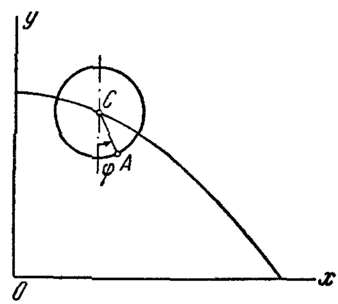


К задаче 16.2.

16.3. Сохранив условие предыдущей задачи, определить скорость конца A стержня AC в момент времени $t=1$ *сек*.

Ответ: Скорость направлена по горизонтали вправо и равна по модулю 4 *см/сек*.

16.4. При движении диска радиуса $r=20$ *см* в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям $x_C = 10t$ *м*, $y_C = (100 - 4{,}9t^2)$ *м*. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной к плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ *сек*$^{-1}$.



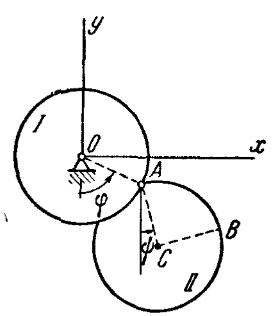
К задаче 16.4.

Определить в момент времени $t=0$ скорость точки A, лежащей на ободе диска. Положение точки A на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали против хода часовой стрелки.

Ответ: Скорость направлена по горизонтали вправо и равна по модулю 10,31 *м/сек*.

16.5. Сохранив условие предыдущей задачи, определить скорость точки A в момент времени $t=1$ *сек*.

Ответ: $v_{A_x} = 10$ *м/сек*; $v_{A_y} = -9{,}49$ *м/сек*; $v_A = 13{,}8$ *м/сек*.



К задаче 16.6.

16.6. Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром A. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O по закону $\varphi = \varphi(t)$. Диск II вращается вокруг горизонтальной оси A согласно уравнению $\psi = \psi(t)$. Оси O и A перпендикулярны к плоскости чертежа. Углы φ и ψ отсчитываются от вертикали против хода часовой стрелки.

Найти скорость центра C диска II.

Ответ: $v_{C_x} = r(\dot\varphi\cos\varphi + \dot\psi\cos\psi)$; $v_{C_y} = r(\dot\varphi\sin\varphi + \dot\psi\sin\psi)$;

$$v_C = r\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi - \psi)}.$$

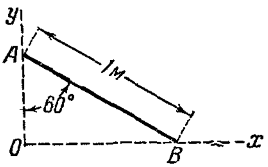
16.7. Сохранив условие предыдущей задачи, найти скорость точки B диска II, если $\angle ACB = \pi/2$.

Ответ: $v_{B_x} = r[\dot{\varphi}\cos\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\cos(45^\circ + \psi)]$; $v_{B_y} = r[\dot{\varphi}\sin\varphi + \sqrt{2}\dot{\psi}\sin(45^\circ + \psi)]$; $v_B = r\sqrt{\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\sqrt{2}\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos[45^\circ - (\varphi - \psi)]}$.

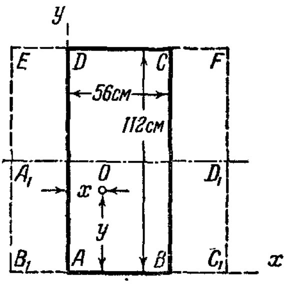
16.8 (501). Стержень AB длиной 1 *м* движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy.

Найти координаты x и y мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол $OAB = 60^\circ$.

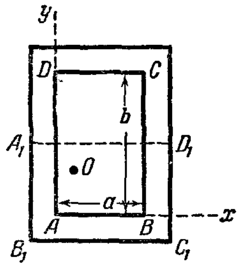
Ответ: $x = 0{,}866$ *м*; $y = 0{,}5$ *м*.



К задаче 16.8.



К задаче 16.9



К задаче 16.10.

16.9 (502). Доска складного стола, имеющая форму прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 56$ *см* и $AD = 112$ *см*, поворачивается вокруг оси шипа O так, что занимает положение $A_1B_1C_1D_1$, где $AB_1 = BC_1$; при раскладывании затем получается квадрат B_1EFC_1.

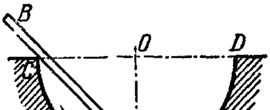
Найти положение оси шипа.

Ответ: $x = 14$ *см*; $y = 42$ *см*.

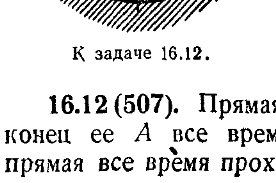
16.10 (503). Доска складного стола, имеющая форму прямоугольника со сторонами a и b, поворотом вокруг оси шипа O переводится из положения $ABCD$ в положение $A_1B_1C_1D_1$ и, будучи разложена, образует прямоугольник со сторонами b и $2a$.

Найти положение оси шипа O относительно сторон AB и AD.

Ответ: $x_O = \frac{a}{4}$; $y_O = \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$.



К задаче 16.11.



К задаче 16.12.

16.11 (506). Прямая AB движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени скорость v_A точки A составляет с прямой AB угол 30° и равна 180 *см/сек*, направление скорости точки B в этот момент совпадает с направлением прямой AB.

Определить скорость v_B точки B.

Ответ: $v_B = 156$ *см/сек*.

16.12 (507). Прямая AB движется в плоскости чертежа, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD.

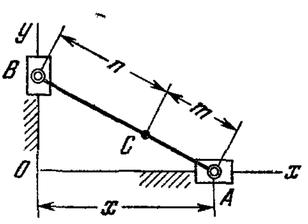
Определить скорость v_C точки прямой, совпадающей с точкой C, в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен к CD, если известно, что скорость точки A в этот момент 4 *м/сек*.

Ответ: $v_C = 2{,}83$ *м/сек*.

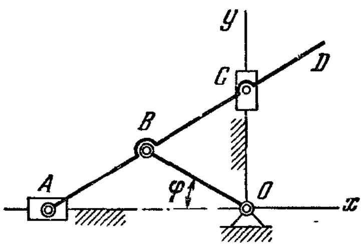
16.13 (515). Линейка эллипсографа AB длиной l движется концом A по оси Ox, а концом B — по оси Oy. Конец линейки A совершает гармоническое колебательное движение $x = a \sin \omega t$, где $a < l$.

Определить величину скорости v точки C, зная, что $CA = m$, $BC = n$, $\omega = \text{const}$.

Ответ: $v_C = \dfrac{a\omega}{l} \cos \omega t \sqrt{n^2 - m^2 + \dfrac{m^2 l^2}{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t}}$.



К задаче 16.13.



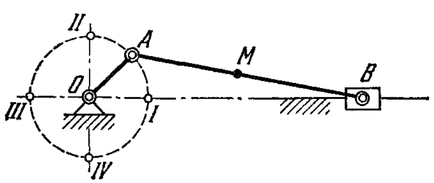
К задаче 16.14.

16.14 (518). Стержень OB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$ и приводит в движение стержень AD, точки A и C которого движутся по осям: A — по горизонтальной Ox, C — по вертикальной Oy.

Определить скорость точки D стержня при $\varphi = 45°$ и найти уравнение траектории этой точки, если $AB = OB = BC = CD = 12$ *см*.

Ответ: $v_D = 53{,}66$ *см/сек*; $\left(\dfrac{x}{12}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{36}\right)^2 = 1$.

16.15 (516). В кривошипном механизме длина кривошипа $OA = 40$ *см*, длина шатуна $AB = 2$ *м*; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей 180 *об/мин*.



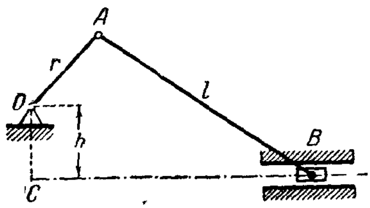
К задаче 16.15.

Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки M при четырех положениях кривошипа, для которых угол AOB соответственно равен $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: *I.* $\omega = -\dfrac{6}{5}\pi$ *сек*$^{-1}$; $v_M = 377$ *см/сек*. *II.* $\omega = 0$; $v_M = 754$ *см/сек*. *III.* $\omega = \dfrac{6}{5}\pi$ *сек*$^{-1}$; $v_M = 377$ *см/сек*. *IV.* $\omega = 0$; $v_M = 754$ *см/сек*.

Знак минус в выражении ω указывает, что шатун вращается в сторону, противоположную кривошипу.

16.16 (517). Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1{,}5$ *сек*$^{-1}$, если $OA = 40$ *см*, $AB = 200$ *см*, $OC = 20$ *см*.



К задаче 16.16.

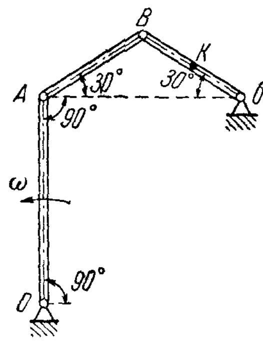
Ответ: $v_1 = v_3 = 6{,}03$ *см/сек*; $v_2 = v_4 = 60$ *см/сек*.

16.17. Определить скорость точки K четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на чертеже, если звено OA длиной 20 *см* имеет в данный момент угловую скорость 2 *сек*$^{-1}$. Точка K расположена в середине стержня BO_1.

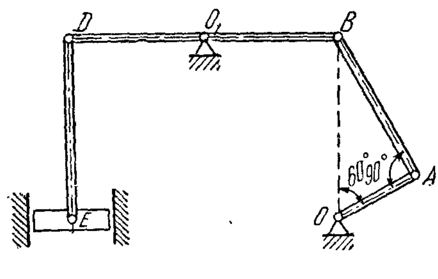
Ответ: 20 *см/сек*.

16.18. Определить скорость поршня E приводного механизма насоса в положении, указанном на чертеже, если $OA = 20$ *см*, $O_1B = O_1D$. Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью 2 *сек*$^{-1}$.

Ответ: 46,25 *см/сек*.

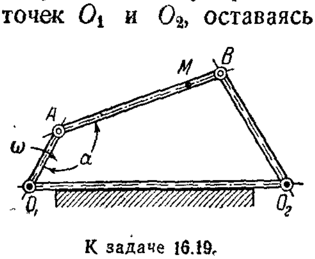


К задаче 16.17.



К задаче 16.18.

16.19 (521). Стержни O_1A и O_2B, соединенные со стержнем AB посредством шарниров A и B, могут вращаться вокруг неподвижных точек O_1 и O_2, оставаясь в одной плоскости и образуя шарнирный четырехзвенник. Дано: длина стержня $O_1A = a$ и его угловая скорость ω.



К задаче 16.19.

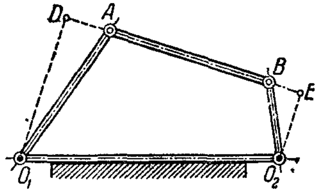
Определить построением ту точку M стержня AB, скорость которой направлена вдоль этого стержня, а также найти величину скорости v точки M в тот момент, когда угол O_1AB имеет данную величину α.

Ответ: $v_M = a\omega \sin \alpha$.

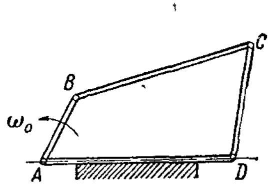
16.20 (522). Угловая скорость стержня O_1A шарнирного четырехзвенника равна ω_1.

Выразить угловую скорость ω_2 стержня O_2B через ω_1 и кратчайшие расстояния O_1D и O_2E от осей вращения стержней O_1A и O_2B до шатуна AB.

Ответ: $\omega_2 = \omega_1 \dfrac{O_1D}{O_2E}$.



К задаче 16.20.



К задаче 16.21.

16.21 (523). В шарнирном четырехзвеннике $ABCD$ ведущий кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 6\pi$ *сек*$^{-1}$.

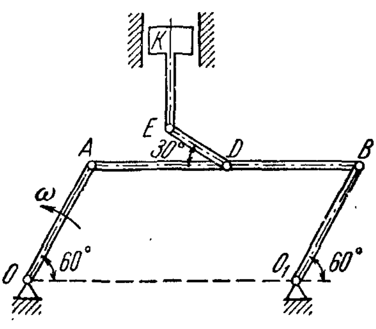
Определить мгновенные угловые скорости кривошипа CD и стержня BC в тот момент, когда кривошип AB и стержень BC образуют одну прямую, если $BC = 3AB$.

Ответ: $\omega_{BC} = 2\pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{CD} = 0$.

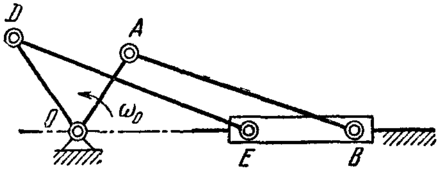
16.22. К середине D стержня AB шарнирного параллелограмма $OABO_1$ присоединен с помощью шарнира D стержень DE, приводящий в возвратно-поступательное движение ползун K.

Определить скорость ползуна K и угловую скорость стержня DE в положении, указанном на чертеже, если $OA = O_1B = 2DE = 20$ *см*, а угловая скорость звена OA равна в данный момент 1 *сек*$^{-1}$.

Ответ: $v_K = 40$ *см/сек*; $\omega_{DE} = 3{,}46$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 16.22.



К задаче 16.23.

16.23 (526). Ползуны B и E сдвоенного кривошипно-шатунного механизма соединены стержнем BE. Ведущий кривошип OA и ведомый кривошип OD качаются вокруг общей неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа.

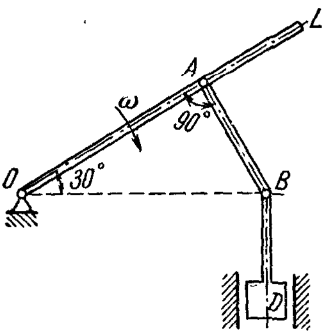
Определить мгновенные угловые скорости ведомого кривошипа OD и шатуна DE в тот момент, когда ведущий кривошип OA, имеющий мгновенную угловую скорость $\omega_0 = 12$ *сек*$^{-1}$, перпендикулярен к направляющей ползунов. Даны размеры: $OA = 10$ *см*; $OD = 12$ *см*; $AB = 26$ *см*; $EB = 12$ *см*; $DE = 12\sqrt{3}$ *см*.

Ответ: $\omega_{OD} = 10\sqrt{3}$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{DE} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ *сек*$^{-1}$.

16.24. Поршень D гидравлического пресса приводится в движение посредством шарнирно-рычажного механизма $OABD$. В положении, указанном на чертеже, рычаг OL имеет угловую скорость $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$.

Определить скорость поршня D и угловую скорость звена AB, если $OA = 15$ *см*.

Ответ: $v_D = 34{,}6$ *см/сек*; $\omega_{AB} = 2$ *сек*$^{-1}$.

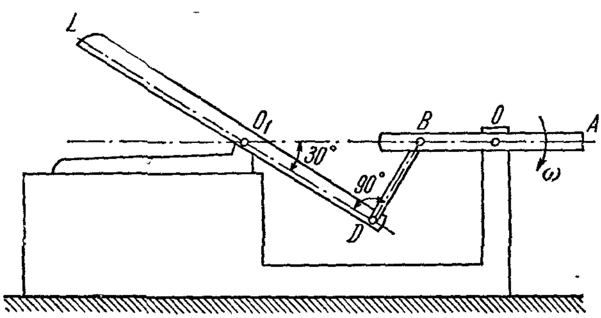


К задаче 16.24.

16.25. Подвижное лезвие L ножниц для резки металла приводится в движение шарнирно-рычажным механизмом $AOBD$.

Определить скорость шарнира D и угловую скорость звена BD, если в положении, указанном на чертеже, угловая скорость рычага AB равна 2 *сек*$^{-1}$, $OB = 5$ *см*, $O_1D = 10$ *см*.

Ответ: $v_D = 8{,}65$ *см/сек*; $\omega_{BD} = 0{,}87$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 16.25.

16.26. Определить скорость поршня E и угловые скорости стержней AB и BE механизма пресса в положении, указанном на чертеже, если звено OA имеет в данный момент угловую скорость $\omega = 4$ *сек*$^{-1}$, $OA = 10$ *см*, $BD = BE = 20$ *см*.

Ответ: $v_E = 40$ *см/сек*; $\omega_{AB} = 0$; $\omega_{BE} = 2$ *сек*$^{-1}$.

16.27 (528). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 12$ *см*, расстояние между осью вала и осью цапф цилиндра $OO_1 = 60$ *см*, длина шатуна $AB = 60$ *см*.

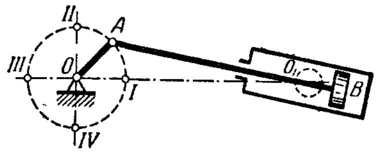
Определить скорость поршня при четырех положениях кривошипа, указанных на чертеже, если угловая скорость кривошипа $\omega = 5$ *сек*$^{-1}$ = const.

Ответ: $v_I = 15$ *см/сек*; $v_{III} = 10$ *см/сек*; $v_{II} = v_{IV} = 58{,}88$ *см/сек*.

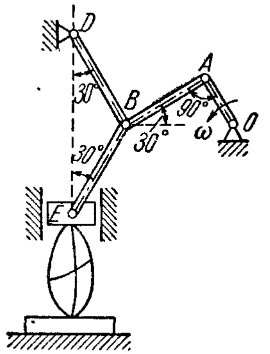
16.28 (529). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA = 15$ *см*, угловая скорость кривошипа $\omega_0 = 15$ $сек^{-1} = \text{const}$.

Найти скорость поршня и угловую скорость цилиндра в момент, когда кривошип перпендикулярен к шатуну. (См. чертеж к задаче 16.27.)

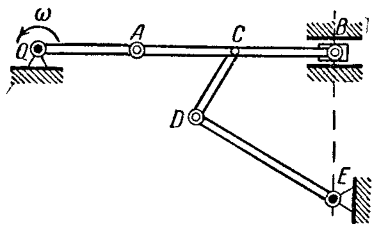
Ответ: $v = 225$ *см/сек*, $\omega = 0$.



К задаче 16.27.



К задаче 16.26.



К задаче 16.29.

16.29 (530). Кривошипный механизм связан шарнирно в середине C шатуна со стержнем CD, а последний — со стержнем DE, который может вращаться вокруг оси E.

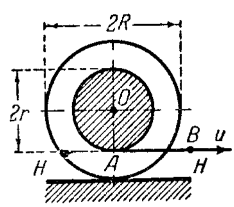
Определить угловую скорость стержня DE в указанном на чертеже положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на одной вертикали; угловая скорость ω кривошипа OA равна 8 $сек^{-1}$; $OA = 25$ *см*, $DE = 100$ *см*, $\angle CDE = 90°$ и $\angle BED = 30°$.

Ответ: $\omega_{DE} = 0{,}5$ $сек^{-1}$.

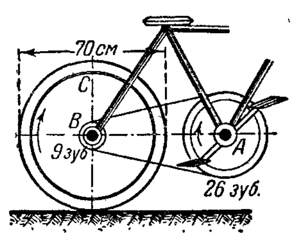
16.30 (508). Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью u по горизонтальному направлению.

Определить скорость v перемещения оси катушки.

Ответ: $v = u\dfrac{R}{R-r}$.



К задаче 16.30.



К задаче 16.31.

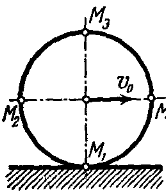
16.31 (509). Цепная передача в велосипеде состоит из цепи, охватывающей зубчатое колесо A с 26 зубцами и шестерню B с

9 зубцами. Шестерня B неизменно соединена с задним колесом C, диаметр которого равен 70 *см*.

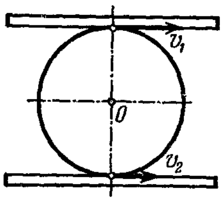
Определить скорость велосипеда, когда колесо A делает в секунду один оборот, а колесо C катится при этом без скольжения по прямолинейному пути.

Ответ: 22,87 *км/час*.

16.32 (510). Колесо радиуса $R = 0{,}5$ *м* катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна $v_0 = 10$ *м/сек*.



К задаче 16.32.



К задаче 16.33.

Найти скорости концов M_1, M_2, M_3 и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.

Ответ: $v_1 = 0$; $v_2 = 14{,}14$ *м/сек*; $v_3 = 20$ *м/сек*; $v_4 = 14{,}14$ *м/сек*; $\omega = 20$ $сек^{-1}$.

16.33 (511). Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями $v_1 = 6$ *м/сек* и $v_2 = 2$ *м/сек*. *Между рейками зажат диск радиуса* $a = 0{,}5$ *м, катящийся по рейкам* без скольжения.

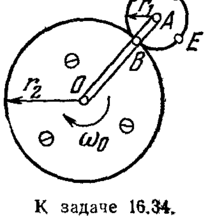
Найти угловую скорость диска и скорость его центра.

Ответ: $\omega = 4$ $сек^{-1}$; $v_O = 4$ *м/сек*.

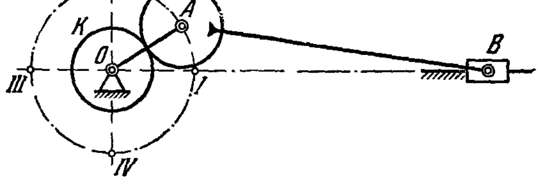
16.34 (513). Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega_0 = 2{,}5$ $сек^{-1}$ вокруг оси O неподвижной шестеренки радиуса $r_2 = 15$ *см*, приводит в движение насаженную на его конце A шестеренку радиуса $r_1 = 5$ *см*.

Определить величину и направление скоростей точек A, B, C, D и E подвижной шестеренки, если $CE \perp BD$.

Ответ: $v_A = 50$ *см/сек*; $v_B = 0$; $v_D = 100$ *см/сек*; $v_C = v_E = 70{,}7$ *см/сек*.



К задаче 16.34.



К задаче 16.35.

16.35 (534). На ось O насажены: зубчатое колесо K диаметра 20 *см* и кривошип OA длиной 20 *см*, не связанные между собой. С шатуном AB наглухо скреплено зубчатое колесо L диаметра 20 *см*, длина шатуна $AB = 1$ *м*. Колесо K вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 60$ *об/мин*, и, захватывая зубья колеса L, приводит в движение шатун AB и кривошип OA.

Определить угловую скорость ω_1 кривошипа OA в четырех его положениях: двух горизонтальных и двух вертикальных.

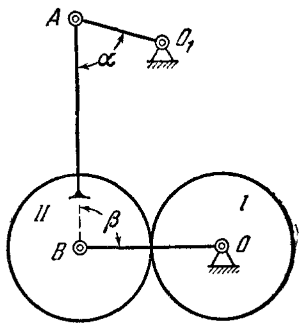
Ответ: $I.\ \omega_1=\frac{10}{11}\pi\ сек^{-1}$. $III.\ \omega_1=\frac{10}{9}\pi\ сек^{-1}$.

$II.\ \omega_1=\pi\ сек^{-1}$. $IV.\ \omega_1=\pi\ сек^{-1}$.

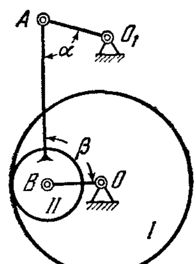
16.36 (536). Механизм Уатта состоит из коромысла O_1A, которое, качаясь на оси O_1, передает при помощи шатуна AB движение кривошипу OB, свободно насаженному на ось O. На той же оси O сидит колесо I; шатун AB оканчивается колесом II, наглухо связанным с шатуном.

Определить угловые скорости кривошипа OB и колеса I в момент, когда $\alpha=60°$, $\beta=90°$, если $r_1=r_2=30\sqrt{3}$ *см*, $O_1A=75$ *см*, $AB=150$ *см* и угловая скорость коромысла $\omega_0=6\ сек^{-1}$.

Ответ: $\omega_{OB}=3{,}75\ сек^{-1}$; $\omega_I=6\ сек^{-1}$.



К задаче 16.36.



К задаче 16.37.

16.37 (537). Планетарный механизм состоит из кривошипа O_1A, приводящего в движение шатун AB, коромысло OB и шестеренку I радиуса $r_1=25$ *см*; шатун AB оканчивается шестеренкой II радиуса $r_2=10$ *см*, наглухо с ним связанной.

Определить угловую скорость кривошипа O_1A и колеса I в момент, когда $\alpha=45°$, $\beta=90°$, если $O_1A=30\sqrt{2}$ *см*, $AB=150$ *см*, угловая скорость коромысла OB $\omega=8\ сек^{-1}$.

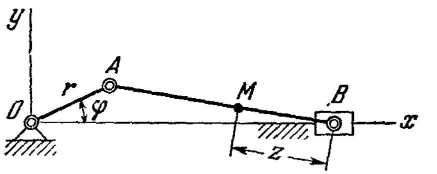
Ответ: $\omega_I=5{,}12\ сек^{-1}$; $\omega_0=4\ сек^{-1}$.

16.38 (539). В машине с качающимся цилиндром длина кривошипа $OA=r$ и расстояние $OO_1=a$. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

Определить угловую скорость ω_1 шатуна AB в зависимости от угла поворота кривошипа φ. Определить наибольшее и наименьшее значения ω_1, а также значение угла φ, при котором $\omega_1=0$. (См. чертеж к задаче 16.27.)

Ответ: $\omega_1 = \frac{\omega_0 r (a\cos\varphi - r)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}$; $\omega_{1max} = \frac{\omega_0 r}{a-r}$ при $\varphi = 0$; $\omega_{1min} = -\frac{\omega_0 r}{a+r}$ при $\varphi = \pi$; $\omega_1 = 0$ при $\varphi = \arccos\frac{r}{a}$.

16.39 (541). Найти приближенное выражение для проекции на координатные оси скорости любой точки M шатуна AB кривошипного механизма при равномерном вращении вала с угловой скоростью ω, предполагая, что длина кривошипа r мала по сравнению с длиной шатуна l. Положение точки M определяется ее расстоянием $MB = z$.



К задаче 16.39.

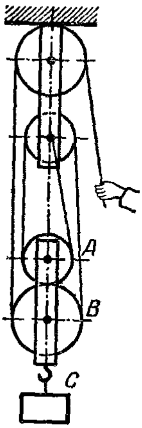
Примечание. В формулу, получаемую при решении задачи, входит $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}$, где $\varphi = \omega t$ обозначает угол BOA. Это выражение разлагаем в ряд и удерживаем только два первых члена.

Ответ: $v_x = -\omega\left[r\sin\varphi + \frac{(l-z)\,r^2}{2l^2}\sin 2\varphi\right]$; $v_y = \frac{zr}{l}\omega\cos\varphi$.

§ 17. Неподвижная и подвижная центроиды

17.1 (542). Найти центроиды при движении стержня AB, указанном в задаче 16.8.

Ответ: Подвижная центроида — окружность радиуса 0,5 *м* с центром в середине AB; неподвижная центроида — окружность радиуса 1 *м* с центром в точке O.



К задаче 17.2.

17.2 (543). Определить подвижные и неподвижные центроиды блоков A и B полиспаста, радиусы которых соответственно равны r_A и r_B, предполагая, что обойма C движется поступательно.

Ответ: Подвижные центроиды: блока A — окружность радиуса r_A, блока B — окружность радиуса $\frac{1}{3} r_B$; неподвижные центроиды: вертикальные касательные к подвижным центроидам с правой стороны их.

17.3 (544). Найти геометрически неподвижную и подвижную центроиды шатуна AB, длина которого равна длине кривошипа:

$$AB = OA = r.$$

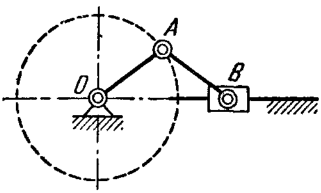
Ответ: Неподвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке O, а подвижная — окружность радиуса r с центром в точке A пальца кривошипа.

17.4 (545). Построить графически подвижную и неподвижную центроиды шатуна кривошипного механизма, у которого длина шатуна равна удвоенной длине кривошипа: $\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$.

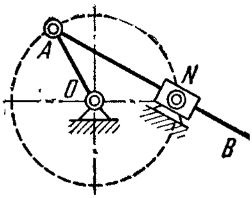
17.5 (546). Стержень AB движется таким образом, что одна из его точек A описывает окружность радиуса r с центром в точке O, а самый стержень проходит постоянно через данную точку N, лежащую на той же окружности.

Найти его центроиды.

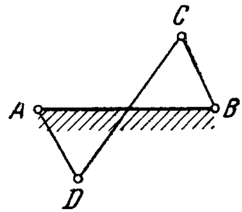
Ответ: Неподвижная центроида — окружность радиуса r с центром в точке O; подвижная центроида — окружность радиуса $2r$ с центром в точке A.



К задаче 17.3.



К задаче 17.5.



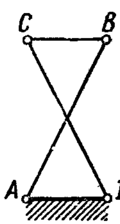
К задаче 17.6.

17.6 (547). Найти неподвижную и подвижную центроиды звена CD антипараллелограмма, поставленного на большее звено AB, если $AB = CD = b$, $AD = BC = a$ и $a < b$.

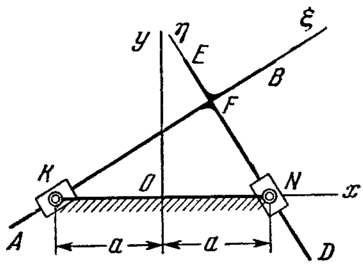
Ответ: Неподвижная центроида — гипербола с фокусами в точках A и B, а подвижная центроида — такая же гипербола с фокусами в точках C и D. Действительные полуоси гипербол равны $\frac{a}{2}$.

17.7 (548). Найти неподвижную и подвижную центроиды звена BC антипараллелограмма, поставленного на меньшее звено AD, если $AB = CD = b$, $AD = CB = a$ и $a < b$.

Ответ: Неподвижная центроида — эллипс с фокусами в точках A и D и с полуосями $\frac{b}{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$. Подвижная центроида — такой же эллипс, но с фокусами в точках B и C.



К задаче 17.7.



К задаче 17.8.

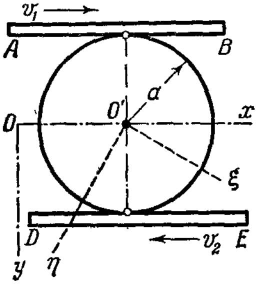
17.8 (551). Два стержня AB и DE, наглухо соединенные под прямым углом в точке F, движутся таким образом, что стержень AB всегда проходит через неподвижную точку K, а другой стержень DE — через неподвижную точку N; расстояние $KN = 2a$.

Найти уравнения центроид в этом движении; оси координат указаны на чертеже.

Ответ: $x_C^2+y_C^2=a^2$; $\xi_C^2+\eta_C^2=4a^2$.

17.9 (552). Две параллельные рейки AB и DE движутся в противоположные стороны с постоянными скоростями v_1 и v_2. Между рейками находится диск радиуса a, который вследствие движений реек и трения катится по ним без скольжения.

Найти 1) уравнения центроид диска, а также определить 2) скорость $v_{O'}$ центра O' диска и 3) угловую скорость ω диска; оси координат указаны на чертеже.



К задаче 17.9.

Ответ: 1) $y_C=a\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}$;

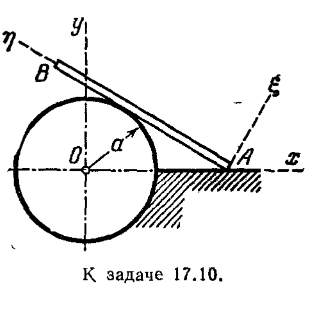
$$\xi_C^2+\eta_C^2=a^2\left(\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}\right)^2;$$

2) скорость центра диска направлена в сторону большей из данных скоростей; величина $v_{O'}$ равна полуразности величин данных скоростей;

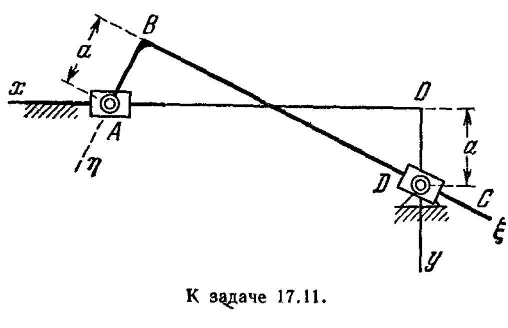
3) $\omega=\frac{v_1+v_2}{2a}$.

17.10 (553). Найти уравнения неподвижной и подвижной центроид стержня AB, который, опираясь на окружность радиуса a, концом A скользит вдоль прямой Ox, проходящей через центр этой окружности; оси координат указаны на чертеже.

Ответ: $x_C^2(x_C^2-a^2)-a^2y_C^2=0$; $\eta_C^2=a\xi_C$.



К задаче 17.10.



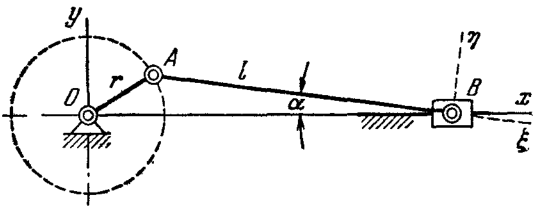
К задаче 17.11.

17.11 (554). Прямой угол ABC перемещается таким образом, что точка A скользит по оси x, а сторона BC проходит через неподвижную точку D на оси y.

Найти уравнения неподвижной и подвижной центроид, если известно, что $AB=OD=a$.

Ответ: $x_C^2=a(2y_C-a)$; $\xi_C^2=a(2\eta_C-a)$.

17.12 (555). Найти приближенные уравнения неподвижной и подвижной центроид шатуна AB кривошипного механизма, предполагая, что длина шатуна $AB=l$ настолько велика по сравнению с длиной кривошипа $OA = r$, что для угла $ABO = \alpha$ можно принять $\sin\alpha = \alpha$ и $\cos\alpha = 1$; оси координат указаны на чертеже.



К задаче 17.12.

Ответ: $(x_C - l)^2 (x_C^2 + y_C^2) = r^2 x_C^2$; $l^2 \xi_C^2 (l^2 + \eta_C^2) = r^2 \eta_C^4$.

§ 18. Ускорения точек твердого тела в плоском движении. Мгновенный центр ускорений

18.1. Центр C колеса, катящегося по прямолинейному горизонтальному рельсу, движется по закону $x_C = 2t^2$ *см*.

Стержень AC длиной $l = 12$ *см* совершает колебания вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной к плоскости чертежа, согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} t$ *рад* (см. чертеж к задаче 16.2).

Определить ускорение конца A стержня AC в момент времени $t = 0$.

Ответ: $w_{A_x} = 4$ *см/сек*²; $w_{A_y} = 8{,}1$ *см/сек*²; $w_A = 9{,}07$ *см/сек*².

18.2. Сохранив условие предыдущей задачи, определить ускорение конца A стержня AC в момент времени $t = 1$ *сек*.

Ответ: $w_{A_x} = -9{,}44$ *см/сек*²; $w_{A_y} = -7{,}73$ *см/сек*²; $w_A = 12{,}20$ *см/сек*².

18.3. При движении диска радиуса $r = 20$ *см* в вертикальной плоскости xy его центр C движется согласно уравнениям $x_C = 10t$ *м*, $y_C = (100 - 4{,}9t^2)$ *м*. При этом диск вращается вокруг горизонтальной оси C, перпендикулярной к плоскости диска, с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi/2$ *сек*$^{-1}$ (см. чертеж к задаче 16.4).

Определить в момент времени $t = 0$ ускорение точки A, лежащей на ободе диска. Положение точки A на диске определяется углом $\varphi = \omega t$, отсчитываемым от вертикали против хода часовой стрелки.

Ответ: Ускорение направлено по вертикали вниз и равно по модулю 9,31 *м/сек*².

18.4. Сохранив условие предыдущей задачи, определить ускорение точки A в момент времени $t = 1$ *сек*.

Ответ: $w_{A_x} = -0{,}49$ *м/сек*²; $w_{A_y} = -9{,}8$ *м/сек*²; $w_A = 9{,}81$ *м/сек*².

18.5. Два одинаковых диска радиуса r каждый соединены цилиндрическим шарниром A. Диск I вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси O по закону $\varphi = \varphi(t)$. Диск II вращается вокруг горизонтальной оси A согласно уравнению $\psi=\psi(t)$. Оси O и A перпендикулярны к плоскости чертежа. Углы φ и ψ отсчитываются от вертикали против хода часовой стрелки (см. чертеж к задаче 16.6).

Найти ускорение центра C диска II.

Ответ: $w_C=\sqrt{w_{C_x}^2+w_{C_y}^2}$, где $w_{C_x}=r(\ddot\varphi\cos\varphi-\dot\varphi^2\sin\varphi+\ddot\psi\cos\psi-\dot\psi^2\sin\psi)$, $w_{C_y}=r(\ddot\varphi\sin\varphi+\dot\varphi^2\cos\varphi+\ddot\psi\sin\psi+\dot\psi^2\cos\psi)$.

18.6. Сохранив условие предыдущей задачи, найти ускорение точки B диска II, если $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $w_B=\sqrt{w_{B_x}^2+w_{B_y}^2}$, где $w_{B_x}=r[\ddot\varphi\cos\varphi-\dot\varphi^2\sin\varphi+\sqrt{2}\,\ddot\psi\cos(45^\circ+\psi)-\sqrt{2}\,\dot\psi^2\sin(45^\circ+\psi)]$, $w_{B_y}=r[\ddot\varphi\sin\varphi+\dot\varphi^2\cos\varphi+\sqrt{2}\,\ddot\psi\sin(45^\circ+\psi)+\sqrt{2}\,\dot\psi^2\cos(45^\circ+\psi)]$.

18.7 (567). Линейка эллипсографа скользит концом B по оси Ox, концом A — по оси Oy; $AB=20$ *см*. (См. чертеж к задаче 15.1.)

Определить скорость и ускорение точки A в момент, когда угол φ наклона линейки к оси Ox равен 30°, а проекции скорости и ускорения точки B на ось x равны $v_{B_x}=-20$ *см/сек*, $w_{B_x}=-10$ *см/сек*^{2}.

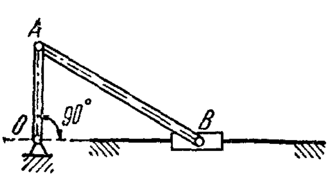
Ответ: $v_{A_y}=34{,}64$ *см/сек*; $w_{A_y}=-142{,}68$ *см/сек*^{2}.

18.8. Муфты A и B, скользящие вдоль прямолинейных образующих, соединены стержнем AB длиной l. Муфта A движется с постоянной скоростью v_A (см. чертеж к задаче 15.7).

Определить ускорение муфты B и угловое ускорение стержня AB в положении, при котором стержень AB образует с прямой OB заданный угол φ.

Ответ: $w_B=\frac{v_A^2}{l}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}$; $\varepsilon_{AB}=\frac{v_A^2}{l^2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\varphi}\sin\varphi$.

18.9 (568). Найти ускорение ползуна B и мгновенный центр ускорений K шатуна AB кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рисунке к задаче 16.39, при двух горизонтальных и одном вертикальном положениях кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0=15$ *сек*$^{-1}$ вокруг вала O. Длина кривошипа $OA=40$ *см*, длина шатуна $AB=200$ *см*.



К задаче 18.10.

Ответ: Мгновенный центр ускорений K при $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=180^\circ$ лежит на оси направляющей ползуна.

1) $\varphi=0$; $w_B=108$ *м/сек*^{2}; $BK=12$ *м*.
2) $\varphi=90^\circ$; $w_B=18{,}37$ *м/сек*^{2}; $BK=40$ *см*; $AK=196$ *см*.
3) $\varphi=180^\circ$; $w_B=72$ *м/сек*^{2}; $BK=8$ *м*.

18.10. Длина шатуна AB кривошипно-шатунного механизма в два раза больше длины кривошипа OA. Определить положение точки шатуна AB, ускорение которой направлено вдоль шатуна, в момент, когда кривошип перпендикулярен к направляющей ползуна; кривошип OA вращается равномерно.

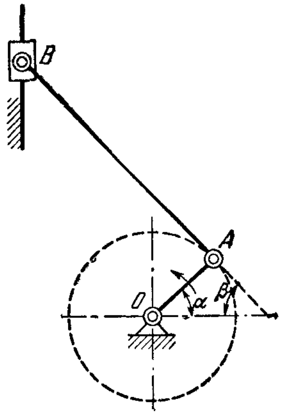
Ответ: На расстоянии четверти длины шатуна, измеренной от ползуна B.

18.11. Определить ускорение поршня D и угловое ускорение звена AB приводного механизма гидравлического пресса, рассмотренного в задаче 16.24, если в положении, указанном на чертеже, рычаг OL вращается ускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 4$ *сек*$^{-2}$.

Ответ: $w_D = 29{,}4$ *см/сек*^{2}; $\varepsilon_{AB} = 5{,}24$ *сек*$^{-2}$.

18.12 (569). Кривошип OA длиной 20 *см* вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ *сек*$^{-1}$ и приводит в движение шатун AB длиной 100 *см*; ползун B движется по вертикали.

Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 45°$.



К задаче 18.12.

Ответ: $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 16$ *сек*$^{-2}$; $w_B = 565{,}6$ *см/сек*^{2}.

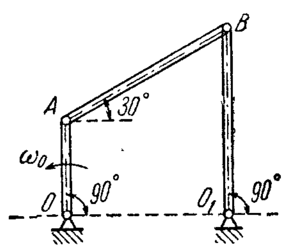
18.13 (571). Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна нецентрального кривошипного маханизма, а также скорость и ускорение ползуна B при 1) горизонтальном правом и 2) вертикальном верхнем положении кривошипа OA, если последний вращается вокруг конца O с постоянной угловой скоростью ω_0, причем даны: $OA = r$, $AB = l$, расстояние оси O кривошипа от линии движения ползуна $OC = h$ (см. чертеж к задаче 16.16).

Ответ: 1) $\omega = \dfrac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$; $\varepsilon = \dfrac{hr^2\omega_0^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}$;

$$v_B = \frac{hr\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}; \quad w_B = r\omega_0^2\left[1 + \frac{rl^2}{(l^2 - h^2)^{3/2}}\right].$$

2) $\omega = 0$; $\varepsilon = \dfrac{r\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}$,

$$v_B = r\omega_0; \quad w_B = \frac{r(r+h)\,\omega_0^2}{\sqrt{l^2 - (r+h)^2}}.$$



К задаче 18.14.

18.14. Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на чертеже, если $AB = 2OA = 2a$.

Ответ: $\omega = 0$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2$, $w_B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\omega_0^2$.

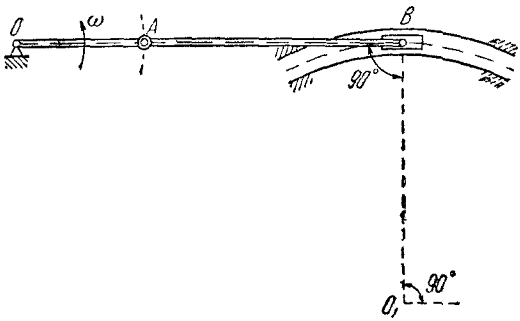
18.15. Определить ускорение шарнира D и угловое ускорение звена BD механизма, рассмотренного в задаче 16.25, если в положении, указанном на чертеже, рычаг AB вращается ускоренно с угловым ускорением $\varepsilon = 4$ *сек*$^{-2}$.

Ответ: $w_D = 32{,}4$ *см/сек*^{2}; $\varepsilon_{BD} = 2{,}56$ *сек*$^{-2}$.

18.16. Определить ускорение поршня E и угловое ускорение стержня BE механизма, рассмотренного в задаче 16.26, если в данный момент угловое ускорение звена OA равно нулю.

Ответ: $w_E = 138{,}4$ *см/сек*^{2}; $\varepsilon_{BE} = 0$.

18.17. Ползун B кривошипно-шатунного механизма OAB движется по дуговой направляющей.



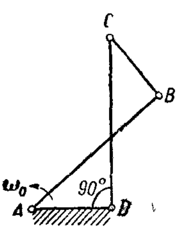
К задаче 18.17.

Определить касательное и нормальное ускорения ползуна B в положении, указанном на чертеже, если $OA = 10$ *см*, $AB = 20$ *см*. Кривошип OA вращается, имея в данный момент угловую скорость $\omega = 1$ *сек*$^{-1}$, угловое ускорение $\varepsilon = 0$.

Ответ: $w_{B\tau} = 15$ *см/сек*^{2}; $w_{Bn} = 0$.

18.18. Определить угловое ускорение шатуна AB механизма, рассмотренного в предыдущей задаче, если в положении, указанном на чертеже, угловое ускорение кривошипа OA равно 2 *сек*$^{-2}$.

Ответ: 1 *сек*$^{-2}$.



К задаче 18.19.

18.19 (572). Антипараллелограмм состоит из двух кривошипов AB и CD одинаковой длины 40 *см* и шарнирно соединенного с ними стержня BC длиной 20 *см*. Расстояние между неподвижными осями A и D равно 20 *см*. Кривошип AB вращается с постоянной угловой скоростью ω_0.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня BC в момент, когда угол ADC равен 90°.

Ответ: $\omega_{BC} = \frac{8}{3}\omega_0$, вращение замедленное; $\varepsilon_{BC} = \frac{20}{9}\omega_0^2$.

18.20 (579). В машине с качающимся цилиндром, лежащим на цапфах O_1O_1, длина кривошипа $OA = 12$ *см*, длина шатуна

$AB = 60$ *см*; расстояние между осью вала и осью цапф цилиндра $OO_1 = 60$ *см*.

Определить ускорение поршня B и радиус кривизны его траектории при двух положениях цилиндра: 1) когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и 2) когда кривошип занимает положение *III*; угловая скорость кривошипа $\omega_0 = \text{const} = 5$ *сек*$^{-1}$. (См. чертеж к задаче 16.27.)

Ответ: 1) $w = 6{,}12$ *см/сек*^{2}; $\rho = 589$ *см*;
2) $w = 258{,}3$ *см/сек*^{2}; $\rho = 0{,}39$ *см*.

18.21. Центр колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, движется равномерно со скоростью v.

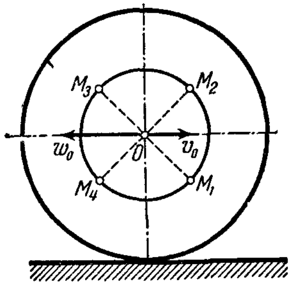
Определить ускорение любой точки, лежащей на ободе колеса, если его радиус равен r.

Ответ: Ускорение направлено к центру колеса и равно $\frac{v^2}{r}$.

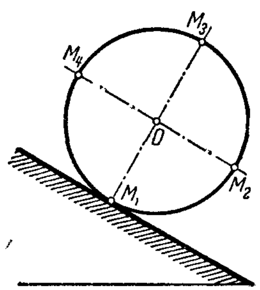
18.22 (557). Вагон трамвая движется по прямолинейному горизонтальному участку пути с замедлением $w_0 = 2$ *м/сек*^{2}, имея в данный момент скорость $v_0 = 1$ *м/сек*. Колеса катятся по рельсам без скольжения.

Найти ускорения концов двух диаметров ротора, образующих с вертикалью углы по 45°, если радиус колеса $R = 0{,}5$ *м*, а ротора $r = 0{,}25$ *м*.

Ответ: $w_1 = 2{,}449$ *м/сек*^{2}; $w_2 = 3{,}414$ *м/сек*^{2};
$w_3 = 2{,}449$ *м/сек*^{2}; $w_4 = 0{,}586$ *м/сек*^{2}.



К задаче 18.22.



К задаче 18.23.

18.23 (558). Колесо катится без скольжения в вертикальной плоскости по наклонному прямолинейному пути.

Найти ускорения концов двух взаимно перпендикулярных диаметров колеса, из которых один параллелен рельсу, если в рассматриваемый момент времени скорость центра колеса $v_0 = 1$ *м/сек*, ускорение центра колеса $w_0 = 3$ *м/сек*^{2}, радиус колеса $R = 0{,}5$ *м*.

Ответ: $w_1 = 2$ *м/сек*^{2}; $w_2 = 3{,}16$ *м/сек*^{2};
$w_3 = 6{,}32$ *м/сек*^{2}; $w_4 = 5{,}83$ *м/сек*^{2}.

18.24 (559). Колесо радиуса $R = 0{,}5$ *м* катится без скольжения по прямолинейному рельсу, в данный момент центр O колеса имеет скорость $v_0 = 0{,}5$ *м/сек* и замедление $w_0 = 0{,}5$ *м/сек*^{2}.

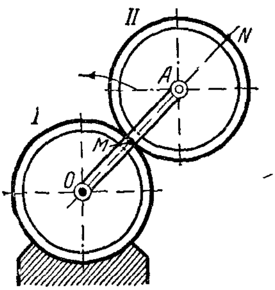
Найти: 1) мгновенный центр ускорения колеса, 2) ускорение w_C точки колеса, совпадающей с мгновенным центром C скоростей, а также 3) ускорение точки M и 4) радиус кривизны ее траектории, если $OM = MC = 0{,}5R$.

Ответ: 1) $r = 0{,}3536$ *м*, $\theta = -\frac{\pi}{4}$; 2) $w_C = 0{,}5$ *м/сек*^{2}; 3) $w_M = 0{,}3536$ *м/сек*^{2}; 4) $\rho = 0{,}25$ *м*.

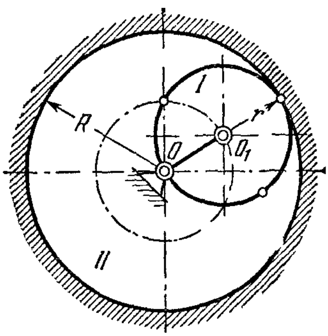
18.25 (560). Шестеренка радиуса $R = 12$ *см* приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг оси O неподвижной шестеренки с тем же радиусом; кривошип вращается с угловым ускорением $\varepsilon_0 = 8$ *сек*$^{-2}$, имея в данный момент угловую скорость $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$.

Определить: 1) ускорение той точки подвижной шестеренки, которая в данный момент совпадает с мгновенным центром скоростей, 2) ускорение диаметрально противоположной точки N и 3) положение мгновенного центра ускорений K.

Ответ: 1) $w_M = 96$ *см/сек*^{2}; 2) $w_N = 480$ *см/сек*^{2}; 3) $MK = 4{,}24$ *см*; $\angle AMK = 45°$.



К задаче 18.25.



К задаче 18.26

18.26 (561). Найти положение мгновенного центра ускорений и скорость v_K точки фигуры, совпадающей с ним в данный момент, а также ускорение w_C точки фигуры, с которой в данный момент совпадает мгновенный центр скоростей, если шестеренка I радиуса r катится внутри шестеренки II радиуса $R = 2r$ и кривошип OO_1, приводящий в движение бегающую шестеренку, имеет постоянную угловую скорость ω_0.

Ответ: Мгновенный центр ускорений совпадает с центром O неподвижной шестеренки; $v_K = 2r\omega_0$;

$$w_C = 2r\omega_0^2.$$

18.27 (563). Найти ускорения концов B, C, D, E двух диаметров шестеренки радиуса $r_1 = 5$ *см*, катящейся снаружи неподвижной шестеренки радиуса $r_2 = 15$ *см*. Подвижная шестеренка приводится в движение при помощи кривошипа OA, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 3$ *сек*$^{-1}$ вокруг оси O неподвижной шестеренки; один из диаметров совпадает с линией OA, другой — ей перпендикулярен. (См. чертеж к задаче 16.34.)

Ответ: $w_B = 540$ *см/сек*^{2}; $w_C = w_E = 742$ *см/сек*^{2}; $w_D = 900$ *см/сек*^{2}.

18.28. Показать, что в момент, когда угловое ускорение $\varepsilon = 0$, проекции ускорений концов отрезка, совершающего плоское движение, на направление, перпендикулярное к отрезку, равны между собой.

18.29. Ускорения концов стержня AB длиной 10 *см*, совершающего плоское движение, направлены вдоль стержня навстречу друг другу, причем $w_A = 10$ *см/сек*^{2}, $w_B = 20$ *см/сек*^{2}.

Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.

Ответ: $\omega = \sqrt{3}$ *сек*$^{-1}$, $\varepsilon = 0$.

18.30. Ускорения концов однородного стержня AB длиной 12 *см*, совершающего плоское движение, перпендикулярны к AB и направлены в одну сторону, причем $w_A = 24$ *см/сек*^{2}, $w_B = 12$ *см/сек*^{2}.

Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня, а также ускорение его центра тяжести C.

Ответ: $\omega = 0$, $\varepsilon = 1$ *сек*$^{-2}$, ускорение точки C перпендикулярно к AB, направлено в сторону ускорений точек A и B и равно 18 *см/сек*^{2}.

18.31. Решить предыдущую задачу в предположении, что ускорения точек A и B направлены в разные стороны.

Ответ: $\omega = 0$, $\varepsilon = 3$ *сек*$^{-2}$, ускорение точки C перпендикулярно к AB, направлено в сторону ускорения точки A и равно 6 *см/сек*^{2}.

18.32. Ускорения вершин A и B треугольника ABC, совершающего плоское движение, векторно равны: $\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_A = \boldsymbol{a}$.

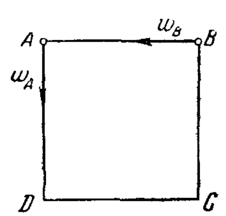
Определить угловую скорость и угловое ускорение треугольника, а также ускорение вершины C.

Ответ: $\omega = 0$; $\varepsilon = 0$; $\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{a}$.

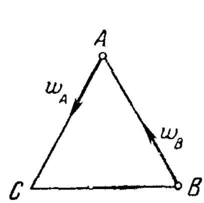
18.33 (576). Квадрат $ABCD$ со стороною $a = 10$ *см* совершает плоское движение в плоскости чертежа.

Найти положение мгновенного центра ускорений и ускорения вершин его C и D, если известно, что в данный момент ускорения двух вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 *см/сек*^{2}. Направление ускорений точек A и B совпадает со сторонами квадрата, как указано на чертеже.

Ответ: $w_C = w_D = 10$ *см/сек*^{2} и направлены по сторонам квадрата. Мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения диагоналей квадрата.



К задаче 18.33.



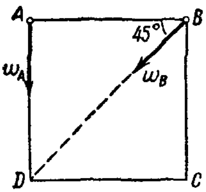
К задаче 18.34

18.34 (577). Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости чертежа. Ускорения вершин A и B в данный момент времени равны 16 *см/сек*^{2} и направлены по сторонам треугольника (см. чертеж).

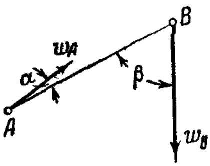
Определить ускорение третьей вершины C треугольника.

Ответ: $w_C = 16$ *см/сек*^{2} и направлено по CB от C к B.

18.35 (578). Квадрат $ABCD$ со стороною $a = 2$ *см* совершает плоское движение. В данный момент ускорения вершин его A и B соответственно равны $w_A = 2$ *см/сек*^{2}, $w_B = 4\sqrt{2}$ *см/сек*^{2} и направлены, как указано на чертеже.



К задаче 18.35.



К задаче 18.36.

Найти мгновенную угловую скорость и мгновенное угловое ускорение квадрата, а также ускорение точки C.

Ответ: $\omega = \sqrt{2}$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 1$ *сек*$^{-2}$; $w_C = 6$ *см/сек*^{2} направлено по стороне CD от C к D.

18.36 (574) Найти ускорение середины стержня AB, если известны величины ускорений его концов: $w_A = 10$ *см/сек*^{2}, $w_B = 20$ *см/сек*^{2} — и углы, образованные ускорениями с прямой AB: $\alpha = 10°$ и $\beta = 70°$.

Ответ: $w = \frac{1}{2}\sqrt{w_A^2 + w_B^2 - 2w_A w_B \cos(\beta - \alpha)} = 8{,}66$ *см/сек*^{2}.

ГЛАВА VI

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ

§ 19. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

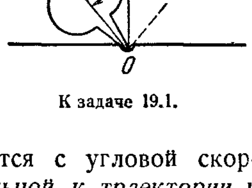
19.1. Ось z волчка равномерно описывает вокруг вертикали $O\zeta$ круговой конус с углом раствора 2θ. Угловая скорость вращения оси волчка вокруг оси ζ равна $\boldsymbol{\omega}_1$, а постоянная угловая скорость собственного вращения волчка равна $\boldsymbol{\omega}$.

Определить величину и направление абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ волчка.

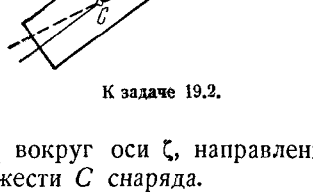
Ответ: $\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}$,

$$\cos(\boldsymbol{\Omega}, z) = \frac{\omega + \omega_1 \cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}}.$$

19.2. Артиллерийский снаряд, двигаясь в атмосфере, вращается вокруг оси z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Одновременно ось снаряда z



К задаче 19.1.



К задаче 19.2.

вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг оси ζ, направленной по касательной к траектории центра тяжести C снаряда.

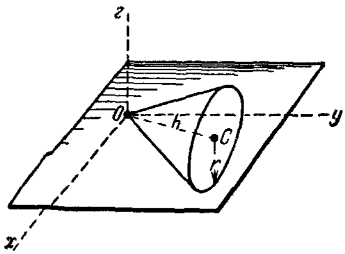
Определить скорость точки M снаряда в его вращательном движении, если $CM = r$ и отрезок CM перпендикулярен к оси z; угол между осями z и ζ равен γ.

Ответ: $v_M = (\omega + \omega_1 \cos\gamma)\, r$.

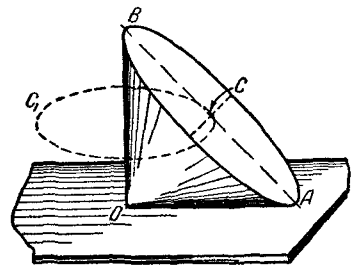
19.3 (596). Конус, высота которого $h = 4$ *см* и радиус основания $r = 3$ *см*, катится по плоскости без скольжения, имея неподвижную вершину в точке O.

Определить угловую скорость конуса, координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, и угловое ускорение конуса, если скорость центра основания конуса $v_C = 48$ *см/сек* = const.

Ответ: $\omega = 20$ *сек*$^{-1}$; $x_1 = 20 \cos 15t$, $y_1 = 20 \sin 15t$, $z_1 = 0$; $\varepsilon = 300$ *сек*$^{-1}$.



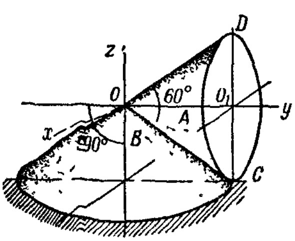
К задаче 19.3.



К задаче 19.4.

19.4 (597). Конус, вершина O которого неподвижна, катится по плоскости без скольжения. Высота конуса $CO = 18$ *см*, а угол при вершине $AOB = 90°$. Точка C, центр основания конуса, движется равномерно и возвращается в первоначальное положение через 1 *сек*.

Определить скорость конца B диаметра AB, угловое ускорение конуса и ускорение точек A и B.



К задаче 19.5.

Ответ: $v_B = 36\pi\sqrt{2}$ *см/сек* $=$ $= 160$ *см/сек*; $\varepsilon = 39{,}5$ *сек*$^{-2}$ и направлено перпендикулярно к OA и OB; $w_A =$ $= 1000$ *см/сек*^{2} и направлено параллельно OB; $w_B = 1000\sqrt{2}$ *см/сек*^{2}, лежит в плоскости AOB и направлено под углом 45° к OB.

19.5 (598). Конус A обегает 120 раз в минуту неподвижный конус B. Высота конуса $OO_1 = 10$ *см*.

Определить переносную угловую скорость ω_e конуса вокруг оси z, относительную угловую скорость ω_r конуса вокруг оси OO_1, абсолютную угловую скорость ω_a и абсолютное угловое ускорение ε_a конуса.

Ответ: $\omega_e = 4\pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_r = 6{,}92\pi$ *сек*$^{-1}$;

$\omega_a = 8\pi$ *сек*$^{-1}$ и направлена по оси OC;

$\varepsilon_a = 27{,}68\pi^2$ *сек*$^{-2}$ и направлено параллельно оси x.

19.6 (599). Сохранив условия предыдущей задачи, определить скорости и ускорения точек C и D подвижного конуса.

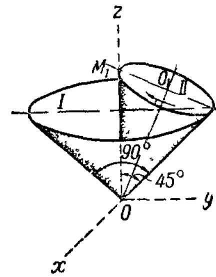
Ответ: $v_C = 0$; $v_D = 80\pi$ *см/сек* и направлена параллельно оси x; $w_C = 320\pi^2$ *см/сек*^{2} и направлено перпендикулярно к OC в плоскости Oyz; проекции ускорения точки D:

$$w_{D_y} = -480\pi^2 \text{ см/сек}^2, \quad w_{D_z} = -160\sqrt{3}\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

19.7 (600). Конус II с углом при вершине $\alpha_2 = 45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90^\circ$. Высота подвижного конуса $OO_1 = 100$ *см*. Точка O_1, центр основания подвижного конуса, описывает окружность в 0,5 *сек*.

Определить переносную (вокруг оси z), относительную (вокруг оси OO_1) и абсолютную угловые скорости конуса II, а также его абсолютное угловое ускорение.

Ответ: $\omega_e = 4\pi$ *сек*$^{-1}$ и направлена по оси z;
$\omega_r = 7{,}39\pi$ *сек*$^{-1}$ и направлена по оси O_1O;
$\omega_a = 4\pi$ *сек*$^{-1}$ и направлена по оси OM_2;
$\varepsilon_a = 11{,}3\pi^2$ *сек*$^{-2}$ и направлено по оси x.



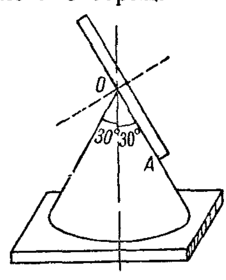
К задаче 19.7.

19.8 (601). Сохранив условия предыдущей задачи, определить скорости и ускорения точек O_1, M_1, M_2 подвижного конуса.

Ответ: $v_0 = 153{,}2\pi$ *см/сек* и направлена параллельно отрицательной оси Ox; $v_1 = 306{,}4\pi$ *см/сек* и направлена параллельно отрицательной оси Ox; $v_2 = 0$, $w_0 = 612{,}8\pi^2$ *см/сек*^{2} и направлено от O_1 по перпендикуляру к Oz; проекции ускорения точки M_1:

$$w_{1y} = -362\pi^2 \text{ см/сек}^2, \qquad w_{1z} = -865\pi^2 \text{ см/сек}^2;$$

$w_2 = 1225\pi^2$ *см/сек*^{2}, лежит в плоскости OO_1M_2 и направлено перпендикулярно к OM_2.



К задаче 19.9.

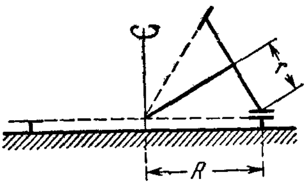
19.9 (602). Диск OA радиуса $R = 4\sqrt{3}$ *см*, вращаясь вокруг неподвижной точки O, обкатывает неподвижный конус с углом при вершине, равным 60°. Найти угловую скорость вращения диска вокруг его оси симметрии, если ускорение w_A точки A диска по величине постоянно и равно 48 *см/сек*^{2}.

Ответ: $\omega = 2$ *сек*$^{-1}$.

19.10 (603). Тело движется вокруг неподвижной точки. В некоторый момент угловая скорость его изображается вектором, проекции которого на координатные оси равны $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Найти в этот момент скорость v точки тела, определяемой координатами $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$.

Ответ: $v = 0$.

19.11 (606). Коническое зубчатое колесо, ось которого пересекается с геометрической осью плоской опорной шестерни в центре последней, обегает пять раз в минуту опорную шестерню. Определить угловую скорость ω_r вращения колеса вокруг его оси и угловую скорость ω вращения вокруг мгновенной оси, если радиус опорной шестерни вдвое больше радиуса колеса: $R=2r$.



К задаче 19.11.

Ответ: $\omega_r=1{,}047$ $сек^{-2}$; $\omega=0{,}907$ $сек^{-1}$.

19.12 (608). Угловая скорость тела $\omega=7$ $сек^{-1}$; мгновенная ось его составляет в данный момент с неподвижными координатными осями острые углы α, β и γ.

Найти величину скорости v и проекции ее v_x, v_y, v_z на координатные оси для точки тела, координаты которой, выраженные в метрах, в данный момент равны 0, 2, 0, а также расстояние d этой точки от мгновенной оси, если $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

Ответ: $v_x=-12$ *м/сек*; $v_y=0$; $v_z=4$ *м/сек*; $v=12{,}65$ *м/сек*; $d=1{,}82$ *м*.

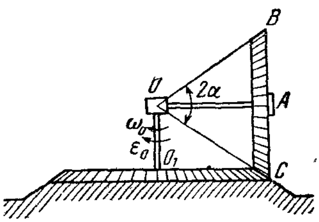
19.13 (609). Найти уравнения мгновенной оси и величину угловой скорости ω тела, если известно, что проекции скорости точки $M_1(0, 0, 2)$ на координатные оси, связанные с телом, равны

$$v_{x1}=1 \text{ м/сек}; \quad v_{y1}=2 \text{ м/сек}; \quad v_{z1}=0,$$

а направление скорости точки $M_2(0, 1, 2)$ определяется косинусами углов, образованных с осями координат:

$$-\frac{2}{3}, \quad +\frac{2}{3}, \quad -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x+2y=0$; $3x+z=0$; $\omega=3{,}2$ $сек^{-1}$.



К задаче 19.14.

19.14. Коническое зубчатое колесо, свободно насаженное на кривошип OA, обкатывается по неподвижному коническому зубчатому основанию. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε катящегося колеса, если модули угловой скорости и углового ускорения (их направления указаны на рисунке) кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O_1O, соответственно равны ω_0 и ε_0.

Ответ: $\boldsymbol{\omega}=\frac{\omega_0}{\sin\alpha}\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_0}{\sin\alpha}\boldsymbol{e}_1+\omega_0^2\operatorname{ctg}\alpha\boldsymbol{e}_2$,

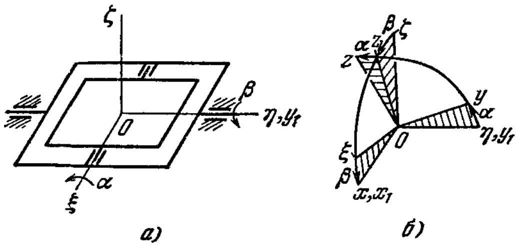
где $\boldsymbol{e}_1$ — единичный вектор, направленный от точки O к точке C, а $\boldsymbol{e}_2$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости OAC и направленный на читателя.

19.15. В условиях предыдущей задачи определить ускорения точек C и B, если радиус основания равен R.

Ответ: $w_C=\frac{R\omega_0^2}{\sin\alpha}e_3$, $w_B=2R\varepsilon_0 e_2+\frac{R\omega_0^2}{\sin\alpha}(e_4-2e_3)$, где e_3 и e_4 — лежащие в плоскости рисунка единичные векторы, перпендикулярные к прямым OC и OB соответственно (оба орта направлены вверх).

§ 20. Пространственная ориентация; кинематические формулы Эйлера и их модификация; аксоиды

20.1. Искусственная горизонтальная площадка на качающемся корабле создается с помощью карданова подвеса. Ось y_1 вращения внешнего кольца параллельна продольной оси корабля; угол поворота внешнего кольца обозначается через β (угол бортовой качки). Угол поворота внутренней рамки обозначается через α. Для ориентации колец вводят три системы координат: система $\xi\eta\zeta$ связана с кораблем



К задаче 20.1.

(ось ξ направлена к правому борту, ось η — к носу корабля, ось ζ — перпендикулярна к палубе); система $x_1y_1z_1$ связана с внешним кольцом (ось y_1 совпадает с осью η); система xyz связана с внутренним кольцом (ось x совпадает с x_1). Положительные направления отсчета углов видны из рисунков; при $\alpha=\beta=0$ все системы отсчета совпадают.

Определить ориентацию (соответствующие направляющие косинусы) внутреннего кольца подвеса относительно корабля.

Ответ:

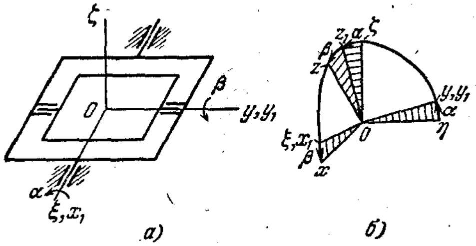
	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	0	$-\sin\beta$
y	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha\cos\beta$
z	$\cos\alpha\sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha\cos\beta$

20.2. Во втором способе установки карданова подвеса, описанного в предыдущей задаче, ось вращения внешнего кольца параллельна поперечной оси корабля. При этом способе подвеса ось ξ, связанная с кораблем, совпадает с осью x_1 вращения внешнего кольца, а ось y вращения внутреннего кольца совпадает с осью y_1, жестко связанной с внешним кольцом. Угол поворота внешнего кольца обозначается теперь α (угол килевой качки), а угол поворота внутреннего кольца — через β.

Определить ориентацию внутреннего кольца подвеса относительно корабля.

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$-\cos\alpha\sin\beta$
y	0	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
z	$\sin\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$



а) б)

К задаче 20.2.

20.3. Положение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку O, определяется тремя углами Эйлера: углом прецессии ψ, углом нутации θ и углом собственного вращения φ (см. рисунок). Определить направляющие косинусы подвижной системы отсчета $Oxyz$.

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi$	$\sin\psi\cos\theta\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
y	$-\cos\psi\cos\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi$	$-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$
z	$\cos\psi\sin\theta$	$\sin\psi\sin\theta$	$\cos\theta$

20.4. Зная скорости изменения углов Эйлера, определить угловую скорость тела и ее проекции на оси неподвижной $O\xi\eta\zeta$ и подвижной $Oxyz$ систем отсчета.

Ответ: $\omega=\sqrt{\dot\psi^2+\dot\theta^2+\dot\varphi^2+2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta}$;

$\omega_\xi=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi,\quad \omega_\eta=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi,\quad \omega_\zeta=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi;$

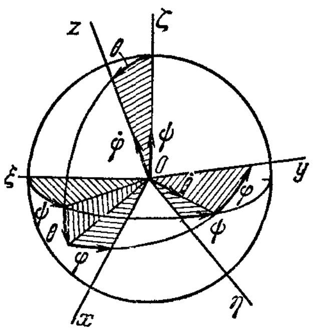
$\omega_x=-\dot\psi\sin\theta\cos\varphi+\dot\theta\sin\varphi,\ \omega_y=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\ \omega_z=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi.$

20.5. Для определения вращательного движения самолета с ним связывают ортогональную систему координат $Cxyz$, причем ось x направляется по оси самолета от хвоста к кабине летчика, ось y располагается в плоскости симметрии самолета, а ось z — по размаху крыла вправо для летчика (C — центр тяжести самолета). Угловые перемещения самолета относительно осей $C\xi\eta\zeta$ (горизонтальная ось ξ направляется по курсу самолета, ось η — вертикально вверх, а горизонтальная ось ζ — перпендикулярно к осям ξ и η) определяются, как показано на рисунке, тремя самолетными углами: углом рыскания ψ, углом тангажа θ и углом крена φ.

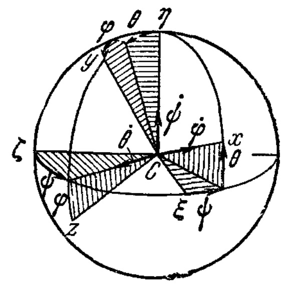
Определить ориентацию самолета (системы отсчета $Cxyz$) относительно трехгранника $C\xi\eta\zeta$.

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\psi\cos\theta$
y	$\sin\psi\sin\varphi-\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$	$-\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$



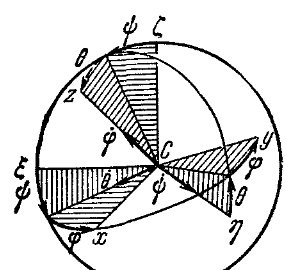
К задачам 20.3 и 20.4.



К задачам 20.5 и 20.6.

20.6. Зная скорости изменения самолетных углов, определить проекции угловой скорости самолета на оси систем координат $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ (см. чертеж к предыдущей задаче).

Ответ:
$$\omega_x=\dot\psi\sin\theta+\dot\varphi,$$
$$\omega_y=\dot\psi\cos\theta\cos\varphi+\dot\theta\sin\varphi,$$
$$\omega_z=-\dot\psi\cos\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi;$$
$$\omega_\xi=\dot\varphi\cos\psi\cos\theta+\dot\theta\sin\psi,$$
$$\omega_\eta=\dot\varphi\sin\theta+\dot\psi,$$
$$\omega_\zeta=-\dot\varphi\sin\psi\cos\theta+\dot\theta\cos\psi.$$



К задачам 20.7 и 20.8.

20.7. Для исследования качки корабля и его устойчивости на курсе вводят три корабельных угла: ψ — дифферент, θ — крен и φ — угол рыскания; система отсчета $Cxyz$ жестко связана с кораблем; C — центр тяжести корабля; ось x направлена от кормы к носу, ось y — к левому борту, ось z — перпендикулярно к палубе; система координат $C\xi\eta\zeta$ ориентируется относительно курса корабля: ось ζ вертикальна, горизонтальная ось ξ направлена по курсу, горизонтальная ось η — влево от курса (на рисунке изображены системы осей, введенных А. Н. Крыловым).

Определить ориентацию корабля (координатных осей $Cxyz$) относительно трехгранника $C\xi\eta\zeta$.

Ответ:

	ξ	η	ζ
x	$\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\theta\sin\varphi$
y	$-\cos\psi\sin\varphi+\sin\psi\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\sin\theta\cos\varphi$
z	$\sin\psi\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\psi\cos\theta$

20.8. Зная скорости изменения корабельных углов, определить проекции угловой скорости корабля на оси систем отсчета $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ (см. чертеж к предыдущей задаче).

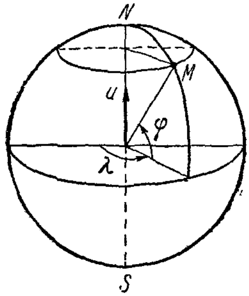
Ответ: $\omega_x=\dot\psi\cos\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi$, $\omega_\xi=\dot\theta\cos\psi+\dot\varphi\sin\psi\cos\theta$,

$\omega_y=\dot\psi\cos\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi$, $\omega_\eta=\dot\psi-\dot\varphi\sin\theta$,

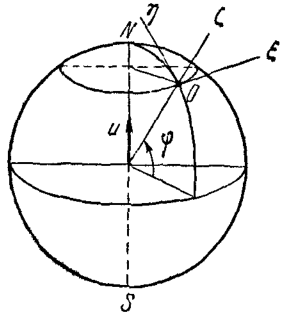
$\omega_z=-\dot\psi\sin\theta+\dot\varphi$; $\omega_\zeta=-\dot\theta\sin\psi+\dot\varphi\cos\psi\cos\theta$.

20.9. Точка M (центр тяжести самолета, корабля) движется вдоль поверхности Земли, принимаемой за шар радиуса R *); восточная составляющая скорости точки равна v_E, а северная v_N. Определить скорость изменения широты φ и долготы λ текущего положения точки M.

Ответ: $\dot\varphi=\dfrac{v_N}{R}$, $\dot\lambda=\dfrac{v_E}{R\cos\varphi}$; при положительных v_E и v_N составляющая $\dot\varphi$ направлена на запад, а составляющая $\dot\lambda$ — по оси SN вращения Земли от Южного полюса к Северному.



К задачам 20.9.



К задачам 20.10.

20.10. Для изучения движения вблизи земной поверхности тел (самолетов, ракет, кораблей) и приборов, установленных на них, вводят подвижной координатный трехгранник — трехгранник Дарбу. При географической ориентации трехгранника Дарбу $O\xi\eta\zeta$ горизонтальная ось ξ направляется на восток, горизонтальная ось η — на

*) Здесь и в дальнейшем сжатием Земли пренебрегаем.

север, ось ζ — вертикально вверх. Определить проекции на оси ξ, η, ζ угловой скорости трехгранника $O\xi\eta\zeta$, если проекции скорости его начала (точки O) относительно Земли равны $v_\xi = v_E$, $v_\eta = v_N$, $v_\zeta = 0$; угловая скорость вращения Земли равна U; радиус Земли R.

Ответ: $\omega_\xi = -\dot{\varphi} = -\dfrac{v_N}{R}$;

$$\omega_\eta = (U + \dot{\lambda}) \cos\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right) \cos\varphi;$$

$$\omega_\zeta = (U + \dot{\lambda}) \sin\varphi = \left(U + \frac{v_E}{R\cos\varphi}\right) \sin\varphi.$$

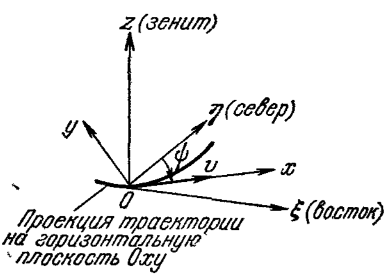
20.11. Трехгранник Дарбу $Oxyz$ на поверхности Земли ориентирован не географически, как это было сделано в предыдущей задаче, а по траектории основания трехгранника относительно Земли: ось x направляется горизонтально по скорости $\boldsymbol{v}$ вершины O (центр тяжести самолета, корабля) трехгранника относительно Земли, ось y направляется горизонтально влево от оси x, а ось z — вертикально вверх.

Определить проекции угловой скорости трехгранника $Oxyz$, если скорость точки O равна v, а ее курс определяется углом ψ (угол между направлением на север и относительной скоростью точки O).

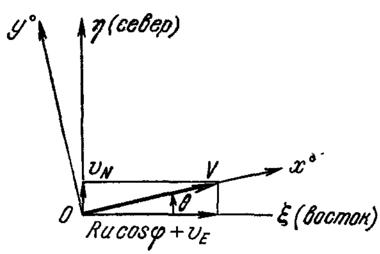
Ответ: $\omega_x = U\cos\varphi\cos\psi$; $\quad \omega_y = U\cos\varphi\sin\psi + \dfrac{v}{R}$;

$$\omega_z = (U + \dot{\lambda}) \sin\varphi + \dot{\psi} = U\sin\varphi + \frac{v}{\rho}.$$

Здесь R, U, φ и λ имеют значения, введенные в задачах 20.9 и 20.10, а ρ — радиус геодезической кривизны траектории ($\rho > 0$ при $\psi < 0$, и $\rho < 0$ при $\psi > 0$).



К задаче 20.11.



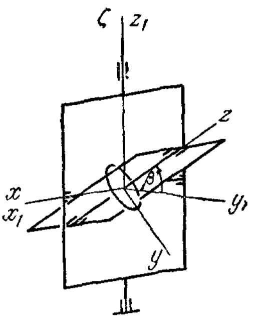
К задаче 20.12.

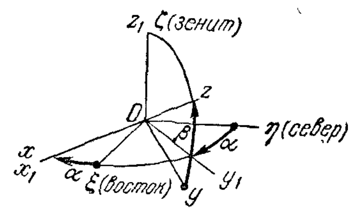
20.12. Трехгранник Дарбу $Ox^0y^0z^0$ на поверхности Земли ориентирован следующим образом: ось x^0 направляется по абсолютной скорости $\boldsymbol{V}$ точки O (предполагается, что она движется по поверхности Земли), горизонтальная ось y^0 направляется влево от оси x^0, ось z^0 вертикальна.

Определить проекции угловой скорости трехгранника $Ox^0y^0z^0$, если составляющие скорости точки O относительно Земли равны v_E и v_N.

Ответ: $\omega_{x^0}=0$, $\omega_{y^0}=\frac{V}{R}$, $\omega_{z^0}=(U+\dot{\lambda})\sin\varphi+\dot{\theta}$, где R, U, φ и λ имеют значения, введенные в задачах 20.9 и 20.10, $V=\sqrt{(v_E+RU\cos\varphi)^2+v_N^2}$ и $\operatorname{tg}\theta=\frac{v_N}{v_E+RU\cos\varphi}$.

20.13. Гироскоп направления установлен в кардановом подвесе. Система координат $x_1y_1z_1$ связана с внешней рамкой (ось вращения ее вертикальна), система xyz скреплена с внутренней рамкой (ось x вращения ее горизонтальна). Ось z внутренней рамки является одновременно осью собственного вращения гироскопа.





К задаче 20.13.

Определить: 1) ориентацию оси z вращения гироскопа относительно географически ориентированных осей $\xi\eta\zeta$ (см. задачу 20.10), если поворот внешней рамки (оси y_1) отсчитывается по часовой стрелке от плоскости меридиана (плоскость $\eta\zeta$) и определяется углом α, а подъем оси z над горизонтом определяется углом β;

2) проекции на оси x, y, z угловой скорости вращения трехгранника xyz, предполагая, что точка O подвеса гироскопа неподвижна относительно Земли.

Ответ: 1)

	ξ	η	ζ
z	$\sin\alpha\cos\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$

2) $\omega_x=\dot{\beta}-U\cos\varphi\sin\alpha$,

$\omega_y=\dot{\alpha}\cos\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-\sin\varphi\cos\beta)$,

$\omega_z=\dot{\alpha}\sin\beta+U(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta)$,

где U — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места.

20.14. В условиях предыдущей задачи определить проекции угловой скорости вращения трехгранника xyz, если северная и восточная составляющие скорости точки подвеса соответственно равны v_N и v_E.

Ответ: $\omega_x=\dot{\beta}-\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)\cos\varphi\sin\alpha-\frac{v_N}{R}\cos\alpha,$

$$\omega_y=\dot{\alpha}\cos\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta-\sin\varphi\cos\beta)-\frac{v_N}{R}\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\omega_z=\dot{\alpha}\sin\beta+\left(U+\frac{v_E}{R\cos\varphi}\right)(\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta),$$

где R — радиус Земли.

20.15 (604). Движение тела вокруг неподвижной точки задано углами Эйлера:

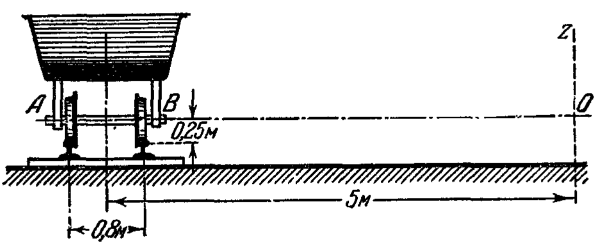
$$\varphi=4t,\quad \psi=\frac{\pi}{2}-2t,\quad \theta=\frac{\pi}{3}.$$

Определить координаты точки, вычерчивающей годограф угловой скорости, угловую скорость и угловое ускорение тела относительно неподвижных осей x, y, z.

Ответ: $x=\omega_x=2\sqrt{3}\cos 2t,\quad y=\omega_y=-2\sqrt{3}\sin 2t,$

$z=\omega_z=0;\quad \omega=2\sqrt{3}$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon=4\sqrt{3}$ *сек*$^{-2}$.

20.16 (605). Найти подвижный и неподвижный аксоиды внешнего колеса вагона, катящегося по горизонтальному пути, средний радиус кривизны которого равен 5 *м*, радиус колеса вагона 0,25 *м*, ширина колеи 0,80 *м*.



К задаче 20.16.

Примечание. Колесо вращается вместе с вагоном вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр закругления пути, и относительно вагона вокруг оси AB, т. е. вращается вокруг неподвижной точки O.

Ответ: Неподвижный аксоид — конус, ось которого совпадает с осью Oz и с углом при вершине $\alpha=2\,\mathrm{arctg}\,21{,}6=174^\circ 42'$. Подвижный аксоид — конус с осью AB и углом при вершине $\beta=2\,\mathrm{arctg}\,0{,}0463=5^\circ 18'$.

20.17 (610). Движение тела вокруг неподвижной точки задано при помощи углов Эйлера следующими уравнениями: $\varphi=nt$, $\psi=\pi/2+ant$, $\theta=\pi/3$. Определить проекции угловой скорости и углового ускорения тела на неподвижные оси, если a и n — постоянные величины. Указать также то значение параметра a, при котором неподвижным аксоидом тела будет плоскость Oxy.

Ответ: $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right)$;

$\varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\sin ant$, $\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}\cos ant$, $\varepsilon_z = 0$; $a = -\frac{1}{2}$.

20.18. Углы Эйлера, определяющие положение тела, изменяются по закону (регулярная прецессия) $\psi = \psi_0 + n_1 t$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0 + n_2 t$, где ψ_0, θ_0, φ_0 — начальные значения углов, а n_1 и n_2 — постоянные числа, равные соответствующим угловым скоростям. Определить угловую скорость ω тела, неподвижный и подвижный аксоиды.

Ответ. 1) $\omega = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 \cos\theta_0}$;

2) неподвижный аксоид — круговой конус $\xi^2 + \eta^2 - \frac{n_2^2 \sin^2\theta_0}{(n_2\cos\theta_0 + n_1)^2}\zeta^2 = 0$ с осью ζ и углом раствора $2\arcsin\frac{n_2\sin\theta_0}{\omega}$;

3) подвижный аксоид — круговой конус $x^2 + y^2 - \frac{n_1^2\sin^2\theta_0}{(n_1\cos\theta_0 + n_2)^2}z^2 = 0$ с осью z и углом раствора $2\arcsin\frac{n_1\sin\theta_0}{\omega}$.

ГЛАВА VII

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 21. Уравнения движений точки

21.1. Определить уравнение прямолинейного движения точки, складывающегося из двух гармонических колебаний:

$$x_1 = 2\cos(\pi t + \pi/2), \quad x_2 = 3\cos(\pi t + \pi).$$

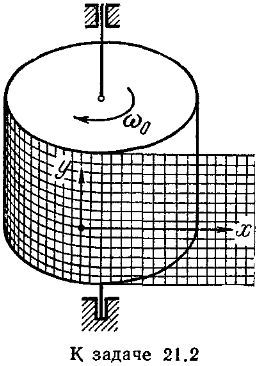
Ответ: $x = \sqrt{13}\cos(\pi t + \alpha)$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = 33°40'$.

21.2. Барабан записывающего устройства вращается равномерно со скоростью ω_0 *сек*$^{-1}$. Радиус барабана r. Самописец соединен с деталью, движущейся по вертикали по закону

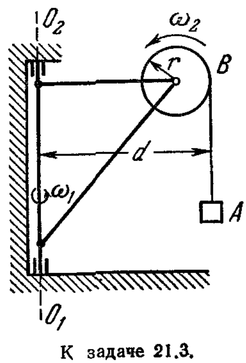
$$y = a \sin \omega_1 t.$$

Найти уравнение кривой, которую запишет перо на бумажной ленте.

Ответ: $y = a \sin \frac{\omega_1 x}{\omega_0 r}$.



К задаче 21.2



К задаче 21.3.

21.3. При вращении поворотного крана вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω_1 груз A поднимается вверх посредством каната, навернутого на барабан B. Барабан B радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω_2. Определить абсолютную траекторию груза, если вылет крана равен d.

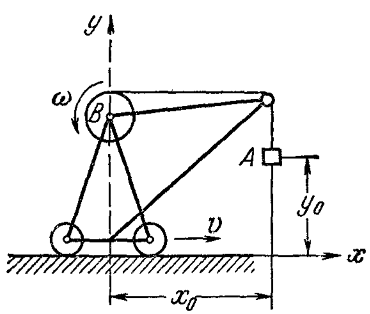
Ответ: Винтовая линия, уравнение которой

$$x = d\cos\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r},\quad y = d\sin\frac{\omega_1}{\omega_2}\cdot\frac{z}{r},$$

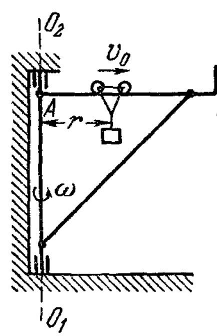
ось x проходит через ось O_1O_2 и начальное положение груза, ось z направлена вверх по оси вращения крана.

21.4. При совмещении работы механизмов подьема груза и перемещения крана груз A перемещается в горизонтальном и вертикальном направлениях. Барабан B радиуса $r = 50$ *см*, на который навит канат, поддерживающий груз A, вращается при пуске в ход с угловой скоростью $\omega = 2\pi$ *сек*$^{-1}$. Кран перемещается в горизонтальном направлении с постоянной скоростью $v = 0{,}5$ *м/сек*. Определить абсолютную траекторию груза, если начальные координаты груза $x_0 = 10$ *м*, $y_0 = 6$ *м*.

Ответ: $y = \frac{x - x_0}{v}\,\omega r + y_0 = 6{,}28x - 56{,}8$.



К задаче 21 4.



К задаче 21 5

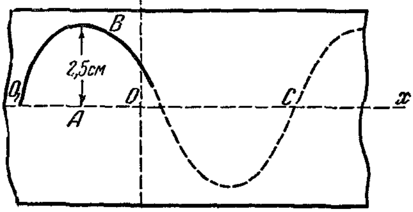
21.5. Стрела AB поворотного крана вращается вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω. По горизонтальной стреле от A к B движется тележка с постоянной скоростью v_0.

Определить абсолютную траекторию тележки, если в начальный момент тележка находилась на оси O_1O_2.

Ответ: Траектория — архимедова спираль

$$r = \frac{v_0}{\omega}\varphi,$$

где r — расстояние тележки о оси вращения, φ — угол поворот крана вокруг оси O_1O_2.



К задаче 21.6.

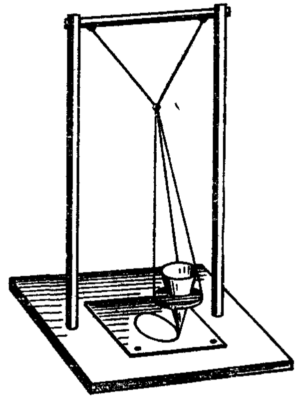
21.6 (417). Лента прибора, служащего для записи колебательных движений, движется по направлению Ox со скоростью 2 *м/сек*. Колеблющееся вдоль оси Oy тело вычерчивает на ленте синусоиду, наибольшая ордината которой $AB = 2{,}5$ *см*, а длина $O_1C = 8$ *см*.

Найти уравнение колебательного движения тела, предполагая, что точка O синусоиды соответствует положению тела при $t=0$.

Ответ: $y = 2{,}5 \sin(50\pi t)$ *см*.

21.7 (419). Трамвай движется равномерно по прямолинейному горизонтальному участку со скоростью $v = 18$ *км/час*, причем кузов совершает на рессорах гармонические колебания с амплитудой $a = 0{,}8$ *см* и периодом $T = 0{,}5$ *сек*. Найти уравнение траектории центра тяжести кузова, если его среднее расстояние от полотна дороги $h = 1{,}5$ *м*. При $t=0$ центр тяжести находится в среднем положении и скорость колебания направлена вверх. Ось Ox направить горизонтально по полотну в сторону движения, ось Oy — вертикально вверх через положение центра тяжести при $t=0$.

Ответ: $y = 1{,}5 + 0{,}008 \sin 0{,}8\pi x$.



К задаче 21.8

21.8 (420). Определить уравнения траектории сложного движения конца двойного маятника, совершающего одновременно два взаимно перпендикулярных гармонических колебания равной частоты, но разных амплитуд и фаз, если уравнения указанных колебаний имеют вид

$$x = a \sin(\omega t + \alpha), \quad y = b(\sin \omega t + \beta).$$

Ответ: Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta).$$

21.9 (421). Конец двойного маятника описывает фигуру Лиссажу, получающуюся при сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний:

$$x = a \sin 2\omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Найти уравнение траектории.

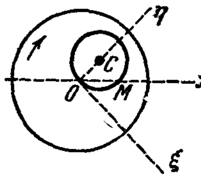
Ответ: $a^2x^2 = 4y^2(a^2 - y^2)$.

21.10 (422). Железнодорожный поезд движется равномерно со скоростью 30 *км/час*; сигнальный фонарь, привешенный к последнему вагону, срывается с кронштейна. Определить траекторию абсолютного движения фонаря и длину пути s, который будет пройден поездом за время падения фонаря, если фонарь находился на высоте 4,905 *м* от земли. Оси координат провести через начальное положение фонаря, ось Ox — горизонтально в сторону движения поезда, ось Oy — вертикально вниз.

Ответ: Парабола с вертикальной осью $y = 0{,}0706x^2$;

$$s = 8\frac{1}{3} \text{ м}, \ (x,\ y \text{ — в метрах},\ t \text{ — в секундах}).$$

21.11 (423). Резец M совершает поперечное возвратно-поступательное движение согласно закону $x = a \sin \omega t$. Найти уравнение траектории конца резца M относительно диска, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси O, пересекающей абсолютную траекторию резца.

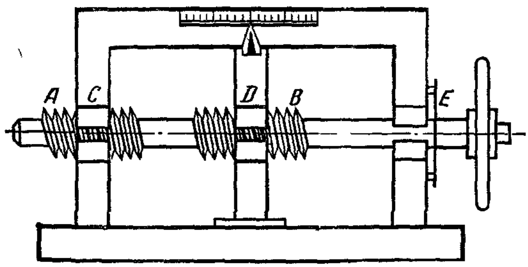


К задаче 21.11.

Ответ: $\xi^2 + (\eta - a/2)^2 = a^2/4$ — окружность радиуса $a/2$ с центром в точке C (см, чертеж).

21.12 (424). В некоторых измерительных и делительных приборах для перемещения указателя применяется дифференциальный винт, состоящий из оси AB, имеющей в части A винтовую нарезку с шагом h_1 *мм*, а в части B — нарезку с шагом $h_2 < h_1$. Часть A вращается в неподвижной гайке C, а часть B охватывается элементом D, лишенным вращательного движения и соединенным с указателем, скользящим вдоль неподвижной шкалы.

1) Определить перемещение указателя при повороте маховичка оси на $1/n$ оборота (соответствующая шкала нанесена на диске E),



К задаче 21.12.

если $n = 200$, $h_1 = 0{,}5$ *мм* и $h_2 = 0{,}4$ *мм*. Обе нарезки правые или обе левые.

2) Как изменится показание прибора, если в части A сделать левую нарезку, а в части B — правую?

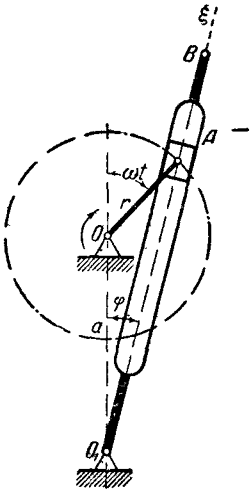
Ответ: 1) $s = \frac{1}{n}(h_1 - h_2) = 0{,}0005$ *мм*.

2) $s = \frac{1}{n}(h_1 + h_2) = 0{,}0045$ *мм*.

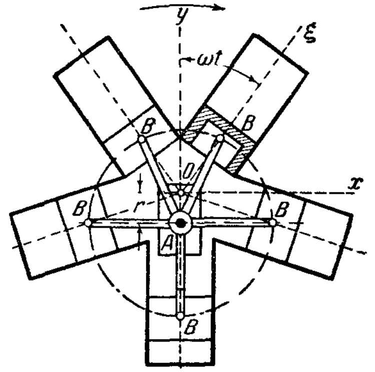
21.13 (425). Ускорительный механизм строгального станка состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B. Конец кривошипа OA соединен шарнирно с ползуном, скользящим вдоль прорези в кулисе O_1B. Найти уравнение относительного движения ползуна в прорези кулисы и уравнение вращения самой кулисы, если кривошип OA длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω, расстояние между осями валов $OO_1 = a$.

Ответ: $\xi = \sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t}$; $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{r \sin \omega t}{a + r \cos \omega t}$.

21.14 (426). В ротативном двигателе, схематически показанном на чертеже, цилиндры, прикрепленные к картеру, вращаются вместе с ним вокруг неподвижной оси вала O, а шатуны поршней вращаются вокруг пальца A неподвижного кривошипа OA. Указать: 1) траекторию абсолютного движения точек B поршней и 2) приближенное уравнение их относи-



К задаче 21.13.



К задаче 21.14.

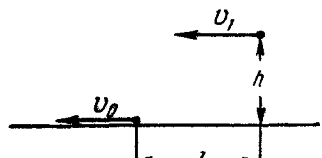
тельного движения по отношению к цилиндрам, если цилиндры вращаются с угловой скоростью ω. Дано: $OA=r$ и $AB=l$. Оси Ox и Oy имеют начало в центре вала. Принято, что $\lambda=r/l$ мало.

Ответ: 1) Окружность $x^2+(y+r)^2=l^2$;

$$2)\ \xi=l\left(1-\lambda\cos\omega t-\frac{\lambda^2}{2}\sin^2\omega t\right).$$

§ 22. Сложение скоростей точки

22.1. Корабль движется прямолинейно со скоростью v_0. На высоте h над морем со скоростью v_1 летит самолет тем же курсом. Определить расстояние l, отсчитываемое по горизонтали, на котором надо сбросить вымпел, чтобы он попал на корабль. Сопротивлением воздуха движению вымпела пренебречь.



К задаче 22.1.

Ответ: $l=(v_1-v_0)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

22.2. Решить предыдущую задачу, если самолет летит с той же скоростью навстречу движущемуся кораблю.

Ответ: $l=(v_1+v_0)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

22.3. Корабль, проходящий точку A, движется с постоянной по модулю и направлению скоростью v_0. Под каким углом β к прямой AB

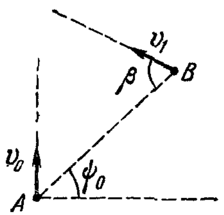
надо начать двигаться катеру из точки B, чтобы встретиться с кораблем, если скорость катера постоянна по модулю и направлению и равна v_1? Линия AB составляет угол ψ_0 с перпендикуляром к курсу корабля.

Ответ: $\sin\beta = \frac{v_0}{v_1}\cos\psi_0$.

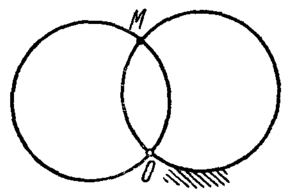
22.4. В предыдущей задаче определить время T, по истечении которого катер встретится с кораблем, если первоначальное расстояние между ними равнялось $AB = l$.

Ответ:

$$T = \frac{l}{v_0 \sin\psi_0 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2\cos^2\psi_0}} = \frac{l}{v_0}\frac{\sin\beta}{\cos(\psi_0-\beta)} = \frac{l}{v_1}\frac{\cos\psi_0}{\cos(\psi_0-\beta)}.$$



К задаче 22.3.



К задаче 22.5.

22.5. Проволочная окружность вращается в своей плоскости относительно неподвижного шарнира O с постоянной угловой скоростью ω. Как будет двигаться точка M пересечения этой окружности с неподвижной окружностью того же радиуса R, проходящей также через шарнир O?

Ответ: Точка пересечения обходит каждую из окружностей с постоянной скоростью, равной ωR.

22.6 (427). Корабль идет курсом ЮВ со скоростью a узлов, при этом флюгер на мачте показывает ветер В. Корабль уменьшает ход до $a/2$ узлов, флюгер показывает ветер СВ. Определить: 1) направление и 2) скорость ветра.

Примечание. Наименование курса указывает, куда идет корабль, наименование ветра — откуда он дует.

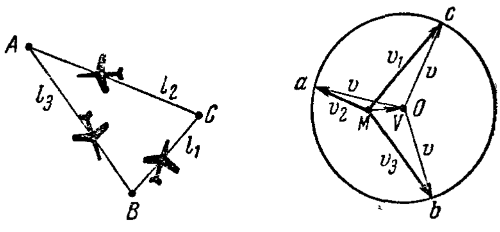
Ответ: 1) С севера; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ узлов.

22.7 (428). Для определения собственной скорости самолета при ветре на земле отмечают прямую линию известной длины l, концы которой должны быть хорошо видны сверху. Направление отмеченной прямой должно совпадать с направлением ветра. Вдоль этой прямой самолет пролетел сначала по ветру за время t_1 *сек*, а затем против ветра за время t_2 *сек*. Определить собственную скорость v самолета и скорость V ветра.

Ответ: $v = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ *м/сек* $= 1{,}8l\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ *км/час*;

$V = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$ *м/сек*.

22.8 (429). Для определения собственной скорости v самолета при ветре размечают на земле треугольный полигон ABC со сторонами $BC=l_1$, $CA=l_2$, $AB=l_3$ метров. Для каждой стороны полигона определяют время полета: t_1, t_2, t_3 *сек*. Определить собственную



К задаче 22.8.

скорость v самолета, предполагая, что она неизменна по величине, и скорость V ветра. Задачу решить графически.

Пояснение. Собственной скоростью самолета называется скорость самолета относительно воздуха.

Ответ: От произвольной точки M отложить три вектора, соответственно равных l_1/t_1, l_2/t_2, l_3/t_3 и параллельных сторонам BC, CA и AB полигона. Величина скорости v самолета определится радиусом окружности, проходящей через концы этих векторов. Скорость ветра определяется вектором $\overline{MO}$.

22.9 (430). Пассажир движущегося со скоростью 72 *км/час* по горизонтальному шоссе автомобиля видит через боковое стекло кабины траектории капель дождя наклоненными к вертикали под углом 40°. Определить абсолютную скорость падения дождевых капель отвесно падающего дождя, пренебрегая трением капель о стекло.

Ответ: $v=\dfrac{v_e}{\operatorname{tg} 40^\circ}=23{,}8$ *м/сек*.

22.10 (431). Берега реки параллельны; лодка вышла из точки A и, держа курс перпендикулярно к берегам, достигла противоположного берега через 10 *мин* после отправления. При этом она попала в точку C, лежащую на 120 *м* ниже точки A по течению реки.

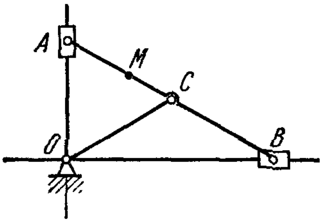
Чтобы, двигаясь с прежней относительной скоростью, попасть из точки A в точку B, лежащую на прямой AB, перпендикулярной к берегам, лодке надо держать курс под некоторым углом к прямой AB и против течения; в этом случае лодка достигает противоположного берега через 12,5 *мин*. Определить ширину реки l, относительную скорость u лодки по отношению к воде и скорость v течения реки.

Ответ: $l=200$ *м*; $u=20$ *м/мин*; $v=12$ *м/мин*.

22.11 (432). Корабль плывет на юг со скоростью $30\sqrt{2}$ *км/час*. Второй корабль идет курсом на юго-восток со скоростью 30 *км/час*. Найти величину и направление скорости второго корабля, определяемые наблюдателем, находящимся на палубе первого корабля.

Ответ: $v_r=30$ *км/час* и направлена на северо-восток.

22.12. Линейка AB эллипсографа приводится в движение стержнем OC, вращающимся вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_0. Кроме того, весь механизм вместе с направляющими вращается вокруг оси, перпендикулярной к чертежу и проходящей через точку O, с постоянной угловой скоростью, равной также ω_0.



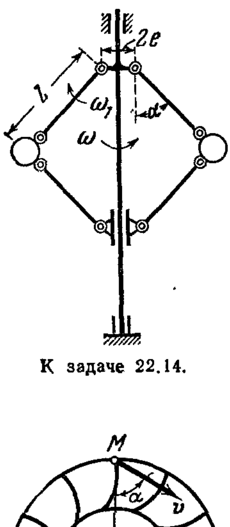
К задаче 22.12.

Найти абсолютную скорость произвольной точки M линейки как функцию расстояния $AM = l$ в предположении, что вращение стержня OC и вращение всего механизма происходят в противоположных направлениях.

Ответ: $v_M = (AB - 2l)\,\omega_0$.

23.13. Решить предыдущую задачу для случая, когда оба вращения происходят в одном направлении.

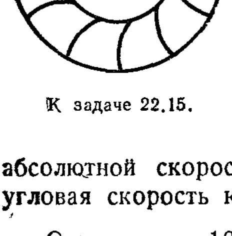
Ответ: v_M не зависит от положения точки M и равна $AB \cdot \omega_0$.



К задаче 22.14.

22.14 (435). Шары центробежного регулятора Уатта, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 10$ *сек*$^{-1}$, благодаря изменению нагрузки машины отходят от этой оси, имея для своих стержней в данном положении угловую скорость $\omega_1 = 1{,}2$ *сек*$^{-1}$. Найти абсолютную скорость шаров регулятора в рассматриваемый момент, если длина стержней $l = 50$ *см*, расстояние между осями их привеса $2e = 10$ *см*, углы, образованные стержнями с осью регулятора, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$.

Ответ: $v = 306$ *см/сек*.



К задаче 22.15.

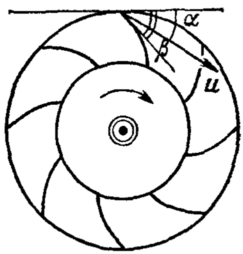
22.15 (436). В гидравлической турбине вода из направляющего аппарата попадает во вращающееся рабочее колесо, лопатки которого поставлены, во избежание входа воды с ударом, так, чтобы относительная скорость v_r касалась лопатки. Найти относительную скорость частицы воды на наружном ободе колёса (в момент входа), если ее абсолютная скорость при входе $v = 15$ *м/сек*, угол между абсолютной скоростью и радиусом $\alpha = 60°$, радиус входа $R = 2$ *м*, угловая скорость колеса соответствует $n = 30$ *об/мин*.

Ответ: $v_r = 10{,}06$ *м/сек*; $\left(\widehat{v_r, R}\right) = 41°50'$.

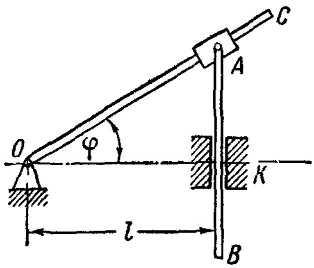
22.16. Частицы воды входят в турбину со скоростью u. Угол между скоростью u и касательной к ротору, проведенной в точке входа частицы, равен α. Внешний диаметр ротора D, его число оборотов в минуту n.

Определить угол между лопаткой ротора и касательной в точке входа воды, при котором вода будет входить без удара (относительная скорость частиц в этом случае должна быть направлена вдоль лопаток).

Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \frac{60u\sin\alpha}{60u\cos\alpha - \pi Dn}$.



К задаче 22.16.



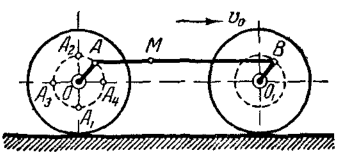
К задаче 22.17.

22.17 (438). В кулисном механизме при качании кривошипа OC вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, ползун A, перемещаясь вдоль кривошипа OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Расстояние $OK = l$. Определить скорость движения ползуна A относительно кривошипа OC в функции от угловой скорости ω и угла поворота φ кривошипа.

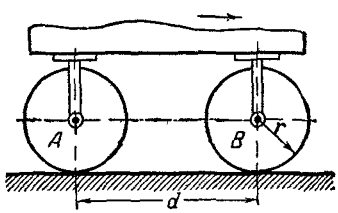
Ответ: $v_r = \frac{l\omega\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}$.

22.18 (439). Найти абсолютную скорость какой-либо точки M спарника AB, соединяющего кривошипы OA и O_1B осей O и O_1, если радиусы колес одинаковы: $R = 1$ *м*; радиусы кривошипов: $OA = O_1B = 0{,}5$ *м*. Скорость экипажа $v_0 = 20$ *м/сек*. Скорость точки M определить для четырех моментов, когда кривошипы OA и O_1B либо вертикальны, либо горизонтальны. Колеса катятся по рельсам без скольжения.

Ответ: $v_1 = 10$ *м/сек*; $v_2 = 30$ *м/сек*; $v_3 = v_4 = 22{,}36$ *м/сек*.



К задаче 22.18.



К задаче 22.19.

22.19 (440). Колеса A и B вагона, движущегося со скоростью v по прямолинейному рельсу, катятся по нему без скольжения. Радиусы колес равны r, и расстояние между осями d. Определить скорость центра колеса A относительно системы координат, неизменно связанной с колесом B.

Ответ: Скорость равна $\frac{vd}{r}$, перпендикулярна к AB и направлена вниз.

22.20 (441). Механизм состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B; конец A кривошипа OA скользит вдоль прорези в кулисе O_1B; расстояние между осями валов OO_1 равно a; длина кривошипа OA равна l, причем $l > a$. Вал O вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найти: 1) угловую скорость ω_1 вала O_1 и относительную скорость точки A по отношению к кулисе O_1B, выразив их через переменную величину $O_1A = s$; 2) наибольшие и наименьшие значения этих величин; 3) те положения кривошипа, когда $\omega_1 = \omega$.

Ответ: 1) $\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1 + \frac{l^2 - a^2}{s^2}\right)$;

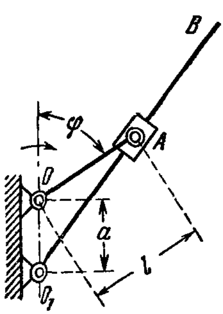
$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)};$$

2) $\omega_{1\,max} = \omega\frac{l}{l-a}$; $\omega_{1\,min} = \omega\frac{l}{l+a}$; $v_{r\,max} = a\omega$;

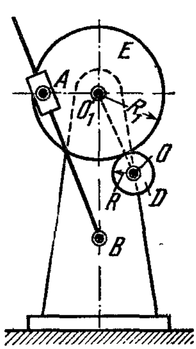
$v_{r\,min} = 0$;

3) $\omega_1 = \omega$ при $O_1B \perp O_1O$.

22.21 (442). Камень A качающейся кулисы механизма строгального станка приводится в движение зубчатой передачей, состоящей из зубчатки D и зубчатки E, несущей на себе ось камня A в виде пальца. Радиусы зубчаток $R = 100$ *мм*, $R_1 = 350$ *мм*, $O_1A = 300$ *мм*, расстояние между осью O_1 зубчатки E и центром B качания кулисы $O_1B = 700$ *мм*. Определить угловую скорость кулисы в моменты, когда отрезок O_1A либо вертикален (верхнее и нижнее положения), либо перпендикулярен к кулисе AB (левое и правое положения), если зубчатка имеет угловую скорость $\omega = 7$ *сек*$^{-1}$. Точки O_1 и B расположены на одной вертикали.



К задаче 22.20.



К задаче 22.21.

Ответ: $\omega_I = 0{,}6$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{II} = \omega_{IV} = 0$; $\omega_{III} = 1{,}5$ *сек*$^{-1}$.

22.22 (443). Определить угловую скорость вращающейся кулисы кривошипно-кулисного механизма при четырех положениях кривошипа — двух вертикальных и двух горизонтальных, если $a = 60$ *см*, $l = 80$ *см* и угловая скорость кривошипа соответствует $n = 30$ *об/мин*. (См. чертеж к задаче 22.20.)

Ответ: $\omega_I = \frac{4}{7}\pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{II} = \omega_{IV} = 0{,}64\,\pi$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{III} = 4\pi$ *сек*$^{-1}$.

22.23 (444). Определить абсолютную скорость поршня ротативного двигателя при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях шатуна AB, если длина кривошипа $OA = r = 80$ *мм*, длина шатуна $AB = l = 240$ *мм*, число оборотов цилиндра с картером $n = 1200$ *об/мин*. (См. чертеж к задаче 21.14.)

Ответ: $v_{\rm I} = 20{,}11$ *м/сек*; $v_{\rm III} = 40{,}21$ *м/сек*; $v_{\rm II} = v_{\rm IV} = 33{,}51$ *м/сек*.

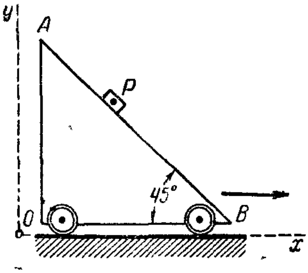
22.24. Восточная, северная и вертикальная составляющие скорости точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N, v_h. Высота точки над поверхностью Земли в данный момент равна h, широта места φ. Радиус Земли R, ее угловая скорость ω. Определить составляющие абсолютной скорости точки.

Ответ: $v_x = v_E + (R + h)\,\omega\cos\varphi$; $v_y = v_N$; $v_z = v_h$ (ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вертикально вверх).

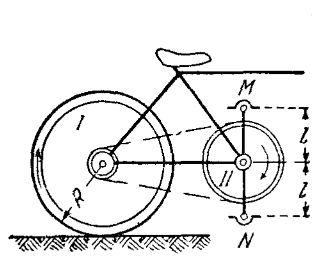
§ 23. Сложение ускорений точки

23.1 (447). Наклонная плоскость AB, составляющая угол 45° с горизонтом, движется прямолинейно параллельно оси Ox с постоянным ускорением 1 *дм/сек*^{2}. По этой плоскости спускается тело P с постоянным относительным ускорением $\sqrt{2}$ *дм/сек*^{2}; начальные скорости плоскости и тела равны нулю, начальное положение тела определяется координатами $x = 0$, $y = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела.

Ответ: $y = h - \frac{x}{2}$; $v = \sqrt{5}\,t$ *дм/сек*; $w = \sqrt{5}$ *дм/сек*^{2}.



К задаче 23.1.



К задаче 23.2.

23.2 (448). Велосипедист на некотором участке горизонтального прямолинейного пути движется по закону $s = 0{,}1t^2$ (s — в метрах, t — в секундах). Дано: $R = 350$ *мм*, $l = 180$ *мм*, $z_1 = 18$ зубцов, $z_2 = 48$ зубцов.

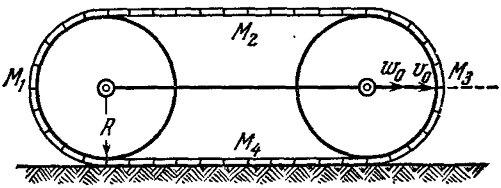
Определить абсолютное ускорение осей M и N велосипедных педалей (предполагая, что колеса катятся без скольжения) при $t = 10$ *сек*, если в этот момент кривошип MN расположен вертикально.

Ответ: $w_M = 0{,}860$ *м/сек*^{2}; $w_N = 0{,}841$ *м/сек*^{2}.

23.3 (449). Определить абсолютное ускорение какой-нибудь точки M спарника AB, соединяющего кривошипы осей O и O_1, если экипаж движется по прямолинейному участку пути равномерно со скоростью $v_0 = 36$ *км/час*. Радиусы колес $R = 1$ *м*, радиусы кривошипов $r = 0{,}75$ *м*. (См. чертеж к задаче 22.18.)

Ответ: $w = 75$ *м/сек*^{2}.

23.4 (450). Найти скорости и ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному



К задаче 23.4.

участку пути со скоростью v_0 и ускорением w_0; радиусы колес трактора равны R; скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.

Ответ: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}$; $v_2 = 2v_0$; $v_4 = 0$;

$$w_1 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 + \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_2 = 2w_0;$$

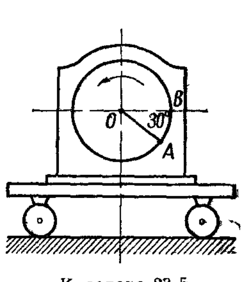
$$w_3 = \sqrt{w_0^2 + \left(w_0 - \frac{v_0^2}{R}\right)^2}; \quad w_4 = 0.$$

23.5 (455). На тележке, движущейся по горизонтали вправо с ускорением $w = 49{,}2$ *см/сек*^{2}, установлен электрический мотор, ротор которого при пуске в ход вращается согласно уравнению $\varphi = t^2$, причем угол φ измеряется в радианах. Радиус ротора равен 20 *см*. Определить абсолютное ускорение точки A, лежащей на ободе ротора, при $t = 1$ *сек*, если в этот момент точка A находится в положении, указанном на чертеже.

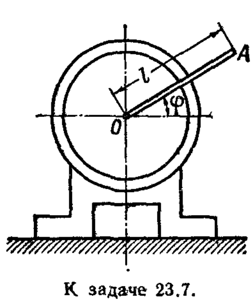
Ответ: $w_A = 74{,}6$ *см/сек*^{2} и направлено по вертикали вверх.

23.6 (456). Определить в предыдущей задаче угловую скорость равномерного вращения ротора, при которой точка A, находясь в положении B, имеет абсолютное ускорение, равное нулю.

Ответ: $\omega = 1{,}57$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 23.5.



К задаче 23.7.

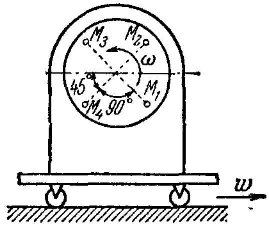
23.7 (457). К валу электромотора, вращающегося согласно уравнению $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{const}$), прикреплен под прямым углом стержень OA длиной l; при этом электромотор, установленный без креплений, совершает горизонтальные гармонические колебания на фундаменте по закону $x = a \sin \omega t$. Определить абсолютное ускорение точки A в момент времени $t = \frac{\pi}{2\omega}$ *сек.*

Ответ: $w_A = \omega^2 \sqrt{a^2 + l^2}$.

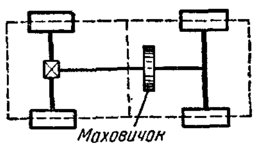
23.8. Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением $w = 4$ *см/сек*^{2}. Мотор вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2} t^2$. Определить абсолютное ускорение в момент $t = 1$ *сек* четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 2\sqrt{2}$ *см* и занимающих в этот момент положение, указанное на чертеже.

Ответ: $w_1 = 4\sqrt{2}$ *см/сек*^{2}, $w_2 = 0$, $w_3 = 4\sqrt{2}$ *см/сек*^{2}, $w_4 = 8$ *см/сек*^{2}.

23.9 (458). Автомобиль на прямолинейном участке пути движется с ускорением $w_0 = 2$ *м/сек*^{2}. На продольный вал насажен вращающийся маховичок радиуса $R = 0,25$ *м*, имеющий в данный момент угловую



К задаче 23.8.



К задаче 23.9.

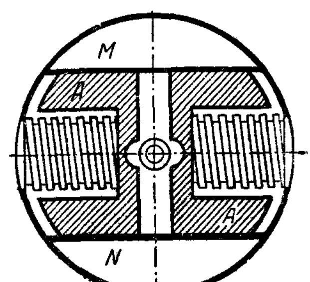
скорость $\omega = 4$ *сек*$^{-1}$ и угловое ускорение $\varepsilon = 4$ *сек*$^{-2}$. Найти абсолютное ускорение точек обода маховичка в данный момент.

Ответ: $w = 4,58$ *м/сек*^{2}.

23.10 (459). Самолет движется прямолинейно с ускорением $w_0 = \text{const} = 4$ *м/сек*^{2}, винт диаметром $d = 1,8$ *м* вращается равномерно с угловой скоростью, соответствующей $n = 1800$ *об/мин.*

Найти уравнения движения, скорость и ускорение конца винта в системе координат, неподвижной относительно Земли, причем ось Ox этой системы координат совпадает с осью винта. Начальная скорость самолета $v_0 = 0$.

Ответ: $x = 2t^2$ *м*, $y = 0,9 \cos 60\pi t$ *м*,
$z = 0,9 \sin 60\pi t$ *м*;
$v = \sqrt{16t^2 + 2916\pi^2}$ *м/сек*;
$w = 31945$ *м/сек*^{2}.



К задаче 23.11.

23.11 (460). В регуляторе, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $n = 180$ *об/мин*, тяжелые гири A, прикрепленные к концам пружины, совершают гармонические колебания вдоль паза MN таким образом, что расстояние их центров тяжести от оси вращения изменяется по закону $x = (10 + 5\sin 8\pi t)$ *см.*

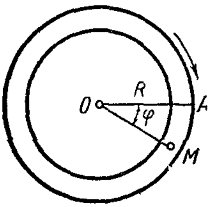
Определить ускорение центра тяжести гири в момент, когда кориолисово ускорение достигает максимального значения, и указать значения кориолисова ускорения при крайних положениях гири.

Ответ: $w_a = 600\pi^2$ *см/сек*^{2}; $w_c = 0$.

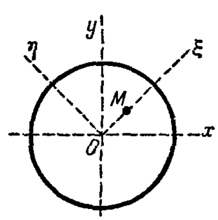
23.12 (461). Струя воды течет по горизонтальной трубе OA, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n = 60$ *об/мин*. Определить кориолисово ускорение w_c в этой точке струи, где относительная скорость $v_r = 21/11$ *м/сек* и направлена по OA. Принять для π приближенное значение $\pi = 22/7$.

Ответ: $w_c = 24$ *м/сек*^{2}.

23.13 (462). Круглая трубка радиуса $R = 1$ *м* вращается вокруг горизонтальной оси O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ *сек*$^{-1}$. В трубке около ее точки A колеблется шарик M, причем так, что угол $\varphi = \sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное w_τ и нормальное w_n в момент $t = 2\,^1/_6$ *сек.*



К задаче 23.13.



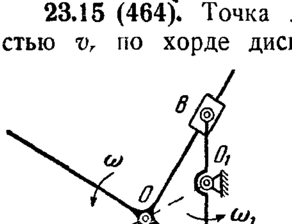
К задаче 23.14.

Ответ: $w_\tau = -4{,}93$ *м/сек*^{2}; $w_n = 13{,}84$ *м/сек*^{2}.

23.14 (463). Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 *сек*$^{-2}$; в момент $t = 0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi = \sin \pi t$ *дм*, причем t взято в секундах. Определить в момент $t = 1\,^2/_3$ *сек* проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η, связанные с диском.

Ответ: $w_\xi = 10{,}95$ *дм/сек*^{2}; $w_\eta = -4{,}37$ *дм/сек*^{2}.

23.15 (464). Точка движется равномерно с относительной скоростью v_r по хорде диска, который вращается вокруг своей оси O, перпендикулярной к плоскости диска, с постоянной угловой скоростью ω. Определить абсолютные скорость и ускорение точки в тот момент, когда она находится на кратчайшем расстоянии h от оси, в предположении, что относительное движение точки происходит в сторону вращения диска.



К задаче 23 16.

Ответ: $v = v_r + h\omega$; $w = \omega^2 h + 2\omega v_r$.

23.16 (465). Для передачи вращения одного вала к другому, параллельному первому, применяется муфта, которая является обращенным эллиптическим циркулем с закрепленным кривошипом OO_1. Кривошип AB вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1 и приводит во вращение крестовину вокруг оси O вместе со вторым валом.

Определить угловую скорость вращения крестовины, а также переносную и относительную (по отношению к крестовине) скорости и ускорения (переносное, относительное и кориолисово) точки A ползуна при $\omega_1 = \text{const}$, если $OO_1 = AO_1 = O_1B = a$.

Ответ: $\omega = \frac{\omega_1}{2}$; $v_e = a\omega_1 \sin\frac{\omega_1}{2}t$; $v_r = a\omega_1 \cos\frac{\omega_1}{2}t$;

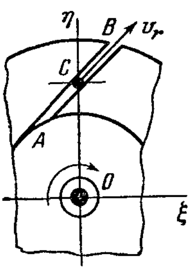
$$w_e = w_r = \frac{a\omega_1^2}{2}\sin\frac{\omega_1}{2}t; \quad w_c = a\omega_1^2\cos\frac{\omega_1}{2}t.$$

23.17 (466). Велосипедист движется по горизонтальной платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{1}{2}$ *сек*$^{-1}$; расстояние велосипедиста до оси вращения платформы остается постоянным и равным $r = 4$ *м*. Относительная скорость велосипедиста $v_r = 4$ *м/сек* и направлена в сторону, противоположную переносной скорости соответствующей точки платформы. Определить абсолютное ускорение велосипедиста. Найти также, с какой относительной скоростью он должен двигаться, чтобы его абсолютное ускорение равнялось нулю.

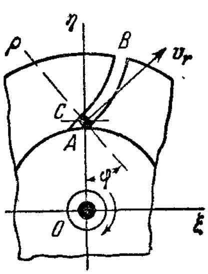
Ответ: 1) $w = 1$ *м/сек*^{2} и направлено по радиусу к центру диска; 2) $v_r = 2$ *м/сек*.

23.18 (467). Компрессор с прямолинейными каналами равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Воздух течет по каналам с постоянной относительной скоростью v_r. Найти проекции абсолютной скорости и ускорения на оси координат для частицы воздуха, находящейся в точке C канала AB, при следующих данных: канал AB наклонен к радиусу OC под углом 45°, $OC = 0{,}5$ *м*, $\omega = 4\pi$ *сек*$^{-1}$, $v_r = 2$ *м/сек*.

Ответ: $v_\xi = 7{,}7$ *м/сек*; $v_\eta = 1{,}414$ *м/сек*; $w_\xi = 35{,}54$ *м/сек*^{2}; $w_\eta = -114{,}5$ *м/сек*^{2}.



К задаче 23.18.



К задаче 23.19.

23.19 (468). Решить предыдущую задачу для случая криволинейного канала, если радиус кривизны канала в точке C равен ρ, а угол между нормалью к кривой AB в точке C и радиусом OC равен φ. Радиус CO равен r.

Ответ: $v_\xi = v_r\cos\varphi + r\omega$; $v_\eta = v_r\sin\varphi$; $w_\xi = \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\sin\varphi$;

$$w_\eta = -\left[r\omega^2 + \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\cos\varphi\right].$$

23.20 (469). Выразить в функции от времени угловое ускорение ε качающейся кулисы поперечно-строгального станка, если кривошип длиной r вращается равномерно с угловой скоростью ω; расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $a > r$. (См. чертеж к задаче 21.13.)

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{(r^2 - a^2)\, ar\omega^2 \sin \omega t}{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t)^2}$.

23.21 (470). Камень A совершает переносное движение вместе с кулисой, вращающейся с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε вокруг оси O_1, перпендикулярной к плоскости кулисы, и относительное прямолинейное движение вдоль прорези кулисы со скоростью v_r и ускорением w_r.

Определить проекции абсолютного ускорения камня на подвижные оси координат, связанные с кулисой, выразив их через переменное расстояние $O_1A = s$. (См. чертеж к задаче 22.20.)

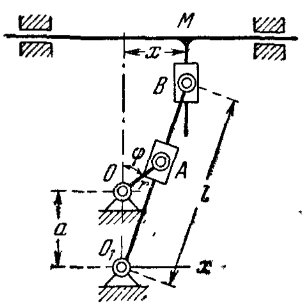
Ответ: $w_\xi = w_r - s\omega^2$; $w_\eta = s\varepsilon + 2v_r\omega$, причем оси ξ и η направлены соответственно вдоль прорези и перпендикулярно к ней.

23.22 (471). Определить угловое ускорение вращающейся кулисы кривошипно-кулисного механизма строгального станка при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа, если длина кривошипа $l = 40$ *см*, расстояние между осями кривошипа и кулисы $a = 30$ *см*, угловая скорость равномерного вращения кривошипа $\omega = 3$ *сек*$^{-1}$. (См. чертеж к задаче 22.20.)

Ответ: $\varphi = 0$ и $\varphi = 180°$, $\varepsilon = 0$; $\varphi = 90°$, $\varepsilon = 1{,}21$ *сек*$^{-2}$; $\varphi = 270°$, $\varepsilon = 1{,}21$ *сек*$^{-2}$ (вращение замедленное).

23.23 (472). Найти ускорение относительного движения камня кулисы вдоль ее прорези в предыдущей задаче при указанных четырех положениях кривошипа.

Ответ: $\varphi = 0$, $w_r = 154{,}3$ *см/сек*^{2}; $\varphi = 90°$ и $\varphi = 270°$, $w_r = 103{,}7$ *см/сек*^{2}; $\varphi = 180°$, $w_r = -1080$ *см/сек*^{2}.



К задаче 23.24.

23.24 (473). Найти уравнение движения, скорость и ускорение суппорта M строгального станка, приводимого в движение кривошипно-кулисным механизмом с качающейся кулисой O_1B. Схема указана на чертеже. Кулиса соединена с суппортом M при помощи ползуна B, скользящего относительно суппорта по направляющей, перпендикулярной к оси его движения. Дано: $O_1B = l$, $OA = r$, $O_1O = a$, $r < a$; кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω; угол поворота кривошипа отсчитывается от вертикальной оси.

Ответ: $x = l \dfrac{r \sin \omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t}}$;

$$v = rl\omega \frac{(a + r \cos \omega t)(a \cos \omega t + r)}{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t)^{3/2}};$$

$$w = rl\omega^2 \frac{a (r^2 - a^2)(a + r \cos \omega t) - r^2 (a \cos \omega t + r)^2}{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \omega t)^{5/2}} \sin \omega t.$$

Примечание. Координата отсчитывается от вертикали, проходящей через точку O.

23.25 (474). Найти ускорение резца строгального станка с качающейся кулисой при двух вертикальных и двух горизонтальных положениях кривошипа, если длина кривошипа $r=10$ *см*, расстояние между центрами вращения кривошипа и кулисы $a=30$ *см*, длина кулисы $l=60$ *см*, угловая скорость вращения кривошипа $\omega = 4$ *сек*$^{-1}$ $=$ const. (См. чертеж к задаче 23.24.)

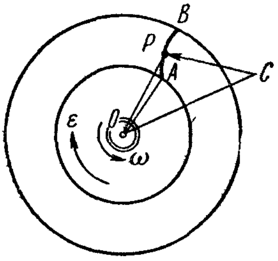
Ответ: При $\varphi=0$ и $\varphi=180°$ $w_x=0$;

при $\varphi=90°$ и $\varphi=270°$ $w_x=\mp 221$ *см/сек*^{2}.

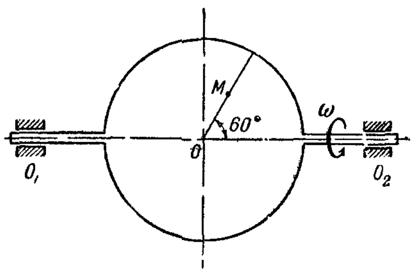
23.26. Лопатка AB турбины вращающейся против часовой стрелки замедленно с угловым ускорением, равным 3 *сек*$^{-2}$, имеет радиус кривизны 20 *см* и центр кривизны в точке C, причем $OC = 10\sqrt{10}$ *см*. Частица воды P, отстоящая от оси O турбины на расстоянии $OP=20$ *см*, движется по лопатке наружу и имеет скорость 25 *см/сек* и касательное ускорение 50 *см/сек*^{2} по отношению к лопатке.

Определить абсолютное ускорение частицы P в тот момент, когда угловая скорость турбины равна 2 *сек*$^{-1}$.

Ответ: $w_a=52$ *см/сек*^{2}.



К задаче 23.26.



К задаче 23.27.

23.27 (476). По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega=2t$ *сек*$^{-1}$, в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM=4t^2$ *см*. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60°.

Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t=1$ *сек*.

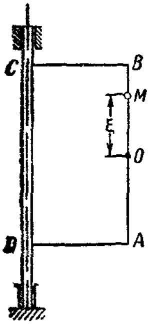
Ответ: $w_M=35{,}56$ *см/сек*^{2}.

23.28 (477). Прямоугольник $ABCD$ вращается вокруг стороны CD с угловой скоростью $\omega=\frac{\pi}{2}$ *сек*$^{-1}$ $=$ const. Вдоль стороны AB движется точка M по закону $\xi = a\sin\frac{\pi}{2}t$ *см*. Даны размеры: $DA = CB = a$ *см*.

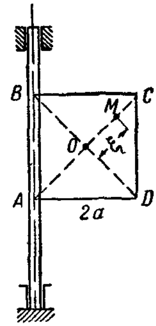
Определить величину абсолютного ускорения точки в момент времени $t=1$ *сек*.

Ответ: $w_a=\frac{a\pi^2}{4}\sqrt{2}$ *см/сек*^{2}.

23.29 (478). Квадрат $ABCD$ со стороною $2a$ *см* вращается вокруг стороны AB с постоянной угловой скоростью $\omega=\pi\sqrt{2}$ *сек*$^{-1}$. Вдоль диагонали AC совершает гармоническое колебание точка M по закону $\xi=a\cos\frac{\pi}{2}t$ *см*.



К задаче 23.28.

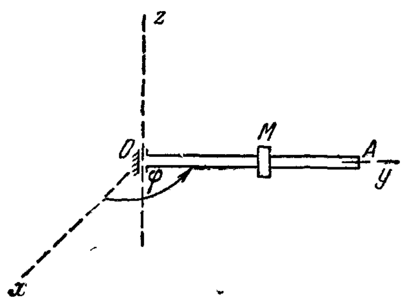


К задаче 23.29.

Определить величину абсолютного ускорения точки при $t=1$ *сек* и $t=2$ *сек*.

Ответ: $w_{a1}=a\pi^2\sqrt{5}$ *см/сек*^{2}; $w_{a2}=0{,}44a\pi^2$ *см/сек*^{2}.

23.30. Стержень OA вращается вокруг оси z, проходящей через точку O, с угловым замедлением 10 *сек*$^{-2}$. Вдоль стержня от точки O скользит шайба M. Определить абсолютное ускорение шайбы в момент, когда она находится на расстоянии 60 *см* от точки O и имеет скорость и ускорение в движении вдоль стержня соответственно 120 *см/сек* и 90 *см/сек*^{2}, если в этот момент угловая скорость стержня равна 5 *сек*$^{-1}$.



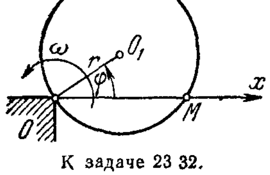
К задачам 23.30 и 23.31.

Ответ: $w_a=1533$ *см/сек*^{2} и составляет с направлением MO угол в 23°.

23.31. Шайба M движется по горизонтальному стержню OA, так что $OM=0{,}5t^2$ *см*. В то же время стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O, по закону $\varphi=t^2+t$. Определить радиальную и трансверсальную составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения шайбы в момент $t=2$ *сек*.

Ответ: $v_r=2$ *см/сек*, $v_\varphi=10$ *см/сек*; $w_r=-49$ *см/сек*^{2}, $w_\varphi=24$ *см/сек*^{2}.

23.32. Круг радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O, лежащей на его окружности. При вращении круг пересекает неподвижную горизонтальную прямую — ось x, проходящую через точку O. Найти скорость и ускорение точки M пересечения круга с осью x в движениях этой точки по отношению к кругу и по отношению к оси x. Выразить искомые величины через расстояние $OM=x$.



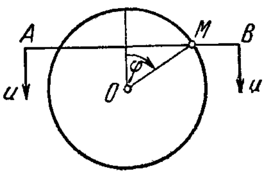
К задаче 23 32.

Ответ: По отношению к прямой Ox точка M движется со скоростью $-\omega\sqrt{4r^2-x^2}$ и ускорением $-\omega^2x$. По отношению к кругу точка движется в сторону, противоположную вращению круга, с постоянной скоростью $2\omega r$ и ускорением $4\omega^2 r$.

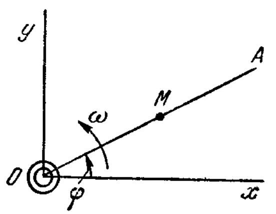
23.33. Горизонтальная прямая AB перемещается параллельно самой себе по вертикали с постоянной скоростью u и пересекает при этом неподвижный круг радиуса r. Найти скорость и ускорение точки M пересечения прямой с окружностью в движениях этой точки относительно круга и относительно прямой AB в функции от угла φ (см. чертеж).

Ответ: 1) В движении по окружности точка M имеет скорость $\frac{u}{\sin\varphi}$ и касательное ускорение $-\frac{u^2\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}$, нормальное ускорение $\frac{u^2}{r\sin^2\varphi}$.

2) По отношению к прямой AB точка M движется со скоростью $\frac{u\cos\varphi}{\sin\varphi}$ и ускорением $-\frac{u^2}{r\sin^3\varphi}$.



К задаче 23.33.



К задаче 23.34.

23.34. Полупрямая OA вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки O с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль OA перемещается точка M. В момент, когда полупрямая совпадала с осью x, точка M находилась в начале координат.

Определить движение точки M относительно полупрямой OA, если известно, что абсолютная скорость v точки M постоянна по величине.

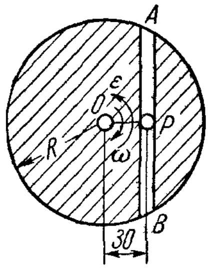
Определить также абсолютную траекторию и абсолютное ускорение точки M.

Ответ: Точка M движется по OA со скоростью $v_r = v\cos\omega t$. Абсолютная траектория точки M — окружность, ее уравнение в полярных координатах $r = \frac{v}{\omega}\sin\varphi$, в декартовых координатах $x^2 + \left(y - \frac{v}{2\omega}\right)^2 = \left(\frac{v}{2\omega}\right)^2$. Абсолютное ускорение точки M $w_a = 2\omega v$.

23.35. Точка движется с постоянной скоростью v по радиусу диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Определить абсолютное ускорение точки в тот момент, когда она будет находиться на расстоянии r от центра диска.

Ответ: $w_a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v^2}$.

23.36. Шарик P движется со скоростью 120 *см/сек* от A к B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30 *см*. В этот момент угловая скорость диска равна 3 $сек^{-1}$, угловое замедление равно 8 $сек^{-2}$.



К задаче 23.36.

Ответ: $w_a = 1018$ $см/сек^2$.

23.37. Решить предыдущую задачу в предположении, что диск вращается вокруг диаметра, параллельного хорде.

Ответ: $w_a = 361{,}2$ $см/сек^2$.

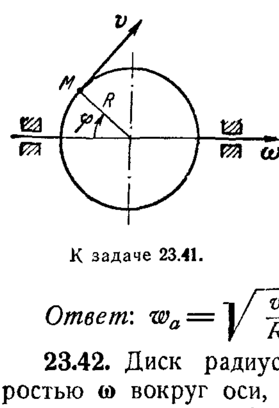
23.38. Решить задачу 23.36 при условии, что осью вращения диска является диаметр, перпендикулярный к хорде.

Ответ: $w_a = 720$ $см/сек^2$.

23.39. Корабль, находящийся на экваторе, идет курсом северо-восток. Скорость движения корабля равна 20 узлам. Найти абсолютную скорость и кориолисово ускорение корабля с учетом вращения Земли, считая радиус Земли равным $R = 6378$ *км* (наименование курса указывает, куда идет судно; узел $= 1\ \frac{\text{морская миля}}{\text{час}} = 1852$ *м/час*).

Ответ: $v_a = 470{,}4$ *м/сек*; $w_c = 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ $м/сек^2$.

23.40. В условиях предыдущей задачи найти абсолютное ускорение корабля, считая его скорость постоянной.



К задаче 23.41.

Ответ: $w_a = 347{,}766 \cdot 10^{-4}$ $м/сек^2$.

23.41. По ободу диска радиуса R, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω, движется с постоянной по модулю скоростью v точка M. Найти абсолютное ускорение точки M как функцию угла φ, составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.

Ответ: $w_a = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 R^2 \sin^2\varphi + 2\omega^2 v^2 (1 + \cos^2\varphi)}$.

23.42. Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска. По одному из диаметров диска движется точка M так, что ее расстояние от центра диска меняется по закону

$$OM = R \sin \omega t.$$

Найти абсолютную траекторию, абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Ответ: Если начальное положение точки M принять за начало координат, а ось y направить по начальному положению диаметра, по которому движется точка M, то уравнение траектории будет

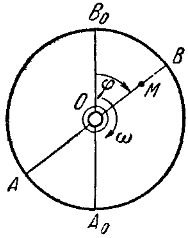
$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

(окружность половинного радиуса с центром на середине радиуса). Абсолютная скорость $v_a = \omega R$. Абсолютное ускорение $w_a = 2\omega^2 R$.

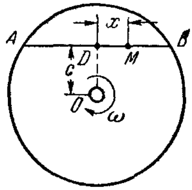
23.43. Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к плоскости диска. По хорде AB из ее середины D движется точка M с постоянной относительной скоростью u. Хорда отстоит от центра диска на расстоянии c.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в функции от расстояния $DM = x$.

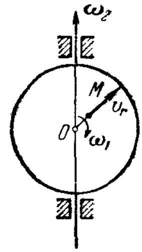
Ответ: $v_a = \sqrt{\omega^2 x^2 + (u + \omega c)^2}$; $w_a = \omega \sqrt{\omega^2 x^2 + (2u + \omega c)^2}$.



К задаче 23.42.



К задаче 23.43.



К задаче 23.44.

23.44. По подвижному радиусу диска от центра к ободу движется точка M с постоянной скоростью v_r. Подвижный радиус поворачивается в плоскости диска с постоянной угловой скоростью ω_1. Плоскость диска вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω_2.

Найти абсолютную скорость точки M, считая, что при $t = 0$ точка M находилась в центре диска, а подвижный радиус был направлен по оси вращения диска.

Ответ: $v_a = v_r \sqrt{1 + t^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t)}$.

23.45. Точка движется со скоростью 2 *м/сек* по окружности обода диска диаметром 4 *м*. Диск вращается в противоположном направлении, имея в данный момент угловую скорость 2 $сек^{-1}$ и угловое ускорение 4 $сек^{-2}$. Определить абсолютное ускорение точки.

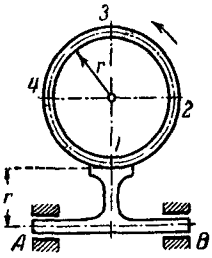
Ответ: $w_a = 8{,}24$ *м/сек*^{2} и направлено под углом 76° к радиусу.

23.46. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр, по закону $\varphi = \frac{2}{3} t^3$. Вдоль радиуса диска начинает двигаться точка по закону $s = 4t^2 - 10t + 8$ (*см*). Расстояние s измеряется от центра диска. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t = 1$ *сек*.

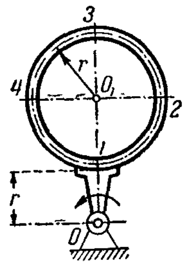
Ответ: $v_a = 4{,}47$ *см/сек*; $w_a = 0$.

23.47 (479). Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u. Вал AB вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от A к B. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках *1*, *2*, *3* и *4*.

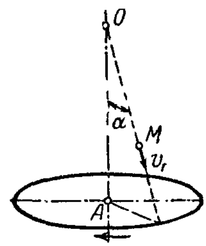
Ответ: $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$; $w_2 = w_4 = 2r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$.



К задаче 23.47.



К задаче 23.48.



К задаче 23.49.

23.48 (480). По условиям предыдущей задачи, измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца будет перпендикулярна к оси вала AB, определить те же величины в двух случаях:

1) переносное и относительное движения одного направления;
2) составляющие движения противоположны по направлению.

Ответ: 1) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} - 2u\omega$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} + 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2};$$

2) $w_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r} + 2u\omega$; $w_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r} - 2\omega u$;

$$w_2 = w_4 = \sqrt{\left(\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2\omega u\right)^2 + 4\omega^4 r^2}.$$

23.49 (481). Точка M равномерно движется по образующей кругового конуса с осью OA от вершины к основанию с относительной скоростью v_r; угол $MOA = \alpha$. В момент $t = 0$ расстояние $OM_0 = a$. Конус равномерно вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти абсолютное ускорение точки M.

Ответ: Ускорение лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и представляет собой гипотенузу треугольника с катетами

$$w_{en} = \omega^2 (a + v_r t) \sin\alpha \quad \text{и} \quad w_c = 2v_r\omega \sin\alpha.$$

23.50 (482). Определить в предыдущей задаче величину абсолютного ускорения точки M в момент $t = 1$ *сек* в том случае, когда она движется по образующей конуса с постоянным относительным ускорением w_r, направленным от вершины конуса к основанию, при следующих данных: $\alpha = 30°$, $a = 15$ *см*, $w_r = 10$ *см/сек*^{2}, $\omega = 1$ *сек*$^{-1}$, в момент $t = 0$ относительная скорость точки v_r равна нулю.

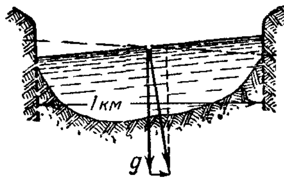
Ответ: $w = 14{,}14$ *см/сек*^{2}.

23.51 (483). Полагая в задаче 23.49, что конус вращается вокруг своей оси равноускоренно с угловым ускорением ε, определить величину абсолютного ускорения w точки M в момент $t=2$ *сек* при следующих данных: $\alpha=30°$, $a=18$ *см*, $v_r=3$ *см/сек*, $\varepsilon=0{,}5$ *сек*$^{-2}$, в момент $t=0$ угловая скорость ω равна нулю.

Ответ: $w=15$ *см/сек*^{2}.

23.52 (484). Река шириной 1 *км* течет с юга на север со скоростью 5 *км/час*. Определить кориолисово ускорение w_c частиц воды, находящихся на 60° северной широты. Определить затем, у какого берега вода выше и насколько, если известно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна к направлению вектора, составленного из ускорения силы тяжести g и вектора, равного и противоположного кориолисову ускорению.

Ответ: Кориолисово ускорение $w_c = 0{,}0175$ *см/сек*^{2} и направлено к западу. Вода выше у правого берега на 1,782 *см*.



К задаче 23.52.

23.53 (485). Магистраль южных железных дорог к северу от Мелитополя идет прямо по меридиану. Тепловоз движется со скоростью $v=90$ *км/час* на север; широта места $\varphi=47°$. Найти кориолисово ускорение тепловоза.

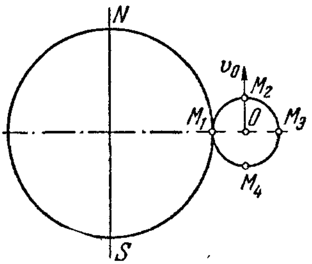
Ответ: $w_c=0{,}266$ *см/сек*^{2}.

23.54 (486). По железнодорожному пути, проложенному по параллели северной широты, движется тепловоз со скоростью $v_r=20$ *м/сек* с запада на восток. Найти кориолисово ускорение w_c тепловоза.

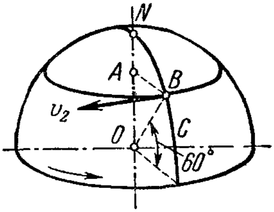
Ответ: $w_c=0{,}291$ *см/сек*^{2}.

23.55. Определить кориолисово ускорение точек M_1, M_2, M_3, M_4 колеса электровоза, движущегося по меридиану, в момент пересечения экватора. Скорость центра колеса электровоза $v_0=144$ *км/час*.

Ответ: Для точек M_1 и M_3 $w_c=0$;
для точек M_2 и M_4 $w_c=0{,}581$ *см/сек*^{2}.



К задаче 23.55.



К задаче 23.56.

23.56 (487). Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью $v_r=4$ *км/час*. Определить сумму проекций на касательную BC к соответствующему меридиану тех составляющих ускорений частиц воды, которые зависят от скорости течения. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ *м*.

Ответ: $w_{BC} = 1396 \cdot 10^{-5}$ *см/сек*^{2}.

23.57 (488). Река Нева течет с востока на запад по параллели 60° северной широты со скоростью $v_r = 4$ *км/час*. Найти составляющие абсолютного ускорения частицы воды. Радиус Земли $R = 64 \cdot 10^5$ *м*.

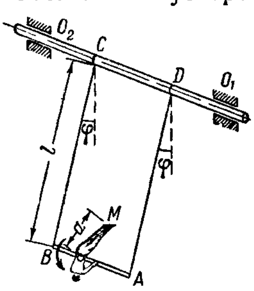
Ответ: $w_e = 1692 \cdot 10^{-3}$ *см/сек*^{2}; $w_r = 386 \cdot 10^{-7}$ *см/сек*^{2};
$w_c = 1616 \cdot 10^{-5}$ *см/сек*^{2}.

23.58 (489). Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если он вращается вокруг своей вертикальной оси, имея в данный момент угловую скорость $\omega = \pi/2$ *сек*$^{-1}$ при угловом ускорении $\varepsilon = 1$ *сек*$^{-2}$, угловая скорость расхождения шаров $\omega_1 = \pi/2$ *сек*$^{-1}$ при угловом ускорении $\varepsilon_1 = 0{,}4$ *сек*$^{-2}$. Длина рукояток шаров $l = 50$ *см*, расстояние между осями их привеса $2e = 10$ *см*, угол раствора регулятора в рассматриваемый момент $2\alpha = 90°$. Размерами шаров пренебречь, принимая шары за точки. (См. чертеж к задаче 22.14.)

Ответ: $w = 293{,}7$ *см/сек*^{2}.

23.59 (490). Найти абсолютное ускорение шаров центробежного регулятора Уатта, если после изменения нагрузки машины регулятор начал вращаться с угловой скоростью $\omega = \pi$ *сек*$^{-1}$, причем шары продолжают опускаться в данный момент со скоростью $v_r = 100$ *см/сек* и касательным ускорением $w_{r\tau} = 10$ *см/сек*^{2}. Угол раствора регулятора $2\alpha = 60°$; длина рукояток шаров $l = 50$ *см*; расстоянием $2e$ между их осями привеса можно пренебречь. Шары принять за точки. (См. чертеж к задаче 22.14.)

Ответ: $w = 671$ *см/сек*^{2}.



К задаче 23.60.

23.60 (491). Воздушная трапеция $ABCD$ совершает качания вокруг горизонтальной оси O_1O_2 по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине AB, вращается вокруг нее с относительной угловой скоростью $\omega = \mathrm{const}$; по условию дано: $BC = AD = l$. Определить абсолютное ускорение точки M на подошве гимнаста, отстоящей от перекладины AB на расстоянии a в момент $t = \pi/\omega$ *сек*.

В начальный момент гимнаст был расположен вертикально, головой вверх; трапеция $ABCD$ также занимала вертикальное нижнее положение.

Ответ: $w_M = \omega^2 [\varphi_0^2 (l - a) - a (2\varphi_0 + 1)]$ и направлено вертикально вверх, если выражение в скобках положительно.

23.61. Точка движется по радиусу диска согласно уравнению $r = ae^{kt}$, где a, k — постоянные величины. Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через центр, согласно уравнению $\varphi = kt$. Определить абсолютную скорость, абсолютное ускорение, касательное и нормальное ускорения точки.

Ответ: $v = ake^{kt}\sqrt{2}$; $\omega = 2ak^2e^{kt}$; $w_\tau = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$;
$w_n = ak^2e^{kt}\sqrt{2}$.

23.62. Точка M движется по поверхности Земли; курс движения k (угол между направлением на север и скоростью $\boldsymbol{v}$ точки относительно Земли), широта места в данный момент равна φ. Определить восточную w_{cx}, северную w_{cy} и вертикальную w_{cz} составляющие кориолисова ускорения точки.

Ответ: $w_{cx} = -2v\omega\cos k\sin\varphi$; $w_{cy} = 2v\omega\sin k\sin\varphi$; $w_{cz} = -2v\omega\sin k\cos\varphi$, где ω — угловая скорость вращения Земли.

23.63. В условиях предыдущей задачи определить величину и направление горизонтальной составляющей кориолисова ускорения точки M.

Ответ: $w_{cH} = 2v\omega\sin\varphi$; горизонтальная составляющая перпендикулярна к скорости $\boldsymbol{v}$ точки M относительно Земли и направлена влево от нее в северном полушарии и вправо в южном полушарии.

23.64. Высота точки M над поверхностью Земли равна h, широта места φ. Определить восточную w_{ex}, северную w_{ey} и вертикальную w_{ez} составляющие переносного ускорения точки, обусловленного вращением Земли (R — ее радиус, ω — угловая скорость).

Ответ: $w_{ex} = 0$; $w_{ey} = (R+h)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi$;
$w_{ez} = -(R+h)\omega^2\cos^2\varphi$.

23.65. Восточная, северная и вертикальная проекции скорости точки M относительно Земли соответственно равны v_E, v_N и v_h. Определить проекции относительного ускорения точки на координатные оси x, y, z (ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — по вертикали), если высота ее над поверхностью Земли в данный момент равна h, а широта места φ (R и ω — радиус и угловая скорость Земли).

Ответ: $w_{rx} = \dot{v}_E - \dfrac{v_E v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{v_E v_h}{R+h}$;
$w_{ry} = \dot{v}_N + \dfrac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{v_N v_h}{R+h}$; $w_{rz} = \dot{v}_h - \dfrac{v_E^2 + v_N^2}{R+h}$.

23.66. В условиях предыдущей задачи определить составляющие абсолютного ускорения точки M, движущейся вблизи Земли.

Ответ: $w_x = \dot{v}_E - \dfrac{v_E v_N}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{v_E v_h}{R+h} - 2(v_N\sin\varphi - v_h\cos\varphi)\omega$;

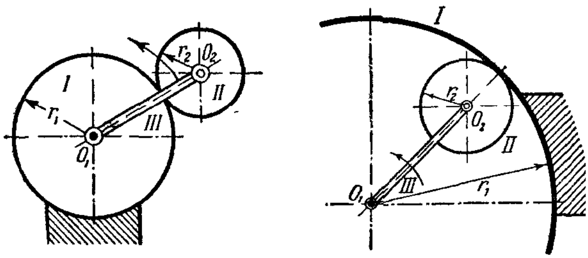
$$w_y = \dot{v}_N + \frac{v_E^2}{R+h}\operatorname{tg}\varphi + \frac{v_N v_h}{R+h} + (R+h)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + 2v_E\omega\sin\varphi;$$

$$w_z = \dot{v}_h - \frac{v_E^2 + v_N^2}{R+h} - (R+h)\omega^2\cos^2\varphi - 2v_E\omega\cos\varphi.$$

ГЛАВА VIII
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 24. Сложение плоских движений тела

24.1 (580). Кривошип *III* соединяет оси O_1 и O_2 двух зубчатых колес *I* и *II*, причем зацепление может быть или внешнее, или внутреннее, как указано на чертеже; колесо *I* остается неподвижным, а кривошип *III* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_3.



К задаче 24.1.

Зная радиусы колес r_1 и r_2, вычислить для колеса *II* его абсолютную угловую скорость ω_2 и его относительную угловую скорость ω_{23} по отношению к кривошипу.

Ответ: Внешнее зацепление:

$$\omega_2 = \omega_3 \frac{r_1 + r_2}{r_2}; \quad \omega_{23} = \omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$

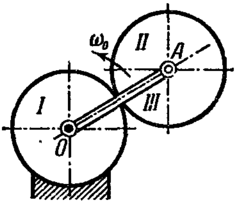
Внутреннее зацепление:

$$\omega_2 = -\omega_3 \frac{r_1 - r_2}{r_2}; \quad \omega_{23} = -\omega_3 \frac{r_1}{r_2}.$$

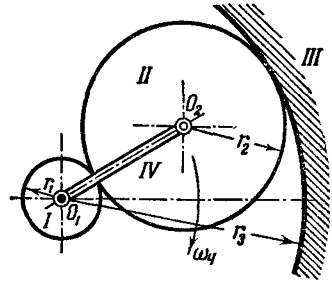
Знак минус указывает на то, что соответствующие тела вращаются в противоположные стороны.

24.2 (581). Найти относительную и абсолютную угловые скорости зубчатого колеса *II* радиуса r, катящегося по неподвижному зубчатому колесу *I* с тем же радиусом и приводящегося в движение кривошипом III, вращающимся вокруг оси неподвижного колеса O с угловой скоростью ω_0; движение кривошипа OA принять за переносное.

Ответ: $\omega_{23}=\omega_0$; $\omega_2=2\omega_0$.



К задаче 24.2.



К задаче 24.3.

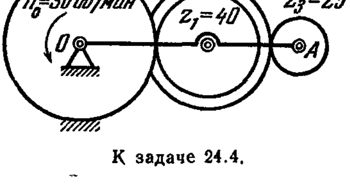
24.3 (582). Зацепление, приводящее в быстрое вращение точильный камень, устроено следующим образом: стержень IV посредством особой ручки приводится во вращение вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_4; на конце стержня O_2 находится палец, на который свободно надето колесо II радиуса r_2. При вращении ручки палец заставляет колесо II катиться без скольжения по наружному неподвижному кругу III радиуса r_3. При этом, благодаря трению, колесо II вращает без скольжения колесо I радиуса r_1, свободно насаженное на ось O_1 и неизменно связанное с осью точила.

По данному радиусу r_3 наружной неподвижной обоймы найти такое значение r_1, чтобы было $\omega_1/\omega_4=12$, т. е. чтобы точило вращалось в 12 раз быстрее приводящей его в движение ручки.

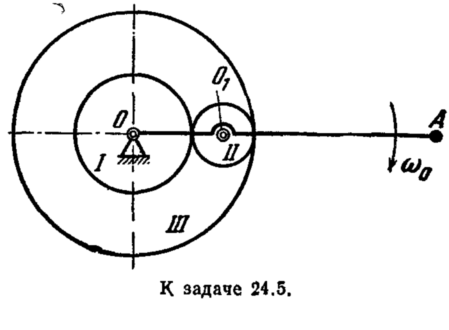
Ответ: $r_1=\frac{1}{11}r_3$.

24.4 (583). Найти число оборотов в минуту шестерни с числом зубцов $z_3=25$, если кривошип OA вращается вокруг оси O неподвижной шестерни (с числом зубцов $z_0=60$) с угловой скоростью, соответствующей $n_0=30$ *об/мин*, и несет на себе ось двойной шестерни с числами зубцов $z_1=40$, $z_2=50$.

Ответ: $n_3=n_0\left(1-\frac{z_0z_2}{z_1z_3}\right)=-60$ *об/мин* (в отношении знака минус см. ответ к задаче 24.1).



К задаче 24.4.



К задаче 24.5.

24.5 (584). В эпициклическом механизме, применяемом в конных приводах молотилок, водило OA и колесо I радиуса r_1 насажены на вал O свободно; ось O_1 колеса II укреплена на водиле, а колесо III радиуса r_3 может свободно вращаться вокруг оси O.

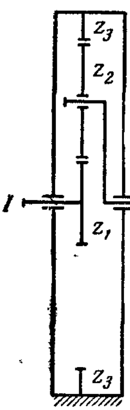
Определить угловую скорость ω_1 колеса I, если водилу OA сообщена угловая скорость ω_0, а колесу III от другого двигателя (тоже конного) сообщена угловая скорость ω_3 противоположного направления.

Ответ: $\omega_1 = \omega_0\left(1 + \frac{r_3}{r_1}\right) + \frac{r_3}{r_1}|\omega_3|$.

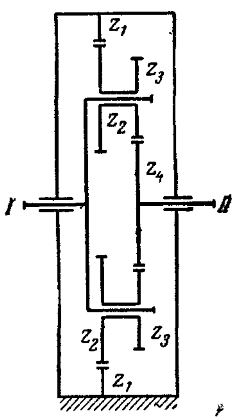
24.6 (585). Редуктор скоростей состоит из трех зубчатых колес. Первое колесо (число зубцов $z_1 = 20$) насажено на ведущий вал I, делающий $n_1 = 4500$ *об/мин*, второе ($z_2 = 25$) свободно насажено на ось, жестко связанную с ведомым валом II, третье колесо ($z_3 = 70$) с внутренним зацеплением неподвижно.

Найти число оборотов в минуту ведомого вала и бегающего колеса.

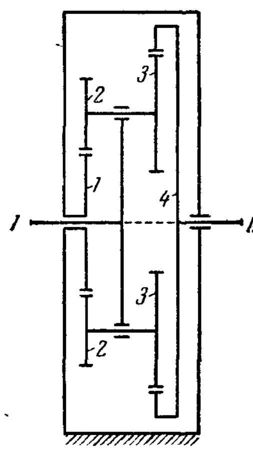
Ответ: $n_{II} = 1000$ *об/мин*; $n_2 = -1800$ *об/мин*.



К задаче 24.6.



К задаче 24.7.



К задаче 24.8.

24.7 (586). Ведущий вал I редуктора делает $n_1 = 1200$ *об/мин*. Найти число оборотов в минуту ведомого вала II, если неподвижное зубчатое колесо с внутренним зацеплением имеет $z_1 = 180$ зубцов, бегающие шестеренки, спаренные между собой, имеют $z_2 = 60$ и $z_3 = 40$ зубцов, шестеренка, закрепленная на ведомом валу, имеет $z_4 = 80$ зубцов.

Ответ: $n_{II} = 3000$ *об/мин*.

24.8 (587). Редуктор скоростей состоит из неподвижной шестеренки радиуса $r_1 = 40$ *см*, двух бегающих шестеренок радиусов $r_2 = 20$ *см* и $r_3 = 30$ *см*, спаренных между собой, и шестеренки с внутренним зацеплением радиуса $r_4 = 90$ *см*, сидящей на ведомом валу. Ведущий вал и кривошип, несущий оси бегающих шестеренок, делают $n_I = 1800$ *об/мин*.

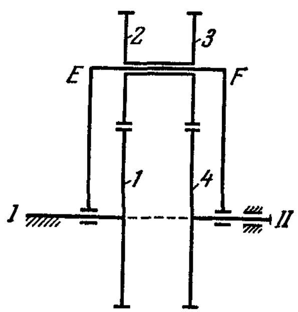
Найти число оборотов в минуту ведомого вала.

Ответ: $n_{II} = 3000$ *об/мин.*

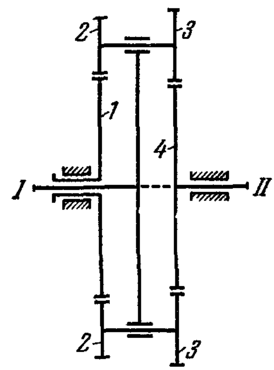
24.9. Редуктор скоростей с планетарной передачей состоит из неподвижного солнечного колеса *1*, жестко связанного с валом *I*, рамки, свободно вращающейся вокруг осей *I* и *II* с угловой скоростью Ω, двух шестеренок *2* и *3*, жестко связанных между собой и свободно насаженных на ось *EF*, вращающуюся вместе с рамкой, и ведомой шестерни *4*, жестко связанной с валом *II*.

Определить отношение угловой скорости вала *II* к угловой скорости рамки, если шестеренки имеют следующее число зубцов: $z_1 = 49$; $z_2 = 50$; $z_3 = 51$; $z_4 = 50$.

Ответ: $\frac{\omega_{II}}{\Omega} = \frac{1}{2500}$.



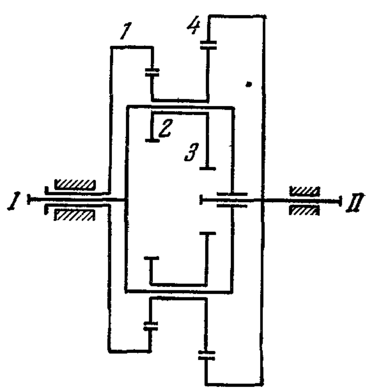
К задаче 24.9.



К задаче 24 10.

24.10 (588). Найти угловую скорость ω_{II} ведомого вала редуктора с дифференциальной передачей, если ведущий вал с кривошипом, несущим на себе передаточные шестеренки, спаренные между собой, вращается с угловой скоростью $\omega_I = 120$ *сек*$^{-1}$. Колесо *1* вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 180$ *сек*$^{-1}$ и имеет число зубцов $z_1 = 80$; бегающие колеса имеют числа зубцов: $z_2 = 20$, $z_3 = 40$, а колесо, сидящее на ведомом валу, имеет $z_4 = 60$ зубцов. Колесо *I* и ведущий вал вращаются в одном направлении.

Ответ: $\omega_{II} = 280$ *сек*$^{-1}$.



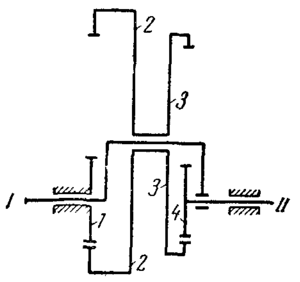
К задаче 24 11.

24.11 (589). Редуктор скоростей с дифференциальной передачей состоит из четырех зубчатых колес, из которых первое — с внутренним зацеплением — делает 160 *об/мин* и имеет $z_1 = 70$ зубцов; второе и третье спарены между собой и сидят на оси, вращающейся вокруг оси ведущего вала *I* вместе с последним, делая $n_I = 1200$ *об/мин*; числа зубцов: $z_2=20$, $z_3=30$; четвертое — с внутренним зацеплением — имеет $z_4=80$ зубцов и заклинено на ведомом валу.

Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если вал *I* и колесо *1* вращаются в противоположных направлениях.

Ответ: $n_{II}=585$ *об/мин.*

24.12 (590). Редуктор скоростей имеет неподвижную шестеренку *1*, спаренные между собой подвижные шестеренки *2* и *3* с внутренним зацеплением и шестерню *4*, заклиненную на ведомом валу.



К задаче 24.12.

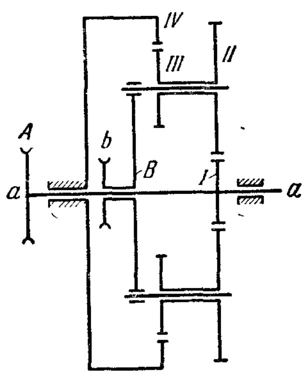
Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если числа зубцов равны $z_1=30$, $z_2=80$, $z_3=70$, $z_4=20$; ведущий вал вращается с угловой скоростью, соответствующей $n_I=1200$ *об/мин.*

Ответ: $n_{II}=-375$ *об/мин.*

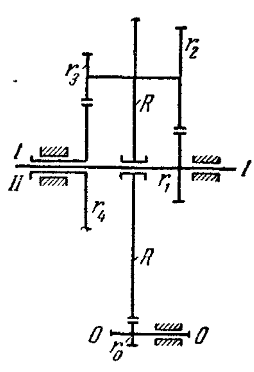
24.13 (591). В блоке системы «Триплекс» на валу *a—a* жестко насажен цепной блок *A*; на тот же вал свободно насажена втулка *b* с подъемной цепью и грузом, наглухо соединенная с рукояткой *B*. На каждый палец рукоятки свободно насажены две шестерни *II* и *III*, спаренные между собой, шестерни *II* сцеплены с шестерней *I*, заклиненной на валу *a—a*, шестеренки *III* сцеплены с неподвижным зубчатым колесом *IV*.

Определить отношение угловых скоростей вращения вала *a—a* и втулки *b*, если числа зубцов колес *I*, *II*, *III* и *IV* соответственно равны: $z_1=12$, $z_2=28$, $z_3=14$, $z_4=54$.

Ответ: $\frac{\omega_a}{\omega_b}=10$.



К задаче 24 13.



К задаче 24.14.

24.14 (592). В цилиндрическом дифференциале зубчатое колесо радиуса R свободно насажено на вал *I—I* и несет на себе шестерни радиусов r_2 и r_3, спаренные друг с другом. Колесо R приводится в движение шестеренкой радиуса r_0. Шестеренки радиусов r_2 и r_3

зацепляются с шестеренками радиусов r_1 и r_4, заклиненными соответственно на валах $I-I$ и II, из которых последний выполнен в виде втулки.

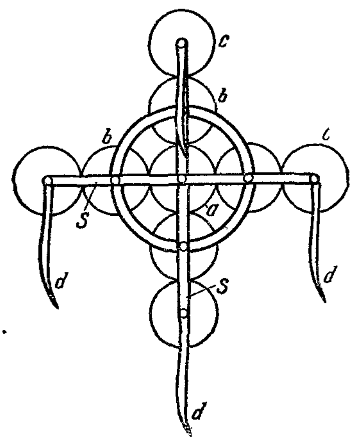
Найти угловую скорость вала II, если известны угловые скорости вращения n_1 и n_0 валов $I-I$ и $O-O$, причем эти валы вращаются в одну сторону.

Ответ: $n_2=\left(n_1+n_0\frac{r_0}{R}\right)\frac{r_1r_3}{r_2r_4}-n_0\frac{r_0}{R}$.

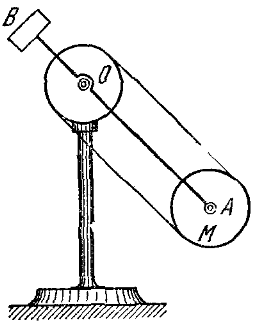
24.15 (593). В планетарном приводе картофелекопателя центральная шестеренка a, совершающая поступательное прямолинейное равномерное движение вместе со своей осью, соединена при помощи паразитных шестеренок b с подвижными шестеренками c, к втулкам которых прикреплены крылья d; оси шестеренок b и c насажены на водило S, вращающееся вокруг оси центральной шестеренки a с угловой скоростью ω_0.

Определить абсолютную угловую скорость шестеренок, а также характер движения крыльев, если радиусы всех шестеренок одинаковы.

Ответ: $\omega=0$; крылья совершают поступательное циклоидальное движение вместе с центрами шестеренок c.



К задаче 24.15.



К задаче 24.16.

24.16 (594). Кривошип OA с противовесом B вращается с угловой скоростью $\omega_0=\text{const}$ вокруг оси O неподвижной шестеренки и несет на конце A ось другой шестеренки того же размера, соединенной с цепью.

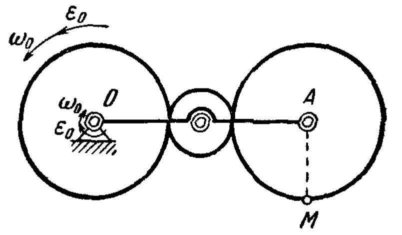
Определить угловую скорость и угловое ускорение подвижной шестеренки, а также скорость и ускорение произвольной ее точки M, если длина кривошипа $OA=l$.

Ответ: $\omega=0$, $\varepsilon=0$ — шестеренка совершает круговое поступательное движение вместе с центром A; $v_M=v_A=l\omega$; $w_M=w_A=l\omega_0^2$.

24.17 (595). В эпициклической передаче ведущая шестерня радиуса R вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 и угловым ускорением ε_0, кривошип длиной $3R$ вращается вокруг ее оси по часовой стрелке с той же угловой скоростью и тем же угловым ускорением.

Найти скорость и ускорение точки M ведомой шестерни радиуса R, лежащей на конце диаметра, перпендикулярного в данный момент к кривошипу.

Ответ: $v = R\omega_0 \sqrt{10}$; $w = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\omega_0^2\varepsilon_0}$.



К задаче 24.17.

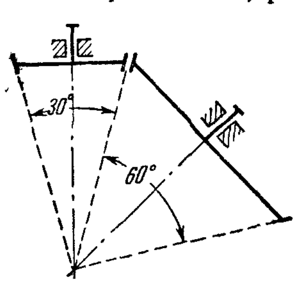
§ 25. Сложение пространственных движений тела

25.1 (611). Даны два конических зубчатых колеса, оси которых неподвижны, а соответственные углы равны α и β. Первое колесо вращается с угловой скоростью ω_1.

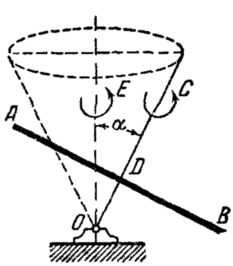
Определить угловую скорость ω_2 второго колеса и вычислить ее в том случае, когда $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\omega_1 = 10$ *об/мин.*

$$\textit{Ответ}:\ \omega_2 = \omega_1 \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 5{,}16\ \textit{об/мин.}$$

25.2 (612). Карусель представляет круглую площадку AB, которая вращается вокруг оси OC, проходящей через ее центр D, делая 6 *об/мин*, а ось OC вращается в том же направлении вокруг вертикали OE и делает 10 *об/мин.* Угол между осями $\alpha = 20°$, диаметр площадки AB равен 10 *м*, расстояние OD равно 2 *м*.



К задаче 25.1.



К задаче 25.2.

Определить скорость v точки B в тот момент, когда она занимает самое низкое положение.

Ответ: $v = 8{,}77$ *м/сек.*

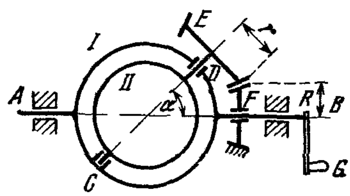
25.3 (613). Шаровая дробилка состоит из полого шара II (в котором находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси CD, на которой заклинено коническое зубчатое колесо E радиуса r. Ось CD сидит в подшипниках в раме I, составляющей одно целое с осью AB и приводящейся во вращение при помощи рукоятки G. Колесо E сцепляется с неподвижным колесом F радиуса R.

Определить абсолютную угловую скорость шаровой дробилки, если рукоятка вращается с угловой скоростью ω_0; угол между осями AB и CD равен α. Определить также абсолютное угловое ускорение шаровой дробилки, если угловая скорость рукоятки $\omega_0 = \text{const}$.

Ответ:

$$\omega_A = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\cos\alpha};$$

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r}\sin\alpha.$$

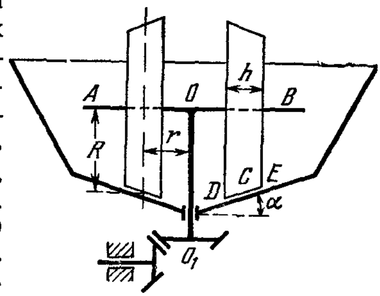


К задаче 25.2.

25.4 (614). Для растирания руды применяются бегуны в виде чугунных колес со стальными ободьями, катящимися по дну конической чаши. Бегуны вращаются вокруг горизонтальной оси AOB, которая в свою очередь вращается вокруг вертикальной оси OO_1, составляющей с осью AOB одно целое.

Найти абсолютные скорости точек D и E обода бегуна, принимая, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину C линии касания обода бегуна с дном чаши. Скорость вращения вокруг вертикальной оси $\omega_e = 1$ *сек*$^{-1}$, ширина бегуна $h = 50$ *см*. Средний радиус бегуна $R = 1$ *м*, средний радиус вращения $r = 60$ *см*, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

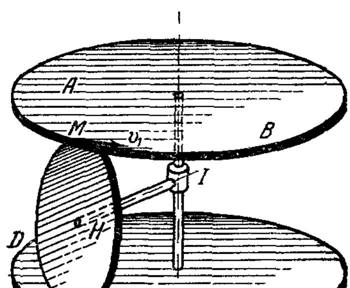
Ответ: $v_D = v_E = 28$ *см/сек*.



К задаче 25.4.

25.5 (615). Дифференциальная передача состоит из двух дисков AB и DE, центры которых находятся на их общей оси вращения; эти диски сжимают колесо MN, ось которого HI перпендикулярна к оси дисков.

Определить для колеса MN скорость v центра H и угловую скорость ω_r вращения вокруг оси HI, если скорости точек касания колеса с дисками равны: $v_1 = 3$ *м/сек*, $v_2 = 4$ *м/сек*, радиус колеса $r = 5$ *см*.



К задаче 25 5.

Ответ: $v = 0{,}5$ *м/сек*; $\omega_r = 70$ *сек*$^{-1}$.

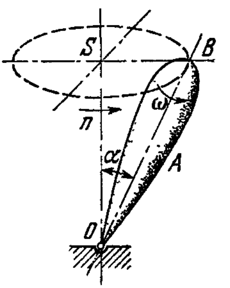
25.6 (616). Сохранив условия предыдущей задачи и зная длину $HI = \frac{1}{14}$ *м*, определить абсолютную угловую скорость и абсолютное угловое ускорение колеса MN.

Ответ: $\omega = \sqrt{4949}$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 490$ *сек*$^{-2}$.

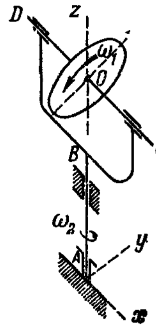
25.7 (617). Волчок A вращается относительно оси OB с постоянной угловой скоростью ω_1 *сек*$^{-1}$. Ось OB описывает равномерно конус. За 1 *мин* вершина волчка B делает n оборотов. Угол $BOS=\alpha$. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε волчка.

Ответ: $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2+2\omega_1\frac{\pi n}{30}\cos\alpha}$; $\varepsilon=\omega_1\frac{\pi n}{30}\sin\alpha$.

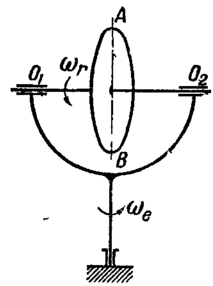
25.8 (618). Круглый диск вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг горизонтальной оси CD; одновременно ось CD вращается вокруг вертикальной оси AB, проходящей через центр O диска, с угловой скоростью ω_2.



К задаче 25.7.



К задаче 25.8.



К задаче 25.9.

Вычислить величину и направление мгновенной угловой скорости ω и мгновенного углового ускорения ε диска, если $\omega_1=5$ *сек*$^{-1}$, $\omega_2=3$ *сек*$^{-1}$.

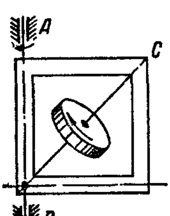
Ответ: $\omega=5{,}82$ *сек*$^{-1}$ и составляет углы $\alpha=30°41'$ и $\beta=59°19'$ с положительными направлениями осей x и z; $\varepsilon=15$ *сек*$^{-2}$ и направлено по оси y.

25.9 (619). Диск радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω_r вокруг горизонтальной оси O_1O_2, которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω_e вокруг вертикальной оси.

Найти скорости и ускорения точек A и B, лежащих на концах вертикального диаметра диска.

Ответ: $v_A=v_B=R\omega_r$;

$$w_A=w_B=R\omega_r\sqrt{4\omega_e^2+\omega_r^2}.$$



К задаче 25.10.

25.10 (620). Квадратная рама вращается вокруг оси AB, делая 2 *об/мин*. Вокруг оси BC, совпадающей с диагональю рамы, вращается диск, делая 2 *об/мин*.

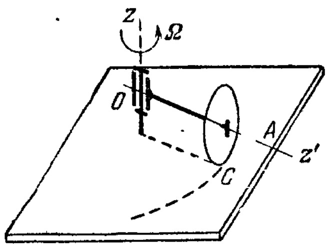
Определить абсолютную угловую скорость и угловое ускорение диска.

Ответ: $\omega=0{,}39$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon=0{,}031$ *сек*$^{-2}$.

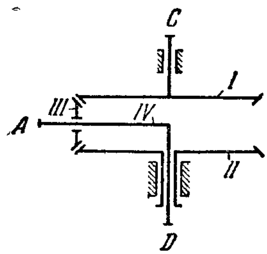
25.11 (621). Ось мельничного бегуна OA вращается равномерно вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью Ω. Длина оси $OA=R$, радиус бегуна $AC=r$.

Считая, что в данный момент точка C бегуна имеет скорость, равную нулю, определить угловую скорость бегуна ω, направление мгновенной оси, подвижный и неподвижный аксоиды.

Ответ: $\omega = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\Omega$; мгновенная ось — прямая OC; аксоиды — конусы с вершиной в точке O, подвижный — с углом $z'OC$ при вершине, равным $\operatorname{arctg}\frac{r}{R}$, неподвижный — с углом zOC, равным $\pi - \operatorname{arctg}\frac{R}{r}$.



К задаче 25.11.



К задаче 25.12.

25.12 (622). Дифференциальная передача состоит из конического зубчатого колеса III (сателлита), насаженного свободно на кривошип IV, который может вращаться вокруг неподвижной оси CD. Сателлит соединен с коническими зубчатыми колесами I и II, вращающимися вокруг той же оси CD с угловыми скоростями $\omega_1 = 5$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_2 = 3$ *сек*$^{-1}$, причем вращения происходят в одну сторону. Радиус сателлита $r = 2$ *см*, а радиусы колес I и II одинаковы и равны $R = 7$ *см*.

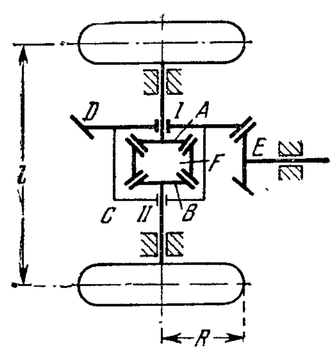
Определить угловую скорость ω_4 кривошипа IV, угловую скорость ω_{34} сателлита по отношению к кривошипу и скорость точки A.

Ответ: $v_A = 28$ *см/сек*; $\omega_4 = 4$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{34} = 3{,}5$ *сек*$^{-1}$.

25.13 (623). В дифференциальном механизме, рассмотренном в предыдущей задаче, конические зубчатые колеса I и II вращаются в разные стороны с угловыми скоростями $\omega_1 = 7$ *сек*$^{-1}$, $\omega_2 = 3$ *сек*$^{-1}$.

Определить v_A, ω_4 и ω_{34}, если $R = 5$ *см*, $r = 2{,}5$ *см*.

Ответ: $v_A = 10$ *см/сек*; $\omega_4 = 2$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{34} = 10$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 25.14.

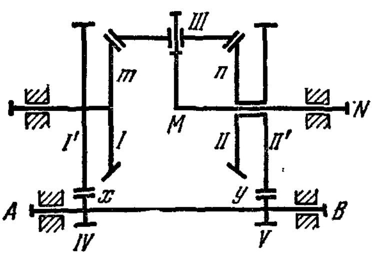
25.14 (624). При движении автомобиля по закругленному пути внешние колеса автомобиля, проходя больший путь, должны вращаться быстрее внутренних колес, проходящих меньший путь. Во избежание поломки задней ведущей оси автомобиля применяется зубчатая передача, называемая дифференциальной и имеющая следующее устройство.

Задняя ось, несущая два колеса, делается из двух отдельных частей I и II, на концах которых наглухо насажены два одинаковых зубчатых колеса A и B. На этих частях вала в подшипниках вращается коробка C с коническим колесом D, наглухо с ней соединенным. Коробка получает вращение от главного (продольного) вала, приводимого в движение мотором, через посредство зубчатки E.

Вращение коробки C передается зубчатым колесам A и B при помощи двух конических шестеренок F (сателлитов), свободно вращающихся вокруг осей, укрепленных в коробке перпендикулярно к задней оси $I-II$ автомобиля.

Найти угловые скорости задних колес автомобиля в зависимости от угловой скорости вращения коробки C и угловую скорость ω_r сателлитов по отношению к коробке, если автомобиль движется со скоростью $v=36$ *км/час* по закруглению среднего радиуса $\rho=5$ *м*; радиусы колес задней оси $R=0{,}5$ *м*; расстояние между ними $l=2$ *м*. Радиусы зубчатых колес A и B вдвое больше радиусов сателлитов: $R_0=2r$.

Ответ: $\omega_1=24$ *сек*$^{-1}$; $\omega_2=16$ *сек*$^{-1}$; $\omega_r=8$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 25.15.

25.15 (625). При применении дифференциального зацепления для получения назначенного отношения чисел оборотов осей AB и MN к коническим колесам I и II дифференциального зацепления присоединяют наглухо цилиндрические зубчатые колеса I' и II', которые сцепляются с шестеренками IV и V, насаженными наглухо на ось AB.

Найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов AB и MN, если радиусы колес I и II одинаковы, числа зубцов колес I', II', IV и V соответственно равны m, n, x, y.

Ответ: $\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}\right)$.

25.16 (626). В дифференциальной передаче, рассмотренной в предыдущей задаче, между зубчатыми колесами I' и IV введено паразитное колесо с неподвижной осью вращения.

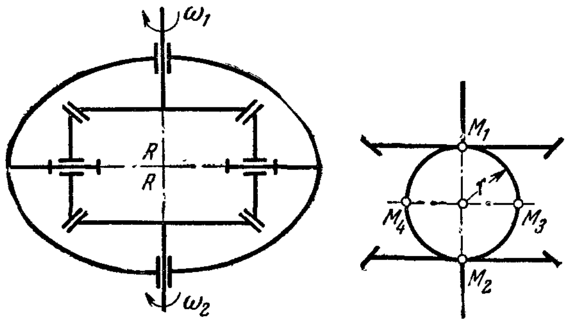
Требуется найти соотношение между угловыми скоростями ω_0 и ω валов AB и MN, сохраняя все остальные условия задачи.

Ответ: $\dfrac{\omega}{\omega_0}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m}-\dfrac{y}{n}\right)$.

25.17 (627). Дифференциальная передача, соединяющая обе половины задней оси автомобиля, состоит из двух шестеренок с одинаковыми радиусами $R=6$ *см*, насаженных на полуоси, вращающиеся при движении автомобиля на повороте с разными, но постоянными по величине угловыми скоростями $\omega_1=6$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_2=4$ *сек*$^{-1}$ одинакового направления. Между шестеренками зажат бегущий сателлит радиуса $r=3$ *см*, свободно насаженный на ось. Ось сателлита жестко заделана в кожухе и может вращаться вместе с ним вокруг задней оси автомобиля.

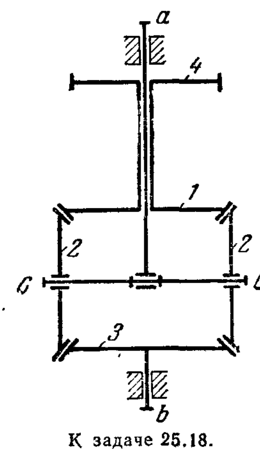
Найти относительно корпуса автомобиля ускорения четырех точек M_1, M_2, M_3 и M_4 сателлита, лежащих на концах двух диаметров, как показано на чертеже.

Ответ: $w_1 = 210{,}4$ *см/сек*^{2}; $w_2 = 90{,}8$ *см/сек*^{2}; $w_3 = w_4 = 173{,}4$ *см/сек*^{2}.



К задаче 25.17.

25.18 (628). В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* сидит на ведущем валу *a* свободно, вместе со скрепленным с ним жестко колесом *1*. На конце ведущего вала *a* сидит головка, несущая ось *CC* сателлитов *2—2*. Определить угловую скорость ведомого вала *b* с наглухо заклиненным колесом *3* в пяти случаях:



К задаче 25.18.

1) Угловая скорость ведущего вала ω_a, угловая скорость ускорительного колеса $\omega_4 = 0$.

2) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в ту же сторону, что и ведущий вал, с угловой скоростью ω_4.

3) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну и ту же сторону с равными угловыми скоростями $\omega_4 = \omega_a$.

4) Ускорительное колесо и ведущий вал вращаются в одну и ту же сторону, причем $\omega_4 = 2\omega_a$.

5) Угловая скорость ведущего вала ω_a, ускорительное колесо вращается в противоположную сторону с угловой скоростью ω_4.

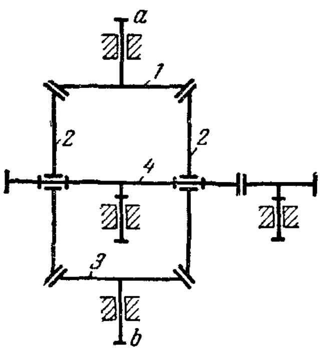
Ответ: 1) $\omega_b = 2\omega_a$; 2) $\omega_b = 2\omega_a - \omega_4$;
3) $\omega_b = \omega_a$; 4) $\omega_b = 0$; 5) $\omega_b = 2\omega_a + \omega_4$.

25.19 (629). В дифференциале зуборезного станка, описанном в предыдущей задаче, угловая скорость ведущего вала $\omega_a = 60$ *об/мин*.

Определить, какова должна быть угловая скорость ускорительного колеса, чтобы ведомый вал был неподвижен.

Ответ: $\omega_4 = 120$ *об/мин*.

25.20 (630). В дифференциале зуборезного станка ускорительное колесо *4* несет на себе ось сателлитов. Угловая скорость ведущего вала ω_a. Определить угловую скорость ведомого вала в следующих трех случаях:



К задаче 25.20.

1) Ускорительное колесо *4* вращается в сторону ведущего вала с угловой скоростью $\omega_4 = \omega_a$.

2) То же, но вращения ведущего вала и ускорительного колеса противоположны по направлению.

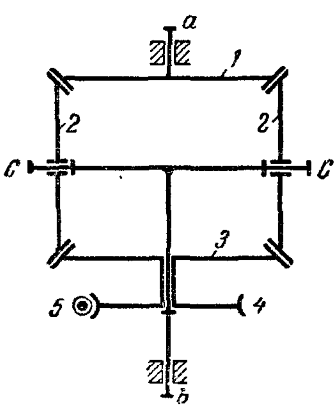
3) Ускорительное колесо и ось сателлитов неподвижны.

Ответ: 1) $\omega_b = \omega_a$; 2) $\omega_b = -3\omega_a$; 3) $\omega_b = -\omega_a$.

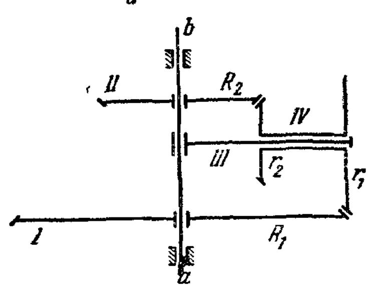
25.21 (631). В станочном дифференциале коническое колесо *1* заклинено на ведущем валу *a*, на конце ведомого вала *b* сидит головка, несущая ось *CC* сателлитов *2—2*. На том же валу свободно сидит коническое колесо *3*, составляющее одно целое с червячным колесом *4*.

Определить передаточное число при неподвижном червяке *5*, а следовательно, и колесах *4* и *3*, если все конические колеса одного радиуса.

Ответ: $\frac{\omega_b}{\omega_a} = 0{,}5$.



К задаче 25.21.



К задаче 25.22.

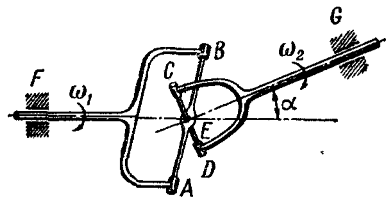
25.22 (632). Двойной дифференциал состоит из кривошипа *III*, который может вращаться вокруг неподвижной оси *ab*. На кривошип свободно насажен сателлит *IV*, состоящий из двух наглухо скрепленных между собой конических зубчатых колес радиусов $r_1 = 5$ *см* и $r_2 = 2$ *см*. Колеса эти соединены с двумя коническими зубчатыми колесами *I* и *II* радиусов $R_1 = 10$ *см* и $R_2 = 5$ *см*, вращающимися вокруг оси *ab*, но с кривошипом не связанными. Угловые скорости колес I и II соответственно равны: $\omega_1 = 4{,}5$ *сек*$^{-1}$ и $\omega_2 = 9$ *сек*$^{-1}$. Определить угловую скорость кривошипа ω_3 и угловую скорость сателлита по отношению к кривошипу ω_{43}, если оба колеса вращаются в одну и ту же сторону.

Ответ: $\omega_3 = 7$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{43} = 5$ *сек*$^{-1}$.

25.23 (633). Решить предыдущую задачу, предполагая, что зубчатые колеса I и II вращаются в противоположные стороны.

Ответ: $\omega_3 = 3$ *сек*$^{-1}$; $\omega_{43} = 15$ *сек*$^{-1}$.

25.24 (634). Крестовина $ABCD$ универсального шарнира Кардана — Гука ($AB \perp CD$), употребляемого при передаче вращения между пересекающимися осями, вращается вокруг неподвижной точки E.



К задаче 25.24.

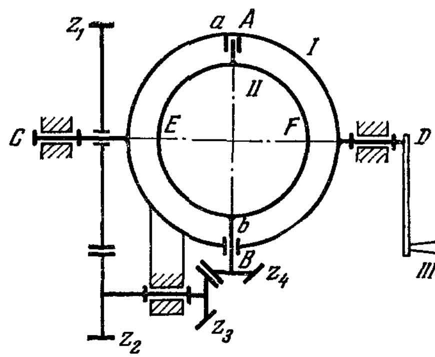
Найти отношение ω_1/ω_2 для валов, связанных крестовиной, в двух случаях:

1) когда плоскость вилки ABF горизонтальна, а плоскость вилки CDG вертикальна;

2) когда плоскость вилки ABF вертикальна, а плоскость вилки CDG ей перпендикулярна. *Угол между осями валов постоянный:* $\alpha = 60°$.

Ответ: 1) $\omega_1/\omega_2 = 1/\cos\alpha = 2$; 2) $\omega_1/\omega_2 = \cos\alpha = 0{,}5$.

25.25 (635). Шаровая дробилка состоит из полого шара диаметром $d = 10$ *см*, сидящего на оси AB, на которой заклинено колесо с числом зубцов $z_4 = 28$. Ось AB закреплена во вращающейся раме I в подшипниках a и b. Рама I составляет одно целое с осью CD, приводящейся во вращение при помощи рукоятки III. Вращение шаровой дробилки вокруг оси AB осуществляется при помощи зубчатых колес с числами зубцов $z_1 = 80$, $z_2 = 43$, $z_3 = 28$, причем первое из них неподвижно.



К задаче 25.25.

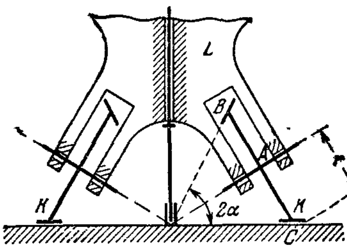
Определить абсолютную угловую скорость, угловое ускорение дробилки и скорости и ускорения двух точек E и F, лежащих в рассматриваемый момент времени на оси CD, если рукоятку вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}3$ *сек*$^{-1}$.

Ответ: $\omega_a = 9{,}08$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 34{,}4$ *сек*$^{-2}$; $v_E = v_F = 40$ *см/сек*; $w_E = w_F = 468$ *см/сек*^{2}.

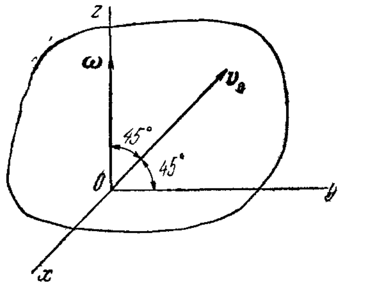
25.26 (636). Поворотная часть моста поставлена на катки в виде конических зубчатых колес K, оси которых закреплены в кольцевой раме L наклонно, так что их продолжения пересекаются в геометрическом центре плоской опорной шестерни, по которой перекатываются опорные зубчатые колеса K.

Найти угловую скорость и угловое ускорение конического катка, скорости и ускорения точек A, B, C (A — центр конического зубчатого колеса BAC), если радиус основания катка $r = 25$ *см*, угол при вершине 2α, причем $\cos\alpha = 84/85$. Угловая скорость вращения кольцевой рамы вокруг вертикальной оси $\omega_0 = \text{const} = 0,1$ *сек*$^{-1}$.

Ответ: $\omega = 0,646$ *сек*$^{-1}$; $\varepsilon = 0,0646$ *сек*$^{-2}$; $v_A = 15,92$ *см/сек*, $v_B = 31,84$ *см/сек*, $v_C = 0$; $w_A = 1,595$ *см/сек*^{2}, $w_B = 11$ *см/сек*^{2}, $w_C = 10,54$ *см/сек*^{2}.



К задаче 25.26



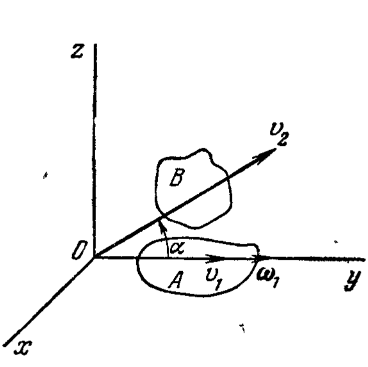
К задаче 25.27.

25.27. Тело движется в пространстве, причем вектор угловой скорости тела равен $\boldsymbol{\omega}$ и направлен в данный момент по оси z. Скорость точки O тела равна $\boldsymbol{v}_0$ и образует с осями y, z одинаковые углы, равные 45°. Найти точку твердого тела, скорость которой будет наименьшей, и определить величину этой скорости.

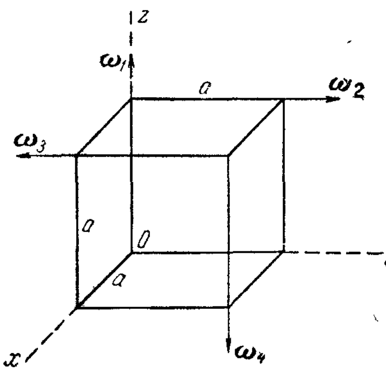
Ответ: $v_{\min} = v_0 \cos 45°$. Такова скорость точек мгновенной винтовой оси, параллельной оси z, проходящей через точку с координатами

$$x = -\frac{v_0 \cos 45°}{\omega}, \quad y = 0.$$

25.28. Тело A вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг оси y и движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}_1$ вдоль той же оси. Тело B



К задаче 25.28.



К задаче 25.29.

движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}_2$, образующей угол α с осью y. При каком соотношении v_1/v_2 движение тела A по отношению к телу B

будет чистым вращением? Где при этом будет лежать ось вращения?

Ответ: При $v_1/v_2 = \cos\alpha$ относительное движение тела A по отношению к телу B будет чистым вращением вокруг оси, параллельной y и отстоящей от нее на расстоянии

$$l = \frac{v_2 \sin\alpha}{\omega_1},$$

отложенном по перпендикуляру, восставленному к оси y и составляющей поступательной скорости $v_2 \sin\alpha$.

25.29. Твердое тело, имеющее форму куба со стороной $a = 2$ *м*, участвует одновременно в четырех вращениях с угловыми скоростями

$$\omega_1 = \omega_4 = 6 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_2 = \omega_3 = 4 \text{ сек}^{-1}.$$

Определить результирующее движение тела.

Ответ: Тело движется поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}$, проекции которой равны $v_x = -12$ *см/сек*, $v_y = 12$ *см/сек*, $v_z = -8$ *см/сек*.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ
ДИНАМИКА

ГЛАВА IX
ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 26. Определение сил по заданному движению

26.1 (637). В шахте опускается равноускоренно лифт весом 280 *кГ*; в первые 10 *сек* он проходит 35 *м*.

Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

Ответ: 260 *кГ*.

26.2 (638). Горизонтальная платформа, на которой лежит груз весом 10 *н*, опускается вертикально вниз с ускорением 4 *м/сек*².

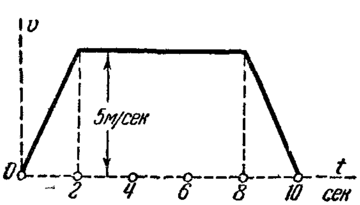
Найти давление, производимое грузом на платформу во время их совместного спуска.

Ответ: 5,92 *н*.

26.3 (639). К телу весом $P = 3$ *н*, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой держат в руке.

Какое ускорение надо сообщить руке, поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении $T = 4{,}2$ *н*?

Ответ: $w = 3{,}92$ *м/сек*².



К задаче 26.4.

26.4 (640). При подъеме клетки лифта график скоростей имеет вид, изображенный на чертеже. Вес клетки равен 480 *кГ*.

Определить натяжения T_1, T_2, T_3 каната, к которому привешена клетка, в течение трех промежутков времени: 1) от $t = 0$ до $t = 2$ *сек*, 2) от $t = 2$ *сек* до $t = 8$ *сек* и 3) от $t = 8$ *сек* до $t = 10$ *сек*.

Ответ: $T_1 = 602{,}4$ *кГ*; $T_2 = 480$ *кГ*; $T_3 = 357{,}6$ *кГ*.

26.5 (641). Камень весом 3 *н*, привязанный к нити длиной 1 *м*, описывает окружность в вертикальной плоскости.

Определить наименьшую угловую скорость ω камня, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 *н*.

Ответ: $\omega = 4{,}44$ *сек*$^{-1}$.

26.6 (642). На криволинейных участках железнодорожного пути возвышают наружный рельс над внутренним для того, чтобы давление проходящего поезда на рельсы было направлено перпендикулярно к полотну дороги.

Определить величину h возвышения наружного рельса над внутренним при следующих данных: радиус закругления 400 *м*, скорость поезда 10 *м/сек*, расстояние между рельсами 1,6 *м*.

Ответ: $h = 4{,}1$ *см*.

26.7 (643). В вагоне поезда, идущего по кривой со скоростью 72 *км/час*, производится взвешивание некоторого груза на пружинных весах; вес груза равен 5 *кГ*, весы же показывают 5,1 *кГ*.

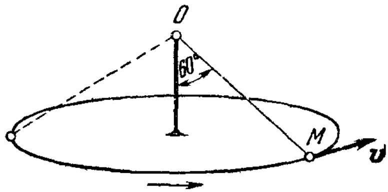
Определить радиус закругления пути, пренебрегая массой весов.

Ответ: 202 *м*.

26.8 (644). Гиря весом 2 *н* подвешена к концу нити длиной 1 *м*; вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 *м/сек*.

Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

Ответ: 7,1 *н*.



К задаче 26.9.

26.9 (645). Груз M весом 1 *н*, подвешенный на нити длиной 30 *см* в неподвижной точке O, представляет собой конический маятник, т. е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60°.

Определить скорость v груза и натяжение T нити.

Ответ: $v = 210$ *см/сек*; $T = 2$ *н*.

26.10 (646). Автомобиль весом $Q = 1000$ *кГ* движется по выпуклому мосту со скоростью $v = 10$ *м/сек*; радиус кривизны в середине моста $\rho = 50$ *м*.

Определить давление автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

Ответ: 796 *кГ*.

26.11 (647). В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. Вес тела равен 5 *кГ*, натяжение пружины (показание пружинных весов) равно 5,1 *кГ*.

Найти ускорение кабины.

Ответ: 0,196 *м/сек*^{2}.

26.12 (648). Кузов трамвайного вагона вместе с нагрузкой весит $Q_1 = 10$ *т*, тележка с колесами имеет вес $Q_2 = 1$ *т*.

Определить наибольшее и наименьшее давление вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания согласно закону $x = 2 \sin 10t$ *см*.

Ответ: $N_1 = 13{,}04$ *т*; $N_2 = 8{,}96$ *т*.

26.13 (649). Поршень двигателя внутреннего сгорания совершает горизонтальные колебания согласно закону $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ *см*, где r — длина кривошипа, l — длина шатуна, ω — постоянная по величине угловая скорость вала.

Определить наибольшее значение силы, действующей на поршень, если вес последнего Q.

Ответ: $P=\frac{Q}{g}r\omega^2\left(1+\frac{r}{l}\right)$.

26.14 (650). Решето рудообогатительного грохота совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой $a=5$ *см*.

Найти наименьшую частоту k колебаний решета, при которой куски руды, лежащие на нем, будут отделяться от него и подбрасываться вверх.

Ответ: $k=14$ *сек*$^{-1}$.

26.15 (651). Тело весом 20 *н* совершает колебательное движение по горизонтальной прямой. Расстояние тела от неподвижной точки определяется уравнением $s=10\sin\frac{\pi}{2}t$ *м*. Найти зависимость между силой P, действующей на тело, и расстоянием s, а также наибольшую величину этой силы.

Ответ: $P=-5{,}03\,s$ *н*; $P_{\max}=50{,}3$ *н*.

26.16 (652). Движение материальной точки весом 2 *н* выражается уравнениями $x=3\cos 2\pi t$ *см*, $y=4\sin\pi t$ *см*, где t выражено в секундах. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

Ответ: $X=-0{,}08x$ *н*; $Y=-0{,}02y$ *н*.

26.17 (653). Шарик, масса которого равна 1 *г*, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха, так что движение шарика выражается уравнением $x=490t-$ $-245(1-e^{-2t})$, где x — в сантиметрах, t — в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить в динах силу R сопротивления воздуха, испытываемого шариком, в зависимости от его скорости v, приняв $g=980$ *см/сек*^{2}.

Ответ: $R=2mv\equiv 2v$.

26.18 (654). Стол строгального станка весит $Q_1=700$ *кГ*, обрабатываемый предмет $Q_2=300$ *кГ*, скорость хода стола $v=0{,}5$ *м/сек*, время разгона $t=0{,}5$ *сек*. Определить силу, необходимую для разгона (считая движение равноускоренным) и для дальнейшего равномерного движения стола, если коэффициент трения при разгоне $f_1=0{,}14$, а при равномерном движении $f_2=0{,}07$.

Ответ: $P_1=242$ *кГ*; $P_2=70$ *кГ*.

26.19 (655). Груженая вагонетка весом $Q=700$ *кГ* опускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha=15^\circ$, имея скорость $v=$ $=1{,}6$ *м/сек*. Определить натяжение каната при равномерном спуске и при остановке вагонетки, если время торможения $t=4$ *сек*, общий коэффициент сопротивления движению $f=0{,}015$. При торможении вагонетка движется равнозамедленно.

Ответ: $S_1=171{,}5$ *кГ*; $S_2=200{,}1$ *кГ*.

26.20 (656). Груз весом $Q=10$ *т* перемещается вместе с тележкой вдоль горизонтальной фермы мостового крана со скоростью $v=1$ *м/сек*; расстояние центра тяжести груза до точки привеса $l=5$ *м*. При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнет качаться около точки привеса. Определить наибольшее натяжение каната.

Ответ: $S = 10{,}2$ *т*.

26.21 (657). Определить отклонение α от вертикали и давление N вагона на рельс подвесной дороги при движении вагона по закруглению радиуса $R = 30$ *м* со скоростью $v = 10$ *м/сек*; вес вагона $Q = 1{,}5$ *т*.

Ответ: $\alpha = 18°47'$; $N = 1{,}585$ *т*.

26.22 (658). Поезд без локомотива весит 200 *т*. Двигаясь по горизонтальному пути равноускоренно, он через 60 *сек* после начала движения приобрел скорость 54 *км/час*. Определить натяжение стяжки между локомотивом и поездом во время движения, если сила трения равна 0,005 веса поезда.

Ответ: 6,1 *т*.

26.23 (659). Спортивный самолет весом в 2000 *кГ* летит горизонтально с ускорением 5 *м/сек*^{2}, имея в данный момент скорость 200 *м/сек*. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости в 1 *м/сек* равно 0,05 *кГ*. Считая силу сопротивления направленной в сторону, обратную скорости, определить силу тяги винта, если она составляет угол в 10° с направлением полета.

Ответ: $F = 3080$ *кГ*.

26.24 (660). Грузовой автомобиль весом 6 *т* въезжает на паром со скоростью 21,6 *км/час*. Заторможенный с момента вступления на паром автомобиль остановился, пройдя 10 *м*. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти натяжение каждого из двух канатов, которыми паром привязан к берегу. При решении задачи пренебречь массой и ускорением парома.

Ответ: Натяжение каждого каната 550 *кГ*.

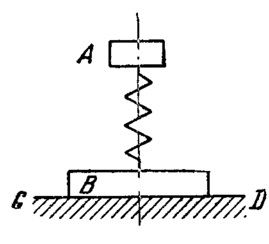
26.25 (661). Грузы A и B весом

$$P_A = 20 \text{ н}$$

и

$$P_B = 40 \text{ н}$$

соединены между собой пружиной, как показано на чертеже. Груз A совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 *см* и периодом 0,25 *сек*. Вычислить наибольшее и наименьшее давление грузов A и B на опорную поверхность CD.



К задаче 26.25.

Ответ: $R_{max} = 72{,}8$ *н*; $R_{min} = 47{,}2$ *н*.

26.26 (662). Груз весом $P = 5$ *кГ* подвешен к пружине и совершает гармонические колебания. Пренебрегая сопротивлениями, определить силу c, которую надо приложить к пружине, чтобы удлинить ее на 1 *см*, если груз P совершил шесть полных колебаний в 2,1 *сек*.

Ответ: $c = 1{,}65$ *кГ/см*.

26.27 (663). Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 1000 *км/час*, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиусом $R=600$ *м* в вертикальной плоскости. Вес летчика 80 *кГ*. С какой наибольшей силой летчик прижимается к сиденью?

Ответ: 1130 *кГ*.

26.28 (664). Чему равен вес 1 *кГ* на Луне, если на ней ускорение силы притяжения $j=1{,}7$ *м/сек*^{2}?

Чему равен вес 1 *кГ* на Солнце, если ускорение силы притяжения на нем равно $j=270$ *м/сек*^{2}?

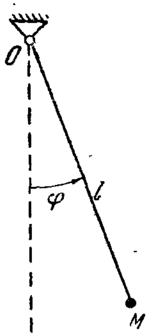
Ответ: Показания пружинных весов:

на Луне . . . . 0,1735 *кГ*,

на Солнце . . . 27,5 *кГ*.

26.29 (665). При какой скорости тепловоза будет вытекать масло из масленки, закрепленной на конце шатуна для смазки шарнирного соединения шатуна с кривошипом, если крышка масленки осталась открытой? Диаметр колеса тепловоза $D=1020$ *мм*; длина кривошипа, вращающегося вместе с колесом, $r=250$ *мм*; движение тепловоза прямолинейное и равномерное по горизонтальному пути. Шатун с масленкой совершают поступательное движение.

Ответ: $v \geqslant 11{,}4$ *км/час*.



К задаче 26.30.

26.30 (666). Груз M весом 10 *н* подвешен к тросу длиной $l=2$ *м* и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\sin 2\pi t,$$

где φ — угол отклонения троса от вертикали в радианах, t — время в секундах.

Определить натяжения T_1 и T_2 троса в наинизшем и наивысшем положении груза.

Ответ: $T_1=32{,}1$ *н*; $T_2=8{,}65$ *н*.

26.31 (667). Велосипедист описывает кривую радиуса 10 *м* со скоростью 5 *м/сек*. Найти угол наклона срединной плоскости велосипеда к вертикали, а также тот наименьший коэффициент трения между шинами велосипеда и полотном дороги, при котором будет обеспечена устойчивость велосипеда.

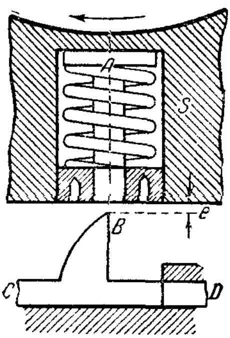
Ответ: 14°20′; 0,255.

26.32 (668). Велосипедный трек на кривых участках пути имеет виражи, профиль которых в поперечном сечении представляет прямую, наклонную к горизонту, так что на кривых участках внешний край трека выше внутреннего. С какой наименьшей и с какой наибольшей скоростью можно ехать по виражу, имеющему радиус R и угол наклона к горизонту α, если коэффициент трения резиновых шин о грунт трека равен f?

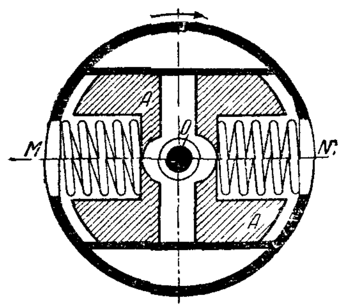
Ответ: $v_{\min}=\sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha-f}{1+f\operatorname{tg}\alpha}}$; $v_{\max}=\sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha+f}{1-f\operatorname{tg}\alpha}}$.

26.33 (669). Во избежание несчастных случаев, происходящих от разрыва маховиков, устраивается следующее приспособление. В ободе маховика помещается тело A, удерживаемое внутри его пружиной S; когда скорость маховика достигает предельной величины, тело A, концом своим задевает выступ B задвижки CD, которая и закрывает доступ пара в машину. Пусть вес тела A равен 1,5 *кГ*, расстояние e выступа B от маховика равно 2,5 *см*, предельная угловая скорость маховика 120 *об/мин*. Определить необходимый коэффициент жесткости пружины c (т. е. величину силы, под действием которой пружина сжимается на 1 *см*), предполагая, что масса тела A сосредоточена в точке, расстояние которой от оси вращения маховика в изображенном на чертеже положении равно 147,5 *см*.

Ответ: 14,5 *кГ/см*.



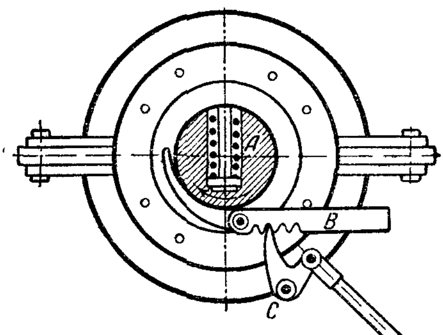
К задаче 26.33.



К задаче 26.34.

26.34 (670). В регуляторе имеются гири A по 30 *кГ* весом, которые могут скользить вдоль горизонтальной прямой MN; эти гири соединены пружинами с точками M и N; центры тяжести гирь совпадают с концами пружин. Расстояние конца каждой пружины от оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, в ненапряженном состоянии равно 5 *см*, изменение длины пружины на 1 *см* вызывается силой в 20 *кГ*. Определить расстояние центров тяжести гирь от оси O, когда регулятор, равномерно вращаясь вокруг оси O, делает 120 *об/мин*.

Ответ: 6,58 *см*.



К задаче 26.35.

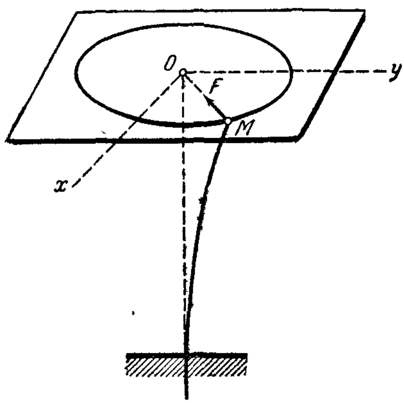
26.35 (671). Предохранительный выключатель паровых турбин состоит из пальца A весом $Q = 0{,}225$ *кГ*, помещенного в отверстии, просверленном в передней части вала турбины перпендикулярно к оси, и отжимаемого внутрь пружиной; центр тяжести пальца отстоит от оси вращения вала на расстоянии $l = 8{,}5$ *мм* при нормальной скорости вращения турбины $n=1500$ *об/мин*. При увеличении числа оборотов на 10% палец преодолевает реакцию пружины, отходит от своего нормального положения на расстояние $x=4,5$ *мм*, задевает конец рычага B и освобождает собачку C, связанную системой рычагов с пружиной, закрывающей клапан парораспределительного механизма турбины. Определить жесткость пружины, удерживающей тело A, т. е. силу, необходимую для сжатия ее на 1 *см*, считая реакцию пружины пропорциональной ее сжатию.

Ответ: $c=9,08$ *кГ/см*.

26.36 (672). Точка массы m движется по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Ускорение точки параллельно оси y. При $t=0$ координаты точки были $x=0$, $y=b$, начальная скорость v_0.

Определить силу, действующую на движущуюся точку в каждой точке ее траектории.

Ответ: $F_y=-m\frac{v_0^2b^4}{a^2y^3}$.



К задаче 26.37.

26.37 (673). Шарик массы m закреплен на конце вертикального упругого стержня, зажатого нижним концом в неподвижной стойке. При небольших отклонениях стержня от его вертикального равновесного положения можно приближенно считать, что центр шарика движется в горизонтальной плоскости Oxy, проходящей через верхнее равновесное положение центра шарика. Определить закон изменения силы, с которой упругий, изогнутый стержень действует на шарик, если выведенный из своего положения равновесия, принятого за начало координат, шарик движется согласно уравнениям

$$x=a\cos kt,\quad y=b\sin kt,$$

где a, b, k — постоянные величины.

Ответ: $F=mk^2r$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

§ 27. Дифференциальные уравнения движения

а) Прямолинейное движение

27.1 (674). Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через 6,5 *сек* от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 *м/сек*.

Найти глубину шахты.

Ответ: 175 *м*.

27.2 (675). Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти, за какое время тело пройдет путь 9,6 *м*, если в начальный момент его скорость равнялась 2 *м/сек*.

Ответ: 1,61 *сек*.

27.3 (676). При выстреле из орудия снаряд вылетает с горизонтальной скоростью 570 *м/сек*; вес снаряда 6 *кГ*. Как велико среднее давление P пороховых газов, если снаряд проходит внутри орудия 2 *м*? Сколько времени движется снаряд в стволе орудия, если считать давление газов постоянным?

Ответ: $P = 49{,}7$ *т*; 0,007 *сек*.

27.4 (677). Тело весом P вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 *сек* расстояние $s = 24{,}5$ *м* и остановилось. Определить коэффициент трения f.

Ответ: $f = 0{,}2$.

27.5 (678). Во сколько времени и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 36 *км/час*, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 300 *кГ* на тонну веса вагона?

Ответ: 3,4 *сек*; 16,9 *м*.

27.6 (679). Принимая, в первом приближении, сопротивление откатника постоянным, определить продолжительность отката ствола полевой пушки, если начальная скорость отката равна 10 *м/сек*, а средняя длина отката равна 1 *м*.

Ответ: 0,2 *сек*.

27.7 (682). Тяжелая точка M поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $v_0 = 15$ *м/сек*. Коэффициент трения $f = 0{,}1$. Угол $\alpha = 30°$.

Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

Ответ: $s = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 19{,}55$ *м*;

$T = \dfrac{v_0}{g(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 2{,}61$ *сек*.

27.8 (686). По прямолинейному железнодорожному пути, с углом наклона $\alpha = 10°$, вагон катится вниз с постоянной скоростью.

Считая сопротивление трения пропорциональным нормальному давлению, определить ускорение вагона и его скорость через 20 *сек* после начала движения, если он начал катиться вниз без начальной скорости по пути с углом наклона $\beta = 15°$. Определить также, какой путь пройдет вагон за это время.

Ответ: $w = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} g = 0{,}87$ *м/сек*^{2};

$v = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha} gt = 17{,}4$ *м/сек*; $s = \dfrac{g\sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}\dfrac{t^2}{2} = 174$ *м*.

27.9 (680). Найти наибольшую скорость падения шара весом $P = 10$ *кГ* с радиусом $r = 8$ *см*, принимая, что сопротивление воздуха равно $R=k\sigma v^2$, где v — скорость падения, σ — площадь проекции падающего тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его движения, k — численный коэффициент (зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,024 *кГсек²/м⁴*).

Ответ: $v=144$ *м/сек*.

27.10 (681). Два геометрически равных и однородных шара сделаны из различных материалов. Удельные веса материалов шаров соответственно равны γ_1 и γ_2. Оба шара падают в воздухе. Считая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости, определить отношение максимальных скоростей шаров.

Ответ: $\dfrac{v_{1\max}}{v_{2\max}}=\sqrt{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}}$.

27.11 (683). При скоростном спуске лыжник шел вниз по склону в 45°, не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $f=0{,}1$. Сопротивление воздуха движению лыжника равно $F=\alpha v^2$, где $\alpha=\mathrm{const}$, а v — скорость лыжника. При скорости в 1 *м/сек* сопротивление воздуха равно 0,0635 *кГ*.

Какую наибольшую скорость мог развить лыжник, если его собственный вес вместе с лыжами был 90 *кГ*? Насколько увеличится максимальная скорость, если, подобрав лучшую мазь, лыжник уменьшил коэффициент трения до 0,05?

Ответ: $v_{1\max}=108$ *км/час*; $v_{2\max}=111$ *км/час*.

27.12 (684). Корабль движется, преодолевая сопротивление воды, пропорциональное квадрату скорости и равное $\alpha=0{,}12$ *т* при скорости в 1 *м/сек*. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону $T=T_0\left(1-\dfrac{v}{v_s}\right)$ тонн, где $T_0=120$ *т* — сила упора винтов в момент, когда корабль находится в покое, $v_s=\mathrm{const}=33$ *м/сек*. Определить наибольшую скорость, которую может развить корабль.

Ответ: $v_{\max}=20$ *м/сек* $=72$ *км/час*.

27.13 (685). Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и при скорости в 1 *м/сек* равно 0,05 *кГ*. Сила тяги постоянна, равна 3080 *кГ* и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость самолета.

Ответ: $v_{\max}=246$ *м/сек*.

27.14 (687). Самолет на лыжах приземляется на горизонтальное поле; летчик подводит самолет к поверхности земли без вертикальной скорости и вертикального ускорения в момент приземления. Коэффициент трения лыж самолета о снег $f=0{,}1$. Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной 1 *м/сек*, горизонтальная составляющая силы сопротивления равна $R_x=1$ *кГ*, а вертикальная составляющая, направленная вверх, $R_y=3$ *кГ*. Вес самолета равен 1000 *кГ*. Определить длину и время пробега самолета до остановки.

Ответ: $s=87{,}6$ *м*; $T=12$ *сек*.

27.15 (688). Самолет начинает пикировать без начальной вертикальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем и максимальной скоростью пикирования.

Ответ: $v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-2gs/v_{\max}^2}}$.

27.16 (689). На какую высоту H и за какое время T поднимется тело весом p, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой k^2pv^2, где v — величина скорости тела?

Ответ: $H=\dfrac{\ln(v_0^2k^2+1)}{2gk^2}$; $T=\dfrac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

27.17 (690). Тело весом 2 *кГ*, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 *м/сек*, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v *м/сек*, выраженное в килограммах, равно $0{,}04v$; $g=9{,}8$ *м/сек*^{2}. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: 1,7 *сек*.

27.18 (691). Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть p, погружается на глубину, двигаясь поступательно. Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k — коэффициент пропорциональности, S — площадь горизонтальной проекции лодки, v — величина скорости погружения. Масса лодки равна M. Определить скорость погружения v, если при $t=0$ скорость $v_0=0$.

Ответ: $v=\dfrac{p}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right)$.

27.19 (692). При условиях предыдущей задачи определить путь z, пройденный погружающейся лодкой за время T.

Ответ: $z=\dfrac{p}{kS}\left[T-\dfrac{M}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right]$.

27.20 (693). При небольших скоростях сопротивление движению поезда определяется эмпирической формулой

$$R=(2{,}5+0{,}05v)\,Q\ \textit{кГ},$$

где Q — вес поезда, выраженный в тоннах, и v — скорость, выраженная в *м/сек*. Найти, через сколько времени и на каком расстоянии рудничный поезд приобретает на горизонтальном участке пути скорость $v=12$ *км/час*, если вес поезда с электровозом $Q=40$ *т*, а сила тяги электровоза $F=200$ *кГ*. Определить также силу тяги N электровоза при дальнейшем равномерном движении.

Ответ: $t=141$ *сек*; $s=245$ *м*; $N=106{,}6$ *кГ*.

27.21 (695). Какова должна быть тяга винта $T=\text{const}$ при горизонтальном полете самолета, чтобы, пролетев s метров, самолет увеличил свою скорость с v_0 *м/сек* до v_1 *м/сек*? Тяга винта направлена по скорости полета. Сила лобового сопротивления, направленная в сторону, противоположную скорости, пропорциональна квадрату скорости и равна a *кГ* при скорости в 1 *м/сек*. Вес самолета P *кГ*.

Ответ: $T=\dfrac{a\left(v_0^2-v_1^2e^{-\frac{2ags}{P}}\right)}{1-e^{-\frac{2ags}{P}}}$ *кГ*.

27.22 (696). Корабль водоизмещением 10 000 *т* движется со скоростью 16 *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости корабля и равно 30 *т* при скорости 1 *м/сек*.

Какое расстояние пройдет корабль, прежде чем скорость станет равной 4 *м/сек*? За какое время корабль пройдет это расстояние?

Ответ: $s=47{,}1$ *м*; $T=6{,}38$ *сек*.

27.23 (697). Тело падает в воздухе без начальной скорости. Сопротивление воздуха $R=k^2pv^2$, где v — величина скорости тела, p — вес тела. Какова будет скорость тела по истечении времени t после начала движения? Каково предельное значение скорости?

Ответ: $v=\dfrac{1}{k}\dfrac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}$; $v_\infty=\dfrac{1}{k}$.

27.24 (706). Корабль водоизмещением $P=1500$ *т* преодолевает сопротивление воды, равное $R=\alpha v^2$ *т*, где $\alpha=0{,}12$, а v — скорость корабля. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону $T=T_0\left(1-\dfrac{v}{v_s}\right)$, где $T_0=120$ *т* — сила упора винтов, когда корабль находится в покое, а $v_s=\text{const}=33$ *м/сек*. Найти зависимость скорости корабля от времени, если начальная скорость равна v_0.

Ответ: $v=\dfrac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}055t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}055t}-1)}$, где v_0 выражено в *м/сек*.

27.25 (707). В предыдущей задаче найти зависимость пройденного пути от скорости.

Ответ:

$$x=\left\{637{,}5\ln\left(\frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000}\right)+273{,}9\ln\frac{(v-20)(v_0+50)}{(v_0-20)(v+50)}\right\}\text{ м},$$

где v и v_0 выражены в *м/сек*.

27.26 (708). В задаче 27.24 найти зависимость пути от времени при начальной скорости $v_0=10$ *м/сек*.

Ответ: $s=\left(20t-1272{,}7\ln\dfrac{6e^{0{,}055t}}{1+6e^{0{,}055t}}-199{,}3\right)$ *м*.

27.27 (704). Вагон весом $Q=9216$ *кГ* приходит в движение вследствие действия ветра, дующего по направлению полотна, и движется по горизонтальному участку пути. Сопротивление движению вагона равно 1/200 его веса. Сила давления ветра $P=kSu^2$ *кГ*, где S — площадь задней стенки вагона, подверженная давлению ветра и равная 6 *м*², u — скорость ветра относительно вагона, а $k=0{,}12$. Абсолютная скорость ветра $v=12$ *м/сек*. Считая начальную скорость вагона равной нулю, определить:

1) наибольшую скорость $v_{\max}$ вагона;

2) время T, которое потребовалось бы для достижения этой скорости;

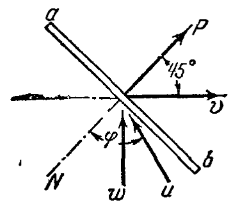
3) путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость 3 *м/сек.*

Ответ: 1) $v_{max} = 4$ *м/сек*; 2) $T = \infty$; 3) $x_1 = 187$ *м*.

27.28. Найти уравнение движения точки массы m, падающей без начальной скорости на Землю, причем сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности равен k.

Ответ: $x = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \sqrt{\frac{gk}{m}}\, t$.

27.29 (705). Буер, весящий вместе с пассажирами $Q = 196{,}2$ *кГ*, движется прямолинейно по гладкой горизонтальной поверхности льда вследствие давления ветра на парус, плоскость которого ab образует угол 45° с направлением движения. Абсолютная скорость w ветра перпендикулярна к направлению движения. Величина давления ветра P выражается формулой Ньютона: $P = kSu^2 \cos^2 \varphi$, где φ — угол, образуемый относительной скоростью ветра u с перпендикуляром N к плоскости паруса, $S = 5$ *м*^{2} — величина площади паруса, $k = 0{,}113$ — опытный коэффициент. Давление P направлено перпендикулярно к плоскости ab. Пренебрегая трением, найти: 1) какую наибольшую скорость v_{max} может получить буер; 2) какой угол α составляет при этой скорости помещенный на мачте флюгер с плоскостью паруса; 3) какой путь x_1 должен пройти буер для того, чтобы приобрести скорость $v = \frac{2}{3} w$, если его начальная скорость равна нулю.



К задаче 27.29.

Ответ: 1) $v_{max} = w$; 2) $\alpha = 0°$; 3) $x_1 = 90$ *м*.

27.30 (698). Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя так, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 120 *кГ* в течение каждой секунды. Найти кривую расстояний s движения вагона при следующих данных: вес вагона 10 *т*, сопротивление трения постоянно и равно 0,2 *т*, а начальная скорость равна нулю.

Ответ: Движение начнется по истечении 5/3 *сек* после включения тока; с этого момента $s = 0{,}01962 \left(t - \frac{5}{3}\right)^3$ *м*.

27.31 (701). Тело весом $p = 10$ *н* движется под действием переменной силы $F = 10(1 - t)$ *н*, где время t — в секундах.

Через сколько секунд тело остановится, если в начальный момент скорость тела $v_0 = 20$ *см/сек* и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет точка до остановки?

Ответ: $t = 2{,}02$ *сек*; $s = 692$ *см*.

27.32 (702). Материальная точка с массой m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону

$F = F_0 \cos \omega t$, где F_0 и ω — постоянные величины. В начальный момент точка имела скорость $\dot{x}_0 = v_0$.

Найти уравнение движения точки.

Ответ: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) + v_0 t$.

27.33 (694). Частица массы m, несущая заряд e электричества, находится в однородном электрическом поле с переменным напряжением $E = A \sin kt$ (A и k — заданные постоянные). Определить движение частицы, если известно, что в электрическом поле на частицу действует сила $F = eE$, направленная в сторону напряжения E. Влиянием силы тяжести пренебречь. Начальное положение частицы принять за начало координат; начальная скорость частицы равна нулю.

Ответ: $x = \frac{eA}{mk}\left(t - \frac{\sin kt}{k}\right)$.

27.34 (699). Определить движение тяжелого шарика вдоль воображаемого прямолинейного канала, проходящего через центр Земли, если известно, что сила притяжения внутри земного шара пропорциональна расстоянию движущейся точки от центра Земли и направлена к этому центру; шарик опущен в канал с поверхности Земли без начальной скорости. Указать также скорость шарика при прохождении через центр Земли и время движения до этого центра. Радиус Земли равен $R = 637 \cdot 10^6$ *см*, ускорение силы притяжения на поверхности Земли принять равным $g = 980$ *см/сек*^{2}.

Ответ: Расстояние шарика от центра Земли меняется по закону

$$x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t; \quad v = 7{,}9 \text{ км/сек}; \quad T = 21{,}1 \text{ мин.}$$

27.35 (700). Тело падает на Землю с высоты h без начальной скорости. Сопротивлением воздуха пренебрегаем, а силу притяжения Земли считаем обратно пропорциональной квадрату расстояния тела от центра Земли. Найти время T, по истечении которого тело достигнет поверхности Земли. Какую скорость v оно приобретет за это время? Радиус Земли равен R; ускорение силы тяжести у поверхности Земли равно g.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$; $T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2} \arccos \frac{R-h}{R+h}\right)$.

27.36. Материальная точка массы m отталкивается от центра силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности mk_2). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности $2mk_1$). В начальный момент точка находилась на расстоянии a от центра, и ее скорость в этот момент равнялась нулю. Найти закон движения точки.

Ответ: $x = \frac{a}{\alpha + \beta}(\alpha e^{\beta t} + \beta e^{-\alpha t})$, где $\alpha = \sqrt{k_1^2 + k_2} + k_1$,

$\beta = \sqrt{k_1^2 + k_2} - k_1$.

27.37. Точка массы m начинает двигаться без начальной скорости из положения $x = \beta$ прямолинейно (вдоль оси x) под действием силы притяжения к началу координат, изменяющейся по закону

$$R = \frac{\alpha}{x^2}.$$

Найти момент времени, когда точка окажется в положении $x_1 = \beta/2$. Определить скорость точки в этом положении.

Ответ: $t_1 = \frac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$; $v_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}$.

27.38. Точка массы m начинает двигаться из состояния покоя из положения $x_0 = a$ прямолинейно под действием силы притяжения, пропорциональной расстоянию от начала координат: $F_x = -c_1 m x$, и силы отталкивания, пропорциональной кубу расстояния: $Q_x = c_2 m x^3$. При каком соотношении c_1, c_2, a точка достигнет начала координат и остановится?

Ответ: $c_1 = \frac{1}{2} c_2 a^2$.

27.39. Точка массы m движется прямолинейно. Зависимость пройденного пути от скорости дается формулой

$$x = a\sqrt{v} - b.$$

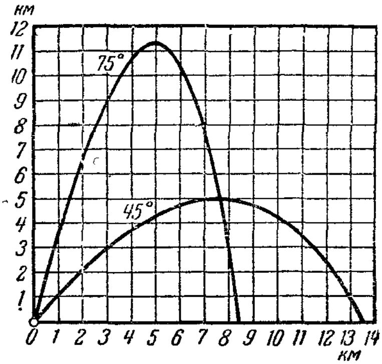
Найти время, в течение которого начальная скорость точки увеличится вдвое.

Ответ: $t = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

27.40 (703). При движении тела весом в 9,8 *н* в неоднородной среде сила сопротивления изменяется по закону $F = -\frac{2v^2}{3+s}$ *н*, где v — скорость тела в *м/сек*, а s — пройденный путь в метрах. Определить пройденный путь как функцию времени, если начальная скорость $v_0 = 5$ *м/сек*.

Ответ: $s = 3\left[\sqrt[3]{5t+1} - 1\right]$ *м*.

б) Криволинейное движение



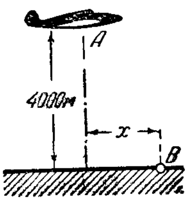
К задаче 27.41.

27.41 (709). Морское орудие (105 *мм*, 35 калибров) выбрасывает снаряд весом 18 *кГ* со скоростью $v_0 = 700$ *м/сек*; действительная траектория снаряда в воздухе изображена на чертеже в двух случаях: 1) когда угол, составляемый осью орудия с горизонтом, равен 45° и 2) когда угол равен 75°. Для каждого из двух указанных случаев определить, на сколько километров увеличилась бы как высота, так и дальность полета, если бы снаряд не испытывал сопротивления воздуха.

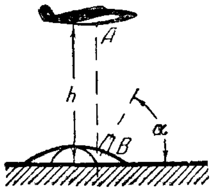
Ответ: Увеличение высоты: 1) 7,5 *км*; 2) 12 *км*.

Увеличение дальности: 1) 36,5 *км*; 2) 16,7 *км*.

27.42 (710). Самолет A летит на высоте 4000 *м* над землей с горизонтальной скоростью 500 *км/час*. На каком расстоянии x, измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки B, должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебрегаем.



К задаче 27.42.



К задаче 27.43.

Ответ: $x = 3960$ *м*.

27.43 (711). Самолет A летит над землей на высоте h с горизонтальной скоростью v_1. Из орудия B произведен выстрел по самолету в тот момент, когда самолет находится на одной вертикали с орудием. Найти: 1) какому условию должна удовлетворять начальная скорость v_0 снаряда для того, чтобы он мог попасть в самолет, и 2) под каким углом α к горизонту должен быть сделан выстрел. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Ответ: 1) $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$; 2) $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$.

27.44 (712). Наибольшая горизонтальная дальность снаряда равна L. Определить его горизонтальную дальность l при угле бросания $\alpha = 30°$ и высоту h траектории в этом случае. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Ответ: $l = \frac{\sqrt{3}}{2}L$; $h = \frac{L}{8}$.

27.45 (713). При угле бросания α снаряд имеет горизонтальную дальность l_α.

Определить горизонтальную дальность при угле бросания, равном $\alpha/2$. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Ответ: $l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

27.46 (714). Найти дальность полета снаряда, если радиус кривизны траектории в высшей ее точке $\rho = 16$ *км*, а угол наклона ствола орудия к горизонту $\alpha = 30°$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $x_{\max} = 2\rho \operatorname{tg}\alpha = 18\,480$ *м*.

27.47 (715). Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если цель обнаружена на расстоянии 32 *км*, а начальная скорость снаряда $v_0 = 600$ *м/сек*. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Ответ: $\alpha_1 = 30°18''$; $\alpha_2 = 59°42'$.

27.48 (716). Решить предыдущую задачу в том случае, когда цель будет находиться на высоте 200 *м* над уровнем артиллерийских позиций.

Ответ: $\alpha_1 = 30°45'$; $\alpha_2 = 59°23'$.

27.49 (717). Из орудия, находящегося в точке O, произвели выстрел под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Одновременно из точки A, находящейся на расстоянии l по горизонтали от точки O, произвели выстрел вертикально вверх. Определить, с какой начальной скоростью v_1 надо выпустить второй снаряд, чтобы он столкнулся с первым снарядом, если скорость v_0 и точка A лежат в одной вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $v_1 = v_0 \sin\alpha$ $\left(\text{независимо от расстояния } l, \text{ для } l < \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\right)$.

27.50 (718). Найти геометрическое место положений в момент t материальных точек, одновременно брошенных в вертикальной плоскости из одной точки с одной и той же начальной скоростью v_0 под всевозможными углами к горизонту.

Ответ: Окружность радиуса $v_0 t$ с центром, лежащим на вертикали точки бросания, ниже этой точки на $\frac{1}{2} gt^2$.

27.51 (719). Найти геометрическое место фокусов всех параболических траекторий, соответствующих одной и той же начальной скорости v_0 и всевозможным углам бросания.

Ответ: $x^2 + y^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$.

27.52 (720). Тело весом P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления R воздуха. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R = kPv$.

Ответ: $h = \frac{v_0 \sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2} \ln(1 + kv_0 \sin\alpha)$.

27.53 (721). В условиях задачи 27.52 найти уравнения движения точки.

Ответ: $x = \frac{v_0 \cos\alpha}{kg}(1 - e^{-kgt})$;

$$y = \frac{1}{kg}\left(v_0 \sin\alpha + \frac{1}{k}\right)(1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

27.54 (722). При условиях задачи 27.52 определить, на каком расстоянии s по горизонтали точка достигнет наивысшего положения.

Ответ: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g(kv_0 \sin\alpha + 1)}$.

27.55 (723). В вертикальной трубе, помещенной в центре круглого бассейна и наглухо закрытой сверху, на высоте 1 *м* сделаны отверстия в боковой поверхности трубы, из которых выбрасываются наклонные струи воды под различными углами φ к горизонту $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$; начальная скорость струи равна $v_0 = \sqrt{4g/3 \cos\varphi}$ *м/сек*, где g — ускорение силы тяжести; высота трубы 1 *м*. Определить наименьший радиус R бассейна, при котором вся выбрасываемая трубой вода падает в бассейн, как бы мала ни была высота его стенки.

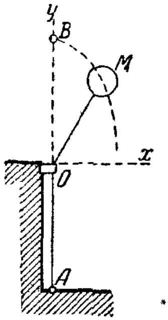
Ответ: $R = 2{,}83$ *м*.

27.56 (724). Определить движение тяжелой материальной точки, масса которой равна m граммам, притягиваемой к неподвижному центру O силой, прямо пропорциональной расстоянию. Движение происходит в пустоте; сила притяжения на единице расстояния равна k^2m *дин*; в момент $t=0$: $x=a$, $\dot{x}=0$, $y=0$, $\dot{y}=0$, причем ось Oy направлена по вертикали вниз.

Ответ: Гармоническое колебательное движение: $x=a\cos kt$, $y=\frac{g}{k^2}(1-\cos kt)$ по отрезку прямой $y=\frac{g}{k^2}-\frac{g}{k^2a}x$, $|x|\leqslant a$.

27.57 (725). Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O, изменяющейся по закону $F=k^2mr$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(a, 0)$ и имела скорость v_0, направленную параллельно оси y. Определить траекторию точки.

Ответ: $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{ky}{v_0}\right)^2=1$ (гипербола).



К задаче 27.58.

27.58 (726). Упругая нить, закрепленная в точке A, проходит через неподвижное гладкое кольцо O; к свободному концу ее прикреплен шарик M, масса которого равна m граммам. Длина невытянутой нити $l=AO$; для удлинения нити на 1 *см* нужно приложить силу, равную k^2m *дин*. Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарику скорость v_0, перпендикулярную к прямой AB. Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению.

Ответ: Эллипс $\frac{k^2x^2}{v_0^2}+\frac{y^2}{l^2}=1$.

27.59 (727). Точка M, масса которой равна m, притягивается к n неподвижным центрам $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n$ силами, пропорциональными расстояниям; сила притяжения точки M к центру C_i ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) равна $k_im\cdot\overline{MC_i}$ *дин*; точка M и притягивающие центры лежат в плоскости Oxy. Определить траекторию точки M, если при $t=0$: $x=x_0$, $y=y_0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=v_0$. Действием силы тяжести пренебрегаем.

Ответ: Эллипс $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)+\frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2\frac{k}{v_0^2}=1$, где

$$a=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_ix_i,\quad b=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{i=n}k_iy_i,\quad k=\sum_{i=1}^{i=n}k_i.$$

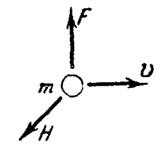
27.60 (728). Точка M притягивается к двум центрам C_1 и C_2 силами, пропорциональными расстояниям: $km\cdot\overline{MC_1}$ и $km\cdot\overline{MC_2}$; центр C_1 неподвижен и находится в начале координат, центр C_2 равномерно движется по оси Ox, так что $x_2=2(a+bt)$. Найти траекторию точки M, полагая, что в момент $t=0$ точка M находится в плоскости xy, координаты ее $x=y=a$ и скорость имеет проекции

$$\dot{x}=\dot{z}=b,\quad \dot{y}=0.$$

Ответ: Винтовая линия, расположенная на эллиптическом цилиндре, ось которого есть Ox, а уравнение имеет вид $\frac{y^2}{a^2}+\frac{2kz^2}{b^2}=1$; шаг винта равен $\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$.

27.61 (729). *Отклонение катодных лучей в электрическом поле.* Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное электрическое поле напряжения E со скоростью v_0, перпендикулярной к направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $F=eE$, направленная в сторону, противоположную напряжению E; действием силы тяжести пренебрегаем.

Ответ: Парабола, параметр которой равен mv_0^2/eE.



К задаче 27.62.

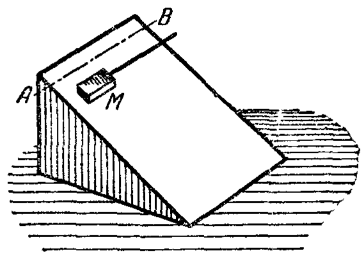
27.62 (730). *Отклонение катодных лучей в магнитном поле.* Частица массы m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное магнитное поле напряжения H со скоростью v_0, перпендикулярной к направлению напряжения поля. Определить траекторию дальнейшего движения частицы, зная, что на частицу действует сила $F=-e(v\times H)$.

При решении удобно пользоваться уравнениями движения точки в проекциях на касательную и на главную нормаль к траектории.

Ответ: Окружность радиуса $\frac{mv_0}{eH}$.

27.63 (731). Определить траекторию движения частицы массы m, несущей заряд e электричества, если частица вступила в однородное электрическое поле с переменным напряжением $E=A\cos kt$ (A и k — заданные постоянные) со скоростью v_0, перпендикулярной к направлению напряжения поля; влиянием силы тяжести пренебрегаем. В электрическом поле на частицу действует сила $F=-eE$.

Ответ: $y=-\frac{eA}{mk^2}\left(1-\cos\frac{k}{v_0}x\right)$, где ось y направлена по напряжению поля, начало координат совпадает с начальным положением точки в поле.



К задаче 27.64

27.64 (732). По негладкой наклонной плоскости движется тяжелое тело M, постоянно оттягиваемое посредством нити в горизонтальном направлении, параллельно прямой AB. С некоторого момента движение тела становится прямолинейным и равномерным, причем из двух взаимно перпендикулярных составляющих скорости та, которая направлена параллельно AB, равна 12 *см/сек*. Определить вторую составляющую v_1 скорости, а также натяжение T нити при следующих данных: уклон плоскости $\operatorname{tg}\alpha = 1/30$, коэффициент трения $f = 0{,}1$, вес тела 300 *н*.

Ответ: $v_1 = 4{,}24$ *см/сек*; $T = 28{,}3$ *н*.

27.65. Точка M массы m находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 (см. чертеж). Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2. Коэффициент пропорциональности одинаков и равен c. Движение начинается в точке A_0 со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, перпендикулярной к линии O_1O_2. Определить, какую траекторию опишет точка M. Найти моменты времени, когда она пересекает направление линии O_1O_2, и вычислить ее координаты в эти моменты времени.

Ответ: Эллипс $\dfrac{x^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{v_0}{k}\right)^2} = 1$, где $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}}$;

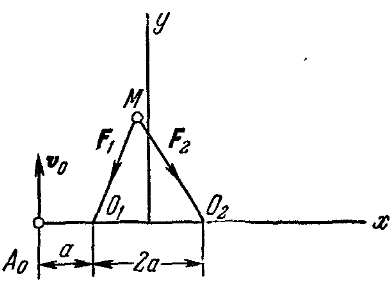
$$t = 0, \quad x_0 = -2a, \quad y_0 = 0;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{k}, \quad x_1 = 2a, \quad y_0 = 0;$$

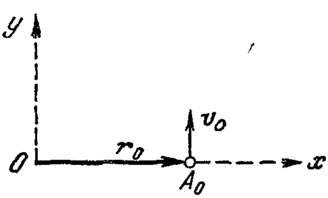
$$t_2 = \frac{2\pi}{k}, \quad x_2 = -2a, \quad y_0 = 0 \text{ и т. д.}$$

Время, в течение которого точка описывает эллипс, $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

27.66. На точку A массы m, которая начинает движение из положения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ (где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки) со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, перпендикулярной к $\boldsymbol{r}_0$, действует сила притяжения, направленная к центру O и пропорциональная расстоянию от него.



К задаче 27.65.



К задаче 27.66.

Коэффициент пропорциональности равен mc_1. Кроме того, на точку действует постоянная сила $mc\boldsymbol{r}_0$. Найти уравнение движения и траекторию точки. Каково должно быть отношение c_1/c, чтобы траектория движения проходила через центр O? С какой скоростью точка пройдет центр O?

Ответ: 1) $\boldsymbol{r} = \dfrac{c}{c_1}\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{v_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t + \boldsymbol{r}_0\left(1 - \dfrac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t$;

2) эллипс $\left[\dfrac{x - \dfrac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1 - \dfrac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\dfrac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2 = 1$;

3) точка A пройдет через центр O, если $c_1/c=2$;

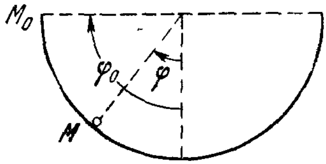
4) точка A пройдет через центр O со скоростью $\dot{r}_0=-v_0$ в момент времени $t=\pi/\sqrt{c_1}$.

27.67. Тяжелая точка массы m падает из положения, определяемого координатами $x_0=0$, $y_0=h$ при $t=0$, под действием силы тяжести (параллельной оси y) и силы отталкивания от оси y, пропорциональной расстоянию от этой оси (коэффициент пропорциональности c). Проекции начальной скорости точки на оси координат равны $v_x=v_0$, $v_y=0$. Определить траекторию точки, а также момент времени t_1 пересечения оси x.

Ответ: Траектория

$$x=\frac{v_0}{k}\operatorname{sh}k\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)},$$

где $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\quad t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.



К задаче 27.68.

27.68. Точка M массы m движется под действием силы тяжести по гладкой внутренней поверхности полого цилиндра радиуса r. В начальный момент угол $\varphi_0=\pi/2$, а скорость точки равнялась нулю. Определить скорость точки M и реакцию поверхности цилиндра при угле $\varphi=30°$.

Ответ: $v=\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$; $\quad T=\frac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

§ 28. Теорема об изменении количества движения материальной точки. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

28.1 (733). Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 72 *км/час*. Найти время торможения и тормозной путь.

Ответ: 20,4 *сек*; 204 *м*.

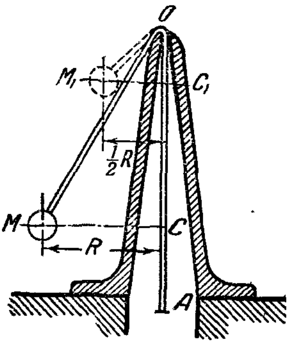
28.2 (734). По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длиной $l=39{,}2$ *м*, если коэффициент трения $f=0{,}2$.

Ответ: $T=5$ *сек*.

28.3 (735). Поезд весом 400 *т* входит на подъем $i=\operatorname{tg}\alpha=0{,}006$ (где α — угол подъема) со скоростью 54 *км/час*. Коэффициент трения (коэффициент суммарного сопротивления) при движении поезда равен 0,005. Через 50 *сек* после входа поезда на подъем его скорость падает до 45 *км/час*. Найти силу тяги тепловоза.

Ответ: 2,36 *т*.

28.4 (736). Гирька M привязана к концу нерастяжимой нити MOA, часть которой OA пропущена через вертикальную трубку; гирька движется вокруг оси трубки по окружности радиуса $MC = R$, делая 120 *об/мин.* Медленно втягивая нить OA в трубку, укорачивают наружную часть нити до длины OM_1, при которой гирька описывает окружность радиусом $\frac{1}{2}R$. Сколько оборотов в минуту делает гирька по этой окружности?



К задаче 28.4.

Ответ: 480 *об/мин.*

28.5 (737). Для определения веса груженого железнодорожного состава между тепловозом и вагонами установили динамометр. Среднее показание динамометра за 2 *мин* оказалось 100,8 **т**. За это же время состав набрал скорость $v = 57{,}6$ *км/час* (вначале состав стоял на месте). Коэффициент трения $f = 0{,}02$. Найти вес состава.

Ответ: Вес состава 3000 **т**.

28.6 (738). Каков должен быть коэффициент трения f колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды $v = 72$ *км/час* он останавливается через 6 *сек* после начала торможения?

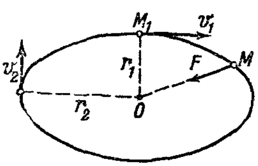
Ответ: $f = 0{,}34$.

28.7 (739). Пуля весом $P = 20$ *Г* вылетает из ствола винтовки со скоростью $v = 650$ *м/сек*, пробегая канал ствола за время $t = 0{,}00095$ *сек*. Определить среднюю величину давления газов, выбрасывающих пулю, если сечение канала $s = 150$ *мм*^{2}.

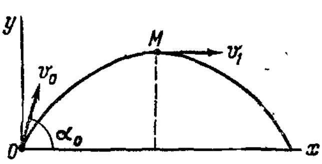
Ответ: Среднее давление 9,31 *кГ/мм*^{2}.

28.8 (740). Точка M движется вокруг неподвижного центра под действием силы притяжения к этому центру. Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30$ *см/сек*, а r_2 в пять раз больше r_1.

Ответ: $v_2 = 6$ *см/сек*.



К задаче 28.8.



К задаче 28.9.

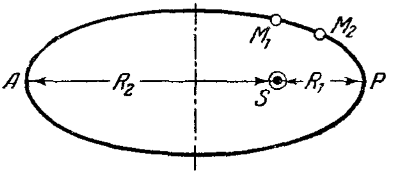
28.9 (741). Найти импульс равнодействующей всех сил, действующих на снаряд за время, когда снаряд из начального положения O переходит в наивысшее положение M.

Дано: $v_0 = 500$ *м/сек*, $\alpha_0 = 60°$, $v_1 = 200$ *м/сек*, вес снаряда 100 *кГ*.

Ответ: Проекции импульса равнодействующей:

$$S_x = -510 \text{ кГ сек}; \quad S_y = -4410 \text{ кГ сек}.$$

28.10 (742). Два метеорита M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе которого S находится Солнце. Расстояние между ними настолько мало, что дугу M_1M_2 эллипса можем считать за отрезок прямой. Известно, что расстояние M_1M_2 равнялось a, когда середина его находилась в перигелии P. Предполагая, что метеориты движутся с равными секториальными скоростями, определить расстояние M_1M_2, когда середина его будет проходить через афелий A, если известно, что $SP = R_1$ и $SA = R_2$.



К задаче 28.10.

Ответ: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2} a$.

28.11 (743). Мальчик весом 40 *кГ* стоит на полозьях спортивных саней, вес которых с грузом равен 40 *кГ*, и делает каждую секунду толчок с импульсом 2 *кГ сек*. Найти скорость, приобретаемую санями за 15 *сек*, если коэффициент трения $f = 0{,}01$.

Ответ: $v = 2{,}2$ *м/сек*.

28.12 (744). Точка совершает равномерное движение по окружности со скоростью $v = 20$ *см/сек*, делая полный оборот за время $T = 4$ *сек*.

Найти импульс сил S, действующих на точку, за время одного полупериода, если масса точки $m = 5$ *г*. Определить среднее значение силы F.

Ответ: $S = 200$ *дин сек*; $F = 100$ *дин* и направлена по конечной скорости.

28.13 (745). Два математических маятника, подвешенных на нитях длиной l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), совершают колебания одинаковой амплитуды. Оба маятника одновременно начали двигаться в одном направлении из своих крайних отклоненных положений. Найти условие, которому должны удовлетворять длины l_1 и l_2 для того, чтобы маятники по истечении некоторого промежутка времени одновременно вернулись в положение равновесия. Определить наименьший промежуток времени T.

Ответ: $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \frac{k}{n}$, где k, n — целые числа и дробь $\frac{k}{n}$ несократима; $T = kT_2 = nT_1$.

28.14 (746). Шарик весом p, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости; другой конец нити втягивают с постоянной скоростью a в отверстие, сделанное на плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити T, если известно, что в начальный момент нить расположена по прямой, расстояние между шариком и отверстием равно R, а проекция начальной скорости шарика на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

Ответ: В полярных координатах (если принять отверстие за начало координат и угол φ_0 равным нулю):

$$r = R - at; \quad \varphi = \frac{v_0 t}{R - at}; \quad T = \frac{p v_0^2 R^2}{g (R - at)^3}.$$

28.15 (747). Определить массу M Солнца, имея следующие данные: радиус Земли $R = 637 \cdot 10^6$ *см*, средняя плотность ее 5,5, большая полуось земной орбиты a равна $149 \cdot 10^{11}$ *см*, время обращения Земли вокруг Солнца $T = 365{,}25$ суток. Силу всемирного тяготения между двумя массами, равными 1 *г*, на расстоянии 1 *см* считаем равной $\frac{gR^2}{m}$, где m — масса Земли; из законов Кеплера следует, что сила притяжения Земли Солнцем равна $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}$, где r — расстояние Земли от Солнца.

Ответ: $M = 197 \cdot 10^{31}$ *г*.

28.16 (748). Точка массы m, подверженная действию центральной силы F, описывает лемнискату $r^2 = a \cos 2\varphi$, где a — величина постоянная, r — расстояние точки от силового центра; в начальный момент $r = r_0$, скорость точки равна v_0 и составляет угол α с прямой, соединяющей точку с силовым центром. Определить величину силы F, зная, что она зависит только от расстояния r.

По формуле **Бине** $F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right)$, где c — удвоенная секторная скорость точки.

Ответ: Сила притяжения $F = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha$.

28.17 (749). Точка M, масса которой m, движется около неподвижного центра O под влиянием силы F, исходящей из этого центра и зависящей только от расстояния $MO = r$. Зная, что скорость точки $v = a/r$, где a — величина постоянная, найти величину силы F и траекторию точки.

Ответ: Сила притяжения $F = \frac{ma^2}{r^3}$; траектория — логарифмическая спираль.

28.18 (750). Определить движение точки, масса которой 1 *г*, под влиянием центральной силы притяжения, обратно пропорциональной кубу расстояния точки от центра силы, при следующих данных: на расстоянии, равном 1 *см*, сила равна 1 дине; в начальный момент расстояние точки от центра $r_0 = 2$ *см*, скорость $v_0 = 0{,}5$ *см/сек* и составляет угол 45° с направлением прямой, проведенной из центра к точке.

Ответ: $r = 2e^{\varphi}$; $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

28.19 (753). Частица M с массой 1 *г* притягивается к неподвижному центру O силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния; эта сила равна 8 *дин* при расстоянии, равном 1 *см*. В начальный момент частица находится на расстоянии $OM_0 = 2$ *см* и имеет скорость, перпендикулярную к OM_0 и равную $v_0 = 0{,}5$ *см/сек*. Определить траекторию частицы.

Ответ: Окружность радиуса 1 *см*.

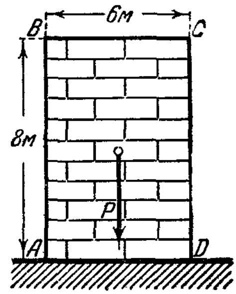
28.20 (754). Точка массы 20 *г*, движущаяся под влиянием силы притяжения к неподвижному центру по закону тяготения Ньютона, описывает полный эллипс с полуосями 10 *см* и 8 *см* в течение 50 *сек.* Определить наибольшую и наименьшую величину силы притяжения F при этом движении.

Ответ: $F_{max} = 19{,}7$ *дин*; $F_{min} = 1{,}2$ *дин*.

§ 29. Работа и мощность

29.1 (755). Однородный массив $ABCD$, размеры которого указаны на чертеже, весит $P = 4000$ *кГ*. Определить работу, которую необходимо затратить на опрокидывание его вращением вокруг ребра D.

Ответ: 4000 *кГм* = 39,24 *кдж*.



К задаче 29.1.

29.2 (756). Определить наименьшую работу, которую нужно затратить для того, чтобы поднять на 5 *м* груз в 2 *т*, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30°; коэффициент трения 0,5.

Ответ: 18 660 *кГм* = 183 *кдж*.

29.3 (757). Для того чтобы поднять 5000 $м^3$ воды на высоту 3 *м*, поставлен насос с двигателем в 2 *л. с.* Сколько времени потребуется для выполнения этой работы, если коэффициент полезного действия насоса 0,8?

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы, в данном случае работы, затраченной на поднятие воды, к работе движущей силы, которая должна быть больше полезной работы вследствие вредных сопротивлений.

Ответ: 34 *час* 43 *мин* 20 *сек*.

29.4 (758). Как велика мощность в лошадиных силах и киловаттах машины, поднимающей 84 раза в минуту молот весом 200 *кГ* на высоту 0,75 *м*, если коэффициент полезного действия машины 0,7?

Ответ: 4 *л. с.* = 2,94 *квт*.

29.5 (759). Вычислить в лошадиных силах и мегаваттах общую мощность трех водопадов, расположенных последовательно на одной реке. Высота падения воды: у первого водопада — 12 *м*, у второго — 12,8 *м*, у третьего — 15 *м*. Средний расход воды в реке — 75,4 $м^3/сек$.

Ответ: 40 000 *л. с.* = 29,4 *мгвт*.

29.6 (760). Вычислить мощность турбогенераторов на станции трамвайной сети, если число вагонов на линии 45, вес каждого вагона 10 *т*, сопротивление трения равно 0,02 веса вагона, средняя скорость вагона 12 *км/час* и потери в сети 5%.

Ответ: 421 *л. с.* = 309 *квт*.

29.7 (761). Разгрузка угля с баржи производится мотором, поднимающим бадью. Бадья вмещает 1 *т* угля и весит 200 *кГ*. За 12 часов работы должны быть нагружены 600 *т* угля, причем бадью с углем приходится поднимать на высоту 10 *м*. Определить теоретическую мощность мотора.

Ответ: 2,22 *л. с.* = 1,63 *квт*.

29.8 (762). Вычислить работу, которая производится при подъеме груза в 20 *кГ* по наклонной плоскости на расстояние 6 *м*, если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, равен 30°, а коэффициент трения равен 0,01.

Ответ: 61,04 *кГм* = 598 *дж*.

29.9 (763). Когда турбоход идет со скоростью 15 узлов, турбина его развивает мощность 5144 *л. с.* Определить силу сопротивления воды движению турбохода, зная, что коэффициент полезного действия турбины и винта равен 0,4 и 1 узел = 0,5144 *м/сек*.

Ответ: 20 *т*.

29.10 (764). Найти в лошадиных силах и киловаттах мощность двигателя внутреннего сгорания, если среднее давление на поршень в течение всего хода равно 5 *кГ* на 1 *см*^{2}; длина хода поршня 40 *см*, площадь поршня 300 *см*^{2}, число рабочих ходов 120 в минуту и коэффициенг полезного действия 0,9.

Ответ: 14,4 *л. с.* = 10,6 *квт*.

29.11 (765). Шлифовальный камень диаметром 60 *см* делает 120 *об/мин*. Потребляемая мощность равна 1,6 *л. с.* Коэффициент трения шлифовального камня о деталь равен 0,2. С какой силой прижимает камень шлифуемую деталь?

Ответ: 1570 *н*.

29.12 (766). Определить мощность мотора продольно-строгального станка, если длина рабочего хода 2 *м*, его продолжительность 10 *сек*, сила резания 1200 *кГ*, коэффициент полезного действия станка 0,8. Движение считать равномерным.

Ответ: 2,96 *квт*.

29.13 (767). В XVIII веке для откачки воды из угольных шахт употребляли конный привод, называемый круговым топчаком. Диаметр топчака $d = 8$ *м*, и его вал делал $n = 6$ *об/мин*.

Определить среднюю силу тяги лошади, приводившей топчак в движение, считая ее мощность равной 1 *л. с.*

Ответ: $F = 29{,}9$ *кГ*.

29.14 (768). К концу упругой пружины подвешен груз веса P. Для растяжения пружины на 1 *см* надо приложить силу, равную c *Г*. Составить выражение полной механической энергии системы.

Ответ: $\frac{1}{2}\frac{P}{g}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 - mgx = \text{const}$, где x отсчитывается от конца нерастянутой пружины вниз.

29.15 (769). При ходьбе на лыжах на дистанцию в 20 *км* по горизонтальному пути центр тяжести лыжника совершал гармонические колебания с амплитудой 8 *см* и с периодом $T = 4$ *сек*. Вес лыжника 80 *кГ*, а коэффициент трения лыж о снег $f = 0{,}05$.

Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 *час* 30 *мин*, а также среднюю мощность лыжника.

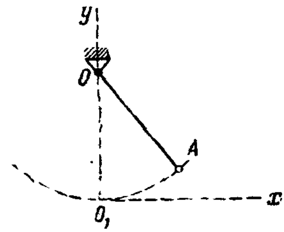
Примечание. Считать, что работа торможения при опускании центра тяжести лыжника составляет 0,4 работы при подъеме центра тяжести на ту же высоту.

Ответ: $A = 1{,}05 \cdot 10^5$ *кГм*; $w = 0{,}26$ *л. с.*

29.16 (770). Математический маятник A весом P и длиной l под действием горизонтальной силы Px/l поднялся на высоту y. Вычислить потенциальную энергию маятника двумя способами: 1) как работу силы тяжести, 2) как работу, произведенную силой Px/l, и указать, при каких условиях оба способа приводят к одинаковому результату.

Ответ: 1) Py; 2) $\frac{1}{2}\frac{Px^2}{l}$.

Оба ответа одинаковы, если можно пренебречь y^2.

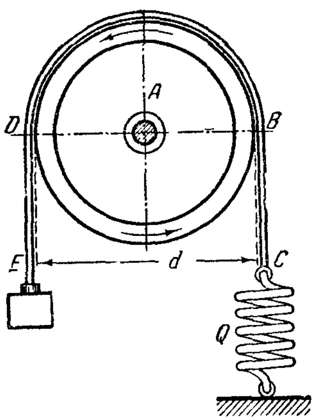


К задаче 29.16.

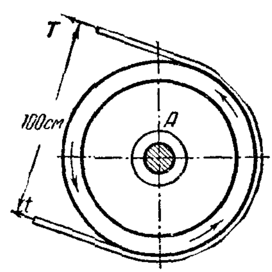
29.17 (771). Для измерения мощности двигателя на его шкив A надета лента с деревянными колодками. Правая ветвь BC ленты удерживается пружинными весами Q, а левая ее ветвь DE натягивается грузом. Определить мощность двигателя, если, вращаясь равномерно, он делает 120 *об/мин*; при этом пружинные весы показывают натяжение правой ветви ленты в 4 *кГ*; вес груза равен 1 *кГ*; диаметр шкива $d = 63{,}6$ *см*.

Разность натяжений ветвей BC и DE ленты равна силе, тормозящей шкив; определяем работу этой силы в 1 *сек*.

Ответ: 0,16 *л. с.* = 117,8 *вт*.



К задаче 29.17.



К задаче 29.18.

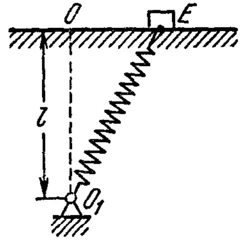
29.18 (772). Посредством ремня передается мощность 20 *л. с.* Радиус ременного шкива 50 *см*, угловая скорость шкива равна 150 *об/мин*. Предполагая, что натяжение T ведущей ветви ремня вдвое больше натяжения t ведомой ветви, определить натяжения T и t.

Ответ: $T = 382$ *кГ*; $t = 191$ *кГ*.

§ 30. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

30.1. Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; $OO_1 = l$. В начальный момент тело E

отклонено от положения равновесия O на конечную величину $OE=a$ и отпущено без начальной скорости. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.



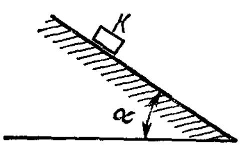
К задаче 30.1.

Ответ: $v=\sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2}+l_0\left(l-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right]}$.

30.2. В условиях предыдущей задачи определить скорость тела E в момент прохождения положения равновесия O, предполагая, что плоскость шероховата и коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $v^2=\frac{2}{m}\left\{c\left[\frac{a^2}{2}+l_0(l-\sqrt{l^2+a^2})\right]-\right.$
$\left.-f\left[(mg+cl)\,a+cl_0l\ln\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right]\right\}$.

30.3. Тело K находится на шероховатой наклонной плоскости в покое. Угол наклона плоскости к горизонту α и $f_0>\operatorname{tg}\alpha$, где f_0 — коэффициент трения покоя. В некоторый момент телу сообщена начальная скорость v_0, направленная вдоль плоскости вниз. Определить путь s, пройденный телом до остановки, если коэффициент трения при движении равен f.



К задаче 30.3.

Ответ: $s=\frac{v_0^2}{2g\,(f\cos\alpha-\sin\alpha)}$.

30.4 (773). По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°, спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен 0,1. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 *м* от начала движения?

Ответ: 4,02 *м/сек*.

30.5 (774). Снаряд весом в 24 *кГ* вылетает из дула орудия со скоростью 500 *м/сек*. Длина ствола орудия 2 *м*.

Каково среднее значение силы давления газов на снаряд?

Ответ: 152,9 *т*.

30.6 (775). Материальная точка весом 3 *кГ* двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 *м/сек*. К ней приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 *сек*, и тогда скорость точки оказалась равной 55 *м/сек* и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

Ответ: 0,612 *кГ*; 459 *кГм* = 4,5 *кдж*.

30.7 (776). При подходе к станции поезд идет со скоростью 36 *км/час* под уклон, угол которого $\alpha=0{,}008$ *рад*. В некоторый момент машинист, увидав опасность, начинает тормозить поезд. Сопротивление от торможения и трения в осях составляет 0,1 веса поезда. Определить, на каком расстоянии и через сколько времени от момента начала торможения поезд остановится, полагая $\sin\alpha=\alpha$.

Ответ: 55,3 *м*; 11,06 *сек*.

30.8 (777). Поезд весом 200 *т* идет по горизонтальному участку пути с ускорением 0,2 *м/сек*^{2}. Сопротивление от трения в осях составляет 10 *кГ* на тонну веса поезда и принимается не зависящим от скорости. Определить развиваемую тепловозом мощность в момент $t=10$ *сек*, если в момент $t=0$ скорость поезда равнялась 18 *м/сек*.

Ответ: 1620 *л. с.* = 1192 *квт*.

30.9. Брус весом Q начинает двигаться с начальной скоростью v_0 по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние s. Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению.

Ответ: $f=\frac{v_0^2}{2gs}$.

30.10 (779). Сопротивление, встречаемое железнодорожной платформой при движении и происходящее от трения в осях, равно 15 *кГ*, а вес ее 6 *т*. Рабочий уперся в покоящуюся платформу и покатил ее по горизонтальному и прямолинейному участку пути, производя давление, равное 25 *кГ*. Пройдя 20 *м*, он предоставил платформе катиться самой. Вычислить, пренебрегая сопротивлением воздуха и трением колес о рельсы, наибольшую скорость v_{max} платформы во время движения, а также весь путь s, пройденный ею до остановки.

Ответ: $v_{max}=0,808$ *м/сек*; $s=33^1/_3$ *м*.

30.11 (780). Гвоздь вбивается в стену, оказывающую сопротивление $R=70$ *кГ*. При каждом ударе молотка гвоздь углубляется в стену на длину $l=0,15$ *см*. Определить вес молотка P, если при ударе о шляпку гвоздя он имеет скорость $v=1,25$ *м/сек*.

Ответ: $P=1,37$ *кГ*.

30.12 (781). Метеорит, упавший на Землю в 1751 г., весил 39 *кГ*. Падая, он углубился в почву на глубину $l=1,875$ *м*. Опытное исследование показало, что почва в месте падения метеорита оказывает проникающему в нее телу сопротивление $F=50$ *т*.

С какой скоростью метеорит достиг поверхности Земли? С какой высоты должен он был упасть без начальной скорости, чтобы у поверхности Земли приобрести указанную скорость? Считаем силу тяжести постоянной и пренебрегаем сопротивлением воздуха.

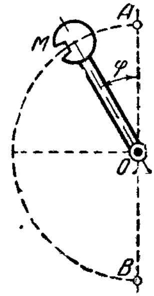
Ответ: $v=217$ *м/сек*; $H=2390$ *м*.

30.13 (782). Незаторможенный поезд весом $P=500$ *т*, двигаясь с выключенным двигателем, испытывает при движении сопротивление

$$R=(765+51v)\ кГ,$$

где v — скорость в *м/сек*. Зная начальную скорость поезда $v_0=15$ *м/сек*, определить, пройдя какое расстояние поезд остановится.

Ответ: $s=4,6$ *км*.



К задаче 30.14.

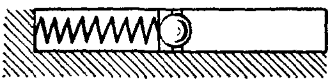
30.14 (783). Главную часть прибора для испытания материалов ударом составляет тяжелая стальная отливка M, прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную точку, для которой расстояние $OM = 0{,}981$ *м*. Определить скорость v этой точки в наинизшем положении B, если она падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.

Ответ: $v = 6{,}2$ *м/сек*.

30.15 (784). Написать выражение потенциальной энергии упругой рессоры, прогибающейся на 1 *см* от нагрузки в 0,4 *т*, предполагая, что прогиб x возрастает прямо пропорционально нагрузке.

Ответ: $V = 0{,}2x^2 + \text{const}$.

30.16 (785). Пружина самострела имеет в ненапряженном состоянии длину 20 *см*. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 *см*, равна 0,2 *кГ*. С какой скоростью v вылетит из самострела шарик весом 30 *Г*, если пружина была сжата до длины 10 *см*? Самострел расположен горизонтально.



К задаче 30.16.

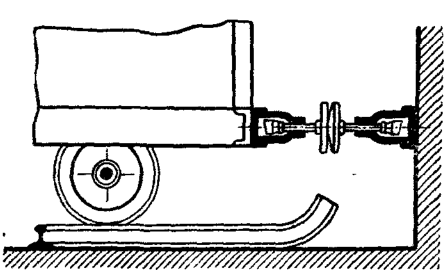
Ответ: $v = 8{,}1$ *м/сек*.

30.17 (786). Статический прогиб балки, загруженной посередине грузом Q, равен 2 *мм*. Найти наибольший прогиб балки, пренебрегая ее массой, в двух случаях: 1) когда груз Q положен на неизогнутую балку и опущен без начальной скорости; 2) когда груз Q падает на середину неизогнутой балки с высоты 10 *см* без начальной скорости.

При решении задачи следует иметь в виду, что сила, действующая на груз со стороны балки, пропорциональна ее прогибу.

Ответ: 1) 4 *мм*; 2) 22,1 *мм*.

30.18 (787). Вагон весом в 16 *т* наталкивается со скоростью 2 *м/сек* на два упорных буфера. Определить наибольшее сжатие пружин упорных буферов при ударе вагона, если известно, что вагонные и буферные пружины одинаковы и сжимаются на 1 *см* под действием силы в 5 *т*.

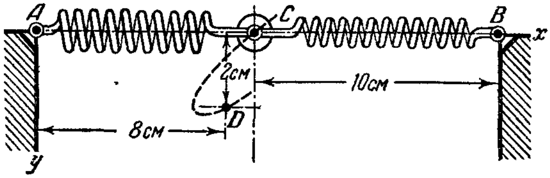


К задаче 30.18.

Ответ: 5,7 *см*.

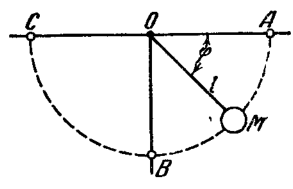
30.19 (788). Две ненапряженные пружины AC и BC, расположенные на горизонтальной прямой Ax, прикреплены шарнирами к неподвижным точкам A и B, а в точке C — к гире весом 1,962 *кГ*. Пружина AC сжимается на 1 *см* силой в 2 *кГ*, а пружина CB вытягивается на 1 *см* силой 4 *кГ*. Расстояния: $AC = BC = 10$ *см*. Гире сообщена скорость $v_0 = 2$ *м/сек* в таком направлении, что при последующем движении она проходит через точку D, координаты которой $x_0 = 8$ *см*, $y_0 = 2$ *см*, если за начало координат принять точку A и координатные оси направить, как указано на чертеже. Определить скорость гири в момент прохождения ее через точку D, лежащую в вертикальной плоскости xy.

Ответ: $v = 1{,}78$ *м/сек.*



К задаче 30.19.

30.20 (789). Груз M весом P, подвешенный в точке O на невесомой и нерастяжимой нити длиной l, начинает двигаться в вертикальной плоскости без начальной скорости из точки A; при отсутствии сопротивлений груз M достигнет положения C, где его скорость обратится в нуль. Приняв потенциальную энергию, обусловленную силой тяжести груза M в точке B, равной нулю, построить графики изменений кинетической и потенциальной энергии, а также их суммы в зависимости от угла φ.



К задаче 30.20.

Ответ: Две синусоиды и прямая, имеющие уравнения

$$T = Pl \sin\varphi, \qquad V = Pl(1 - \sin\varphi),$$
$$T + V = Pl.$$

30.21 (790). Материальная точка с массой m совершает гармонические колебания по прямой Ox под действием упругой восстанавливающей силы по следующему закону: $x = a\sin(kt + \beta)$. Пренебрегая сопротивлениями, построить графики изменения кинетической энергии T и потенциальной энергии V движущейся точки в зависимости от координаты x; в начале координат $V = 0$.

Ответ: Оба графика — параболы, имеющие уравнения

$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2); \quad V = \frac{mk^2x^2}{2}.$$

30.22 (791). Какую вертикальную силу, постоянную по величине и направлению, надо приложить к материальной точке, чтобы при падении точки на Землю с высоты, равной радиусу Земли, эта сила сообщила точке такую же скорость, как сила притяжения к Земле, обратно пропорциональная квадрату расстояния точки до центра Земли?

Ответ: $P/2$, где P — вес точки на поверхности Земли.

30.23 (792). Горизонтальная пружина, на конце которой прикреплена материальная точка, сжата силой P и находится в покое. Внезапно сила P меняет направление на прямо противоположное. Определить, пренебрегая массой пружины, во сколько раз получающееся при этом наибольшее растяжение l_2 больше первоначального сжатия l_1.

Ответ: $l_2/l_1 = 3$.

30.24 (793). Тело брошено с поверхности Земли вверх по вертикальной линии с начальной скоростью v_0.

Определить высоту H поднятия тела, принимая во внимание, что сила тяжести изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли; сопротивлением воздуха пренебрегаем. Радиус Земли $R=6370$ *км*, $v_0=1$ *км/сек*.

Ответ: $H=\frac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}=51$ *км*.

30.25 (794). Две частицы заряжены положительным электричеством; заряд первой частицы q_1 равен 100 абсолютным электростатическим единицам CGS, заряд второй $q_2=0{,}1q_1$; первая частица остается неподвижной, а вторая движется вследствие силы отталкивания F от первой частицы. Масса второй частицы равна 1 *г*, начальное расстояние от первой частицы равно 5 *см*, а начальная скорость равна нулю. Определить верхний предел для скорости движущейся частицы, принимая во внимание действие только одной силы отталкивания $F=\frac{q_1q_2}{r^2}$, где r — расстояние между частицами.

Ответ: 20 *см/сек*.

30.26 (795). Определить скорость v_0, которую нужно сообщить по вертикали вверх телу, находящемуся на поверхности Земли, для того, чтобы оно поднялось на высоту, равную земному радиусу; при этом нужно принять во внимание только силу притяжения Земли, которая изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли. Радиус Земли равен $637\cdot 10^6$ *см*, ускорение силы притяжения на поверхности Земли равно 980 *см/сек*^{2}.

Ответ: 7,9 *км/сек*.

30.27 (796). Найти, с какой скоростью v_0 нужно выбросить снаряд с поверхности Земли по направлению к Луне, чтобы он достиг точки, где силы притяжения Земли и Луны равны, и остался в этой точке в равновесии. Движением Земли и Луны и сопротивлением воздуха пренебрегаем. Ускорение силы тяжести у поверхности Земли $g=9{,}8$ *м/сек*^{2}. Отношение масс Луны и Земли $m:M=1:80$; расстояние между ними $d=60R$, где считаем $R=6000$ *км* (радиус Земли).

Коэффициент f, входящий в формулу для величины силы всемирного тяготения, находим из уравнения

$$m_1g=m_1f\left[\frac{M}{R^2}-\frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

Ответ: $$v_0^2=\frac{2gR\,(d-R)}{d}\,\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R)+R}=\frac{59}{30}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}gR,$$

где $\alpha=\frac{1}{59\sqrt{80}}$, или $v_0=10{,}75$ *км/сек*.

30.28 (797). Шахтная клеть движется вниз со скоростью $v=12$ *м/сек*. Вес клети $P=6$ *т*.

Какую силу трения между клетью и стенами шахты должен развить предохранительный парашют, чтобы остановить клеть на протяжении пути $s=10$ *м*, если канат, удерживающий клеть, оборвался? Силу трения считать постоянной.

Ответ: $F=P\left(1+\frac{v_0^2}{2gs}\right)=10{,}3$ *т*.

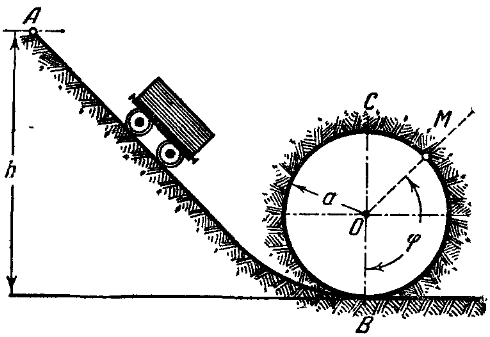
§ 31. Смешанные задачи

31.1 (798). Груз весом 1 *кГ* подвешен на нити длиной 50 *см* в неподвижной точке *O*. В начальном положении груз отклонен от вертикали на угол 60° и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 210 *см/сек*. Определить: 1) натяжение нити в наинизшем положении; 2) отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

Ответ: 1) 2,9 *кГ*;
2) 47,5 *см*.

31.2 (799). Сохраняя условия предыдущей задачи, кроме величины скорости v_0, найти, при какой величине скорости v_0 груз будет проходить всю окружность.

Ответ: $v_0 > 443$ *см/сек*.

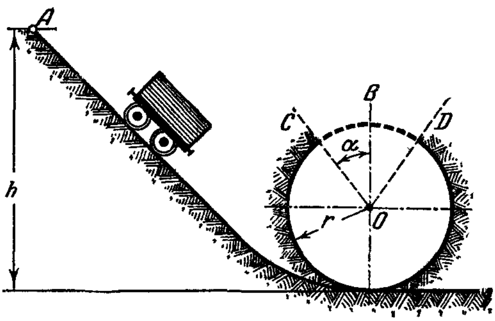


К задаче 31.3.

31.3 (800). По рельсам, положенным по пути *AB* и образующим затем петлю в виде кругового кольца *BC* радиуса *a*, скатывается вагонетка весом *P*.

С какой высоты *h* нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него? Определить давление *N* вагонетки на кольцо в точке *M*, для которой угол $MOB=\varphi$.

Ответ: $h \geqslant 2{,}5a$;
$N=P\left(\frac{2h}{a}-2+3\cos\varphi\right)$.



К задаче 31.4.

31.4 (801). Путь, по которому движется вагонетка, скатываясь из точки *A*, образует разомкнутую петлю радиуса *r*, как показано на чертеже: $\angle BOC=\angle BOD=\alpha$.

Найти, с какой высоты *h* должна скатываться вагонетка без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю петлю, а также то значение угла α, при котором эта высота *h* наименьшая.

Указание. На участке DC центр тяжести вагонетки совершает параболическое движение.

Ответ: $h = r\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $h_{\min}$ при $\alpha = 45°$.

31.5 (802). Тяжелая стальная отливка весом $P = 20$ *кГ* прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O. Отливка падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью. Пренебрегая массой стержня, определить наибольшее давление на ось. (См. чертеж к задаче 30.14.)

Ответ: 100 *кГ*.

31.6 (803). Какой угол с вертикалью составляет вращающийся стержень (в предыдущей задаче) в тот момент, когда давление на ось равно нулю?

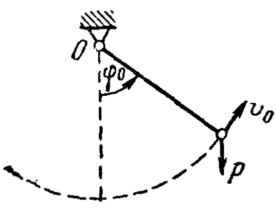
Ответ: $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

31.7 (804). Парашютист весом 70 *кГ* выбросился из самолета и, пролетев 100 *м*, раскрыл парашют. Найти силу натяжения стропов, на которых человек был подвешен к парашюту, если в течение первых пяти секунд с момента раскрытия парашюта, при постоянной силе сопротивления движению, скорость парашютиста уменьшилась до 4,3 *м/сек*. Сопротивлением воздуха движению человека пренебречь.

Ответ: 127,4 *кГ*.

31.8 (805). За 500 *м* до станции, стоящей на пригорке высотой 2 *м*, машинист поезда, идущего со скоростью 12 *м/сек*, закрыл пар и начал тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если вес поезда равен 1000 *т*, а сопротивление трения 2 *т*?

Ответ: 8679 *кГ*.



К задаче 31.9.

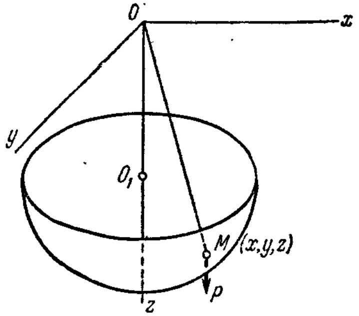
31.9. Тяжелая отливка веса P прикреплена к стержню, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси O и отклонен от вертикали на угол φ_0. Из этого начального положения отливке сообщают начальную скорость v_0 (см. чертеж). Определить усилие в стержне как функцию угла отклонения стержня от вертикали, пренебрегая массой стержня. Длина стержня l.

Ответ: $N = 3P\cos\varphi - 2P\cos\varphi_0 + \frac{P}{g}\frac{v_0^2}{l}$.

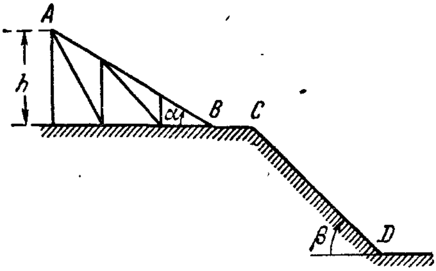
Если $N > 0$, стержень растянут; если $N < 0$, стержень сжат.

31.10 (806). Сферический маятник состоит из нити OM длиной l, прикрепленной одним концом к неподвижной точке O, и тяжелой точки M весом P, прикрепленной к другому концу нити. Точку M отклонили из положения равновесия так, что ее координаты стали: при $t = 0$ $x = x_0$, $y = 0$, и сообщили ей начальную скорость: $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_0$, $\dot{z}_0 = 0$. Определить, при каком соотношении начальных условий точка M будет описывать окружность в горизонтальной плоскости и каково будет время обращения точки M по этой окружности.

Ответ: $v_0 = x_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}$; $T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}$.

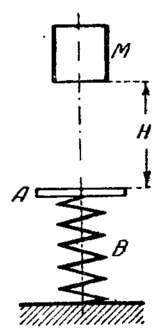


К задаче 31.10.



К задаче 31.11.

31.11 (807). Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC, длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $v_y = 1$ *м/сек*. Высота эстакады $h = 9$ *м*, коэффициент трения лыж о снег $f = 0{,}08$, линия приземления CD образует угол $\beta = 45°$ с горизонтом. Определить дальность l полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха.



К задаче 31.12.

Примечание. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки отрыва C до точки приземления лыжника на линии CD.

Ответ: $l = 47{,}4$ *м*.

31.12 (808). Груз M весом P падает без начальной скорости с высоты H на плиту A, лежащую на спиральной пружине B. От действия упавшего груза M пружина сжимается на величину h. Не учитывая веса плиты A и сопротивлений, вычислить время T сжатия пружины на величину h и импульс S упругой силы пружины за время T.

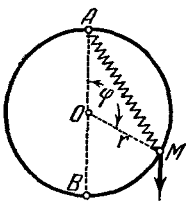
Ответ: $T = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $S = P\left(T + \sqrt{\frac{2H}{g}}\right)$,

где $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$, $k = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}$.

31.13 (809). При разрыве маховика одна из его частей, наиболее удаленная от места катастрофы, оказалась на расстоянии $s = 280$ *м* от первоначального положения. Пренебрегая сопротивлением воздуха при движении указанной части из первоначального положения в конечное, лежащее в той же горизонтальной плоскости, найти наименьшее возможное значение угловой скорости маховика в момент катастрофы, если радиус маховика $R=1{,}75$ *м*.

Ответ: $n=286$ *об/мин*.

31.14 (810). Груз M, подвешенный на пружине к верхней точке A круглого кольца, расположенного в вертикальной плоскости, падает, скользя по кольцу без трения. Найти, какова должна быть жесткость пружины для того, чтобы давление груза на кольцо в нижней точке B равнялось нулю при следующих данных: радиус кольца 20 *см*, вес груза 5 *кГ*, в начальном положении груза расстояние AM равно 20 *см* и пружина имеет натуральную длину; начальная скорость груза равна нулю; весом пружины пренебрегаем.



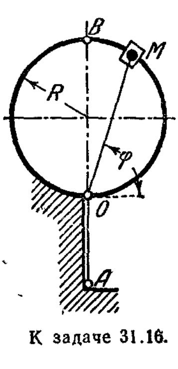
К задаче 31.14.

Ответ: Пружина должна удлиняться **на** 1 *см* при действии силы, равной 0,5 *кГ*.

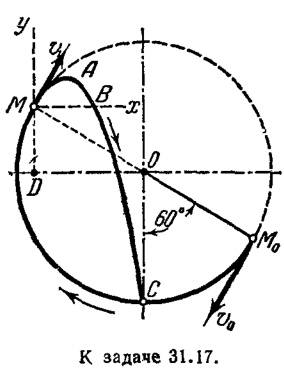
31.15 (811). Определить давление груза M на кольцо в нижней точке B (чертеж предыдущей задачи) при следующих данных: радиус кольца 20 *см*, вес груза 7 *кГ*; в начальном положении груза расстояние AM равно 20 *см*, причем пружина растянута и длина ее вдвое более натуральной длины, которая равна 10 *см*; жесткость пружины такова, что она удлиняется на 1 *см* при действии силы в 0,5 *кГ*; начальная скорость груза равна нулю; весом пружины пренебрегаем.

Ответ: Давление направлено вверх и равно 7 *кГ*.

31.16 (812). Гладкое тяжелое кольцо M весом Q может скользить без трения по дуге окружности радиуса R *см*, расположенной в вертикальной плоскости. К кольцу привязана упругая нить MOA, проходящая через гладкое неподвижное кольцо O и закрепленная в точке A. Принять, что натяжение нити равно нулю, когда кольцо M находится в точке O, и что для вытягивания нити на 1 *см* нужно приложить силу c. В начальный момент кольцо находится в точке B в неустойчивом равновесии и при ничтожно малом толчке начинает скользить по окружности. Определить давление N, производимое кольцом на окружность.



К задаче 31.16.



К задаче 31.17.

Ответ: $N=2Q+cR+3(Q+cR)\cos 2\varphi$; давление направлено наружу при $N>0$, внутрь при $N<0$.

31.17 (813). Груз подвешен на нити длиной 50 *см* в неподвижной точке O. В начальном положении M_0 груз отклонен от вертикали на угол 60° и ему сообщена скорость v_0 в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная 350 *см/сек.*

1) Найти то положение M груза, в котором натяжение нити будет равно нулю, и скорость v_1 в этом положении.

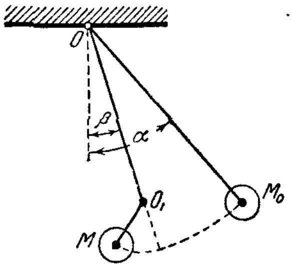
2) Определить траекторию последующего движения груза до того момента, когда нить будет опять натянута, и время, в течение которого точка пройдет эту траекторию.

Ответ: 1) Положение M находится над горизонталью точки O на расстоянии $MD = 25$ *см*; $v_1 = 157$ *см/сек.*

2) Парабола $MABC$, уравнение которой, отнесенное к осям Mx и My, будет $y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2$; груз описывает эту параболу в течение 0,55 *сек.*

31.18 (814). Математический маятник установлен на самолете, который поднимается на высоту 10 *км.* На какую часть длины надо уменьшить длину нити маятника, чтобы период малых колебаний маятника на этой высоте остался без изменений? Силу тяжести считать обратно пропорциональной квадрату расстояния до центра Земли.

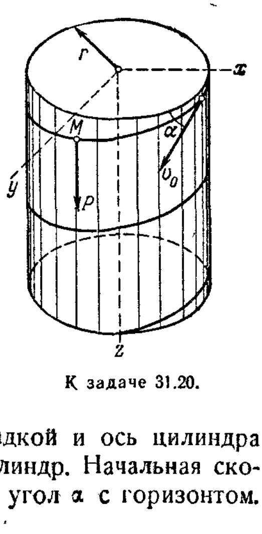
Ответ: На $0{,}00313l$, где l — длина нити на поверхности Земли.



К задаче 31.19.

31.19 (815). В неподвижной точке O посредством нити OM длиной l подвешен груз M с массой m. В начальный момент нить OM составляет с вертикалью угол α и скорость груза M равна нулю. При последующем движении нить встречает тонкую проволоку O_1, направление которой перпендикулярно к плоскости движения груза, а положение определяется полярными координатами: $h = OO_1$ и β. Определить наименьшее значение угла α, при котором нить OM после встречи с проволокой будет на нее навиваться, а также изменение натяжения нити в момент ее встречи с проволокой. Толщиной проволоки пренебрегаем.

Ответ: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$; натяжение нити увеличивается на величину $2mg\,\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2} + \cos\beta\right)$.



К задаче 31.20.

31.20 (816). Тяжелая точка M, вес которой равен P, движется по внутренней поверхности круглого цилиндра радиуса r. Считая поверхность цилиндра абсолютно гладкой и ось цилиндра вертикальной, определить давление точки на цилиндр. Начальная скорость точки равна по величине v_0 и составляет угол α с горизонтом.

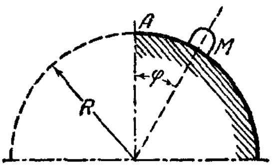
Ответ: $N = \frac{Pv_0^2\cos^2\alpha}{gr}$.

31.21 (817). В предыдущей задаче составить уравнения движения точки, если в начальный момент точка находилась на оси x.

Ответ: $x = r\cos\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$; $y = r\sin\left[\frac{v_0\cos\alpha}{r}t\right]$;

$$z = v_0 t\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}.$$

31.22 (818). Камень M, находящийся на вершине A гладкого полусферического купола радиуса R, получает начальную горизонтальную скорость v_0. В каком месте камень покинет купол? При каких значениях v_0 камень сойдет с купола в начальный момент? Сопротивлением движению камня по куполу пренебречь.



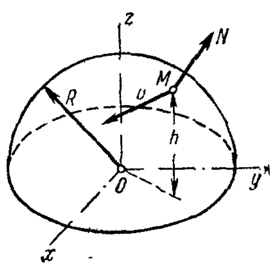
К задаче 31.22.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$;

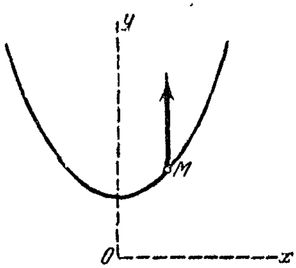
$$v_0 \geqslant \sqrt{gR}.$$

31.23 (819). Точка M с массой m движется по гладкой поверхности полусферического купола радиуса R. Считая, что на точку действует сила тяжести, параллельная оси z, и зная, что в начальный момент точка имела скорость v_0 и находилась на высоте h_0 от основания купола, определить давление точки на купол, когда она будет на высоте h от основания купола.

Ответ: $N = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right)$.



К задаче 31.23.



К задаче 31.24.

31.24 (820). Точка M с массой m движется по цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

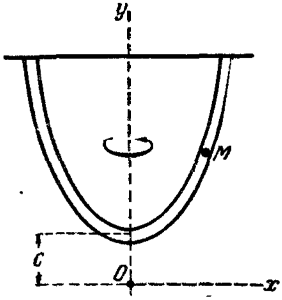
под действием силы отталкивания, параллельной оси Oy, направленной от оси Ox и равной kmy. В момент $t = 0$ $x = 1$ *м*, $\dot{x} = 1$ *м/сек*.

Определить давление N точки на кривую и движение точки при $k = 1$ *сек*$^{-2}$ и $a = 1$ *м* (силой тяжести пренебрегаем). Радиус кривизны цепной линии равен y^2/a.

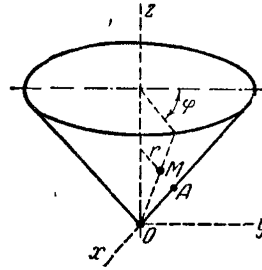
Ответ: $N = 0$; $x = (1 + t)$ *м*.

31.25 (821). По какой плоской кривой следует изогнуть трубку, чтобы помещенный в нее в любом месте шарик оставался по отношению к трубке в равновесии, если трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oy?

Ответ: По параболе $y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + c$.



К задаче 31.25.



К задаче 31.26.

31.26 (822). Точка M с массой $m = 1$ *г* движется по гладкой поверхности круглого конуса, угол раствора которого $2\alpha = 90°$, под влиянием силы отталкивания от вершины O, пропорциональной расстоянию: $F = c \cdot OM$ *дин*, где $c = 1$ *дин/см*. В начальный момент точка M находится в точке A, расстояние OA равно $a = 2$ *см*, начальная скорость $v_0 = 2$ *см/сек* и направлена параллельно основанию конуса. Определить движение точки M (силой тяжести пренебрегаем).

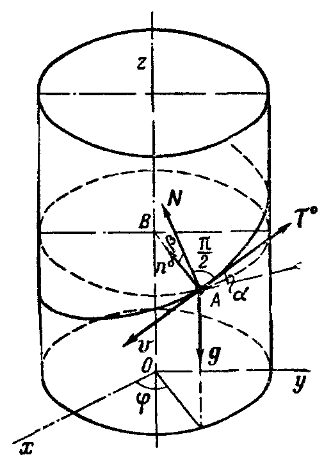
Положение точки M определяем координатой z и полярными координатами r и φ в плоскости, перпендикулярной к оси Oz; уравнение поверхности конуса $r^2 - z^2 = 0$.

Ответ: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$;

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2t}.$$

31.27 (823). При условиях предыдущей задачи, считая ось конуса направленной по вертикали вверх и учитывая силу тяжести, определить давление точки на поверхность конуса.

Ответ: $N = m \sin\alpha\left[g + \frac{a^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{2r^3}\right]$.



К задаче 31 28.

31.28 (824). Материальная точка A под действием силы тяжести движется по шероховатой винтовой поверхности, ось которой Oz вертикальна; поверхность задана уравнением $z = a\varphi + f(r)$; коэффициент трения точки о поверхность равен k. Найти условие, при котором движение точки происходит на постоянном расстоянии от оси $AB = r_0$, т. е. происходит по винтовой линии, а также найти скорость этого движения, предполагая, что $a = \text{const}$.

Указание. Для решения задачи целесообразно воспользоваться системой естественных осей, проектируя уравнение движения на касательную, главную нормаль и бинормаль винтовой линии в точке A. На чертеже угол между нормальной компонентой N реакции винтовой поверхности и ортом главной нормали n° обозначен через β.

Ответ: Движение по винтовой линии возможно при условии

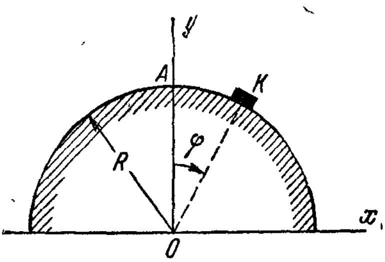
$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0,$$

где $\operatorname{tg}\alpha = a/r_0$; скорость движения $v=\sqrt{gr_0f'(r_0)}$.

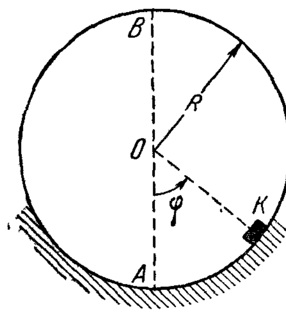
31.29. Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в верхней точке A шероховатой поверхности неподвижного полуцилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно, начав движение, остановилось на поверхности цилиндра, если коэффициенты трения скольжения при движении и покое одинаковы и равны f?

Ответ: $v_0 \leqslant \sqrt{\dfrac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}\,e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}$,

где $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f$.



К задаче 31.29.



К задаче 31.30.

31.30. Тело K, размерами которого можно пренебречь, установлено в нижней точке A внутренней части шероховатой поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Какую начальную горизонтальную скорость v_0, направленную по касательной к цилиндру, нужно сообщить телу K, чтобы оно достигло верхней точки B цилиндра? Коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $v_0 \geqslant \sqrt{\dfrac{gR}{1+4f^2}\left[2(1-2f^2)+3e^{2\pi f}\right]}$.

§ 32. Колебательное движение

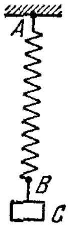
а) Свободные колебания

32.1 (825). Пружина AB, закрепленная одним концом в точке A, такова, что для удлинения ее на 1 *см* необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу в 20 *Г*. В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирю C

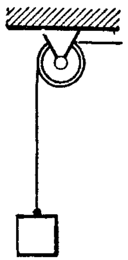
весом 100 $Г$ и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая ма́ссой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение гири к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.

Ответ: $x = -5 \cos 14t$ *см*;

$a = 5$ *см*; $T = 0{,}45$ *сек*.



К задаче 32.1.


К задаче 32.2.

32.2 (826). При равномерном спуске груза весом $Q = 2$ *т* со скоростью $v = 5$ *м/сек* произошла неожиданная задержка верхнего конца троса, на котором спускался груз, благодаря защемлению троса в обойме блока. Пренебрегая весом троса, определить его наибольшее натяжение при последующих колебаниях груза, если коэффициент жесткости троса $c = 4$ *т/см*.

Ответ: $F = 47{,}1$ *т*.

32.3 (827). Определить наибольшее натяжение троса в предыдущей задаче, если между грузом и тросом введена упругая пружина с коэффициентом жесткости $c_1 = 0{,}4$ *т/см*.

Ответ: $F = 15{,}6$ т.

32.4 (828). Груз Q, падая с высоты $h = 1$ *м* без начальной скорости, ударяется об упругую горизонтальную балку в ее середине; концы балки закреплены. Написать уравнение дальнейшего движения груза на балке, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия груза на балке, если статический прогиб балки в ее середине при указанной нагрузке равен 0,5 *см*; массой балки пренебрегаем.

Ответ: $x = (-0{,}5 \cos 44{,}3t + 10 \sin 44{,}3t)$ *см*.

32.5 (829). На каждую рессору вагона приходится нагрузка P *кГ*; под этой нагрузкой рессора при равновесии прогибается на 5 *см*. Определить период T собственных колебаний вагона на рессорах. Упругое сопротивление рессоры пропорционально стреле ее прогиба.

Ответ: $T = 0{,}45$ *сек*.

32.6 (830). Определить период свободных колебаний фундамента машины, поставленного на упругий грунт, если вес фундамента с машиной $Q = 90$ *т*, площадь подошвы фундамента $S = 15$ *м*^{2}, коэффициент жесткости грунта $c = \lambda S$, где $\lambda = 3$ *кГ/см*^{3} — так называемая удельная жесткость грунта.

Ответ: $T = 0{,}09$ *сек*.

32.7 (831). Найти период свободных вертикальных колебаний корабля в спокойной воде, если вес корабля P *т*, площадь его горизонтального сечения S *м*^{2} и не зависит от высоты сечения; вес 1 *м*^{3} воды равен 1 *т*. Силами, обусловленными вязкостью воды, пренебречь.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{P}{Sg}}$.

32.8. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения корабля, если он был спущен на воду с нулевой вертикальной скоростью.

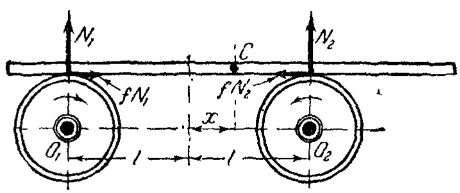
Ответ: $y = -\frac{P}{S}\cos\sqrt{\frac{Sg}{P}}\,t$ *м*.

32.9 (836). Груз, вес которого равен P *н*, подвешен на упругой нити к неподвижной точке. Выведенный из положения равновесия, груз начинает совершать колебания. Выразить длину нити x в функции времени и найти, какому условию должна удовлетворять начальная длина ее x_0, чтобы во время движения гири нить оставалась натянутой. Натяжение нити пропорционально удлинению; длина ее в нерастянутом состоянии равна l; от действия статической нагрузки, равной q *н*, нить удлиняется на 1 *см*. Начальная скорость груза равна нулю.

Ответ: $x = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}\,t\right)$;

$l \leqslant x_0 \leqslant l + \frac{2P}{q}$.

32.10 (837). На два вращающихся в противоположные стороны, указанные на чертеже, цилиндрических шкива одинакового радиуса свободно положен однородный стержень; центры шкивов O_1 и O_2 находятся на горизонтальной прямой O_1O_2; расстояние $O_1O_2 = 2l$; стержень приводится в движение силами трения, развивающимися в точках касания его со шкивами; эти силы пропорциональны давлению стержня на шкив, причем коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен f.



К задаче 32.10.

1) Определить движение стержня после того, как мы сдвинем его из положения симметрии на x_0 при $v_0 = 0$.

2) Найти коэффициент трения f, зная, что период колебаний T стержня при $l = 25$ *см* равен 2 *сек*.

Ответ: 1) $x = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t\right)$; 2) $f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25$.

32.11 (838). К одной и той же пружине подвесили сначала груз весом p, а во второй раз груз весом $3p$. Определить, во сколько раз изменится период колебаний. Зная коэффициент жесткости пружины c, а также начальные условия (грузы подвешивались к концу нерастянутой пружины и отпускались без начальной скорости), найти уравнения движения грузов.

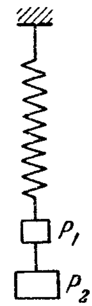
Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$; $x_1 = -\frac{p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{p}}\,t$; $x_2 = -\frac{3p}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{3p}}\,t$.

32.12. К пружине жесткостью $c = 2$ *кГ/см* сначала подвесили груз $P_1 = 6$ *кГ*, а затем груз $P_2 = 12$ *кГ* (вместо первого груза).

Определить частоты и периоды колебаний грузов.

Ответ: $k_1 = 18{,}1$ *сек*$^{-1}$, $k_2 = 12{,}8$ *сек*$^{-1}$;
$T_1 = 0{,}348$ *сек*, $T_2 = 0{,}49$ *сек*.

32.13. К пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 20$ *Г/см*, подвешены два груза весом $P_1 = 0{,}5$ *кГ* и $P_2 = 0{,}8$ *кГ*. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз P_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту, круговую частоту и период колебаний оставшегося груза.



К задаче 32.13.

Ответ: $x = 40 \cos 6{,}26t$ *см*; $T = 1$ *сек*; $f = 1$ *гц*; $k = 2\pi$ *сек*$^{-1}$.

32.14. Груз весом $P_1 = 2$ *кГ*, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c = 0{,}1$ *кГ/см*, находится в равновесии. Каковы будут уравнение движения и период колебаний груза, если к грузу P_1 добавить груз $P_2 = 0{,}8$ *кГ*? (См. чертеж к задаче 32.13.)

Ответ: $x = -8 \cos 5{,}91t$; $T = 1{,}06$ *сек*.

32.15. Груз весом 4 *кГ* подвесили сначала к пружине с жесткостью $c_1 = 2$ *кГ/см*, а затем к пружине с жесткостью $c_2 = 4$ *кГ/см*. Найти отношение частот и отношение периодов колебаний груза.

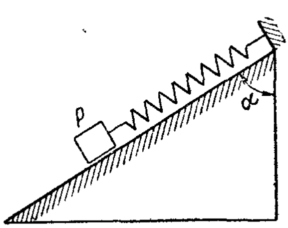
Ответ: $\frac{k_1}{k_2} = 0{,}706$; $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}41$.

32.16. Тело весом P находится на наклонной плоскости, составляющей угол α с вертикалью. К телу прикреплена пружина, жесткость которой c. Пружина параллельна наклонной плоскости.

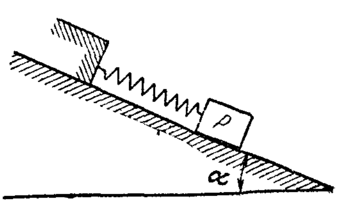
Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость v_0, направленная вниз по наклонной плоскости.

Начало координат взять в положении статического равновесия.

Ответ: $x = \frac{v_0}{k} \sin kt - \frac{P \cos \alpha}{c} \cos kt$, где $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$.



К задаче 32.16.



К задаче 32.17.

32.17. На гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = 30°$, находится прикрепленный к пружине груз весом P. Статическое удлинение пружины равно f.

Определить колебания груза, если в начальный момент пружина была растянута из ненапряженного состояния на длину, равную $3f$, и груз отпущен без начальной скорости.

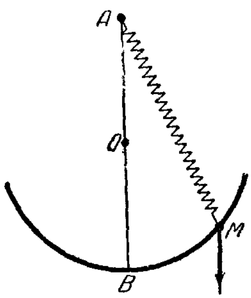
Ответ: $x = 2f\cos\left(\sqrt{\frac{g}{f}\sin\alpha}\cdot t\right)$.

32.18 (839). Тело весом $Q = 12$ *кГ*, прикрепленное к концу пружины, совершает гармонические колебания. При помощи секундомера установлено, что тело совершило 100 полных колебаний за 45 *сек*. После этого к концу пружины добавочно прикрепили груз весом $Q_1 = 6$ *кГ*.

Определить период колебаний двух грузов на пружине.

Ответ: $T_1 = T\sqrt{\frac{Q+Q_1}{Q}} = 0{,}55$ *сек*.

32.19. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения одного груза Q и двух грузов $(Q+Q_1)$, если в обоих случаях грузы были подвешены к концу нерастянутой пружины.



К задаче 32.20.

Ответ: 1) $x = -5{,}02\cos 14t$ *см*, 2) $x_1 = -7{,}53\cos 11{,}4t$ *см*, где x и x_1 отсчитываются соответственно от каждого из двух положений статического равновесия.

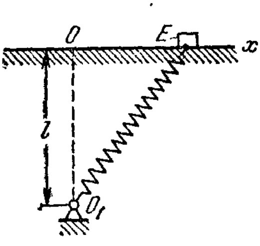
32.20 (840). Груз M, подвешенный к неподвижной точке A на пружине, совершает малые гармонические колебания в вертикальной плоскости, скользя без трения по дуге окружности, диаметр которой AB равен l; натуральная длина пружины a; жесткость пружины такова, что при действии силы, равной весу груза M, она получает удлинение, равное b. Определить период T колебаний в том случае, когда $l = a + b$; массой пружины пренебрегаем и считаем, что при колебаниях она остается растянутой.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

32.21. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза M, если в начальный момент угол $BAM = \varphi_0$ и точке M сообщили начальную скорость v_0, направленную по касательной к окружности вниз.

Ответ:

$$\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{v_0}{\sqrt{lg}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$



К задаче 32 22.

32.22. Тело E, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости c, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна l_0; в положении равновесия тела пружина имеет конечный предварительный натяг, равный $F_0 = c(l - l_0)$, где $l = OO_1$. Учитывая в горизонтальной составляющей упругой силы пружины лишь линейные члены относительно отклонения тела от положения равновесия, определить период малых колебаний тела.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_0}}$.

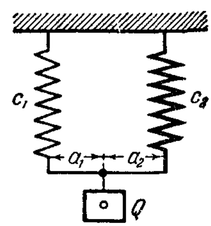
32.23 (841). Материальная точка весом P подвешена к концу нерастянутой пружины с коэффициентом жесткости c и отпущена с начальной скоростью v_0, направленной вниз. Найти уравнение движения и период колебаний точки, если в момент времени, когда точка находилась в крайнем нижнем положении, к ней прикладывают силу $Q=\text{const}$, направленную вниз.

Начало координат выбрать в положении статического равновесия, т. е. на расстоянии P/c от конца нерастянутой пружины.

Ответ: $x=\frac{Q}{c}+\left[\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{P}{c}\right)^2}-\frac{Q}{c}\right]\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}t$,

где t отсчитывается от момента времени, когда начала действовать сила Q; $T=2\pi\sqrt{P/cg}$.

32.24 (832). Определить период свободных колебаний груза весом Q, прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, одинаковы.



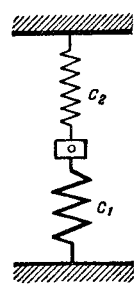
К задаче 32.24.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$; $c=c_1+c_2$; расположение груза таково, что $a_1/a_2=c_2/c_1$.

32.25. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если его подвесили к нерастянутым пружинам и сообщили ему начальную скорость v_0, направленную вверх.

Ответ:
$$x=-\frac{Q}{c_1+c_2}\cos\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}t-v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\sin\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}t.$$

32.26 (833). Определить период свободных колебаний груза весом Q, зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2.



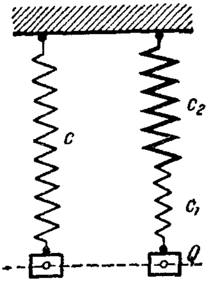
К задаче 32.26

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{Q}{g(c_1+c_2)}}$.

32.27. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в положении равновесия ему сообщили скорость v_0, направленную вниз.

Ответ: $x=v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\sin\sqrt{\frac{(c_1+c_2)g}{Q}}t$.

32.28 (834). Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2, и указать также период колебаний груза весом Q, подвешенного на указанной двойной пружине.



К задаче 32.28.

Ответ: $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$; $\quad T = 2\pi \sqrt{\frac{Q(c_1 + c_2)}{g c_1 c_2}}$.

32.29. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения груза, если в начальный момент он находился ниже положения равновесия на расстоянии x_0 и ему сообщили скорость v_0, направленную вверх.

Ответ: $x = x_0 \cos \sqrt{\frac{c_1 c_2 g}{(c_1 + c_2) Q}}\, t -$

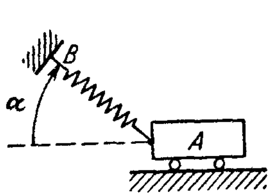
$- v_0 \sqrt{\frac{(c_1 + c_2) Q}{c_1 c_2 g}} \sin \sqrt{\frac{c_1 c_2 g}{(c_1 + c_2) Q}}\, t.$

32.30. Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости $c_1 = 1$ *кГ/см* и $c_2 = 3$ *кГ/см*. Указать период колебаний, амплитуду и уравнение движения груза весом $Q = 5$ *кГ*, подвешенного на указанной двойной пружине, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 5 *см* вниз и ему была сообщена начальная скорость 49 *см/сек*, направленная также вниз.

Ответ: $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 0{,}75$ *кГ/см*; $T = 0{,}52$ *сек*; $a = 6{,}45$ *см*;

$x = 5 \cos 7\sqrt{3}\, t + \frac{7}{\sqrt{3}} \sin 7\sqrt{3}\, t.$

32.31. Тело A, масса которого равна m, может перемещаться по горизонтальной прямой. К телу прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой c. Второй конец пружины укреплен в неподвижной точке B. При угле $\alpha = \alpha_0$ пружина не деформирована. Определить частоту и период малых колебаний тела.



К задаче 32.31.

Ответ: $k = \sqrt{\frac{c \cos^2 \alpha_0}{m}}$;

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c \cos^2 \alpha_0}}$.

32.32. Точка A, масса которой равна m, прикреплена пружинами, как указано на рисунке. В исходном положении точка находится в равновесии и все пружины не напряжены. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины при колебаниях точки вдоль оси x в абсолютно гладких направляющих.

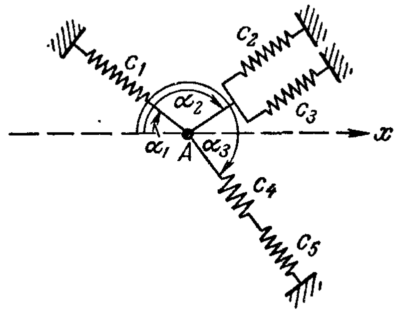
Ответ: $c = c_1 \cos^2 \alpha_1 + (c_2 + c_3) \cos^2 \alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3$.

32.33. Определить коэффициент жесткости пружины, эквивалентной трем пружинам, показанным на чертеже, при колебаниях точки

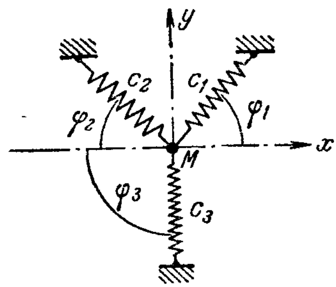
M в абсолютно гладких направляющих вдоль оси x. Решить ту же задачу, если направляющие расположены вдоль оси y.

Ответ: $c_x = c_1 \cos^2\varphi_1 + c_2 \cos^2\varphi_2 + c_3 \cos^2\varphi_3$; $c_y = c_1 \sin^2\varphi_1 + c_2 \sin^2\varphi_2 + c_3$.

В исходном положении пружины не напряжены и точка M находится в равновесии.



К задаче 32.32.

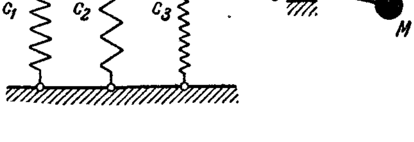


К задаче 32.33.

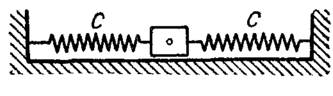
32.34. Определить коэффициент жесткости эквивалентной пружины, если груз M прикреплен к стержню, массой которого пренебрегаем. Стержень шарнирно закреплен в точке O и прикреплен тремя вертикальными пружинами к фундаменту. Коэффициенты жесткости пружин c_1, c_2, c_3. Пружины прикреплены к стержню на расстояниях a_1, a_2, a_3 от шарнира. Груз M прикреплен к стержню на расстоянии b от шарнира. В положении равновесия стержень горизонтален. Эквивалентная пружина крепится к стержню на расстоянии b от шарнира.

Ответ:

$$c = \frac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{b^2}.$$



К задаче 32 34.



К задаче 32.35.

32.35. Груз весом 10 *кГ*, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, зажат между двумя пружинами одинаковой жесткости $c = 2$ *кГ/см*. В некоторый момент груз был сдвинут на 4 *см* от положения равновесия вправо и отпущен без начальной скорости. Найти уравнение движения, период колебаний, а также максимальную скорость груза.

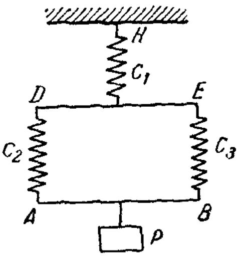
Ответ: 1) $x = 4\cos 19{,}8t$ *см*; 2) $T = 0{,}317$ *сек*;
3) $\dot{x}_{\max} = 79{,}2$ *см/сек*.

32.36 (835). Винтовая пружина состоит из n участков, коэффициенты жесткости которых соответственно равны $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Определить коэффициент жесткости c однородной пружины, эквивалентной данной.

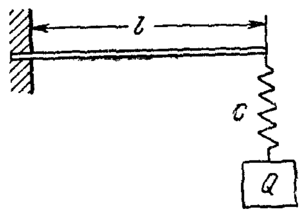
Ответ: $c = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{c_i}}$.

32.37. Груз P подвешен к невесомому стержню AB, который соединен двумя пружинами, с коэффициентами жесткости c_2 и c_3, с невесомым стержнем DE. Последний прикреплен к потолку в точке H пружиной, коэффициент жесткости которой c_1. При колебаниях стержни AB и DE остаются горизонтальными. Определить коэффициент жесткости одной эквивалентной пружины, при которой груз P будет колебаться с той же частотой. Найти период свободных колебаний груза.

Ответ: $c = \dfrac{c_1(c_2+c_3)}{c_1+c_2+c_3}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{P(c_1+c_2+c_3)}{gc_1(c_2+c_3)}}$.



К задаче 32.37.



К задаче 32.38.

32.38. Определить собственную частоту колебаний груза Q, подвешенного на конце упругой невесомой консоли длиной l. Пружина, удерживающая груз, имеет жесткость c *кГ/см*. Жесткость на конце консоли определяется формулой $c_1 = \dfrac{3EJ}{l^3}$ (E — модуль упругости, J — момент инерции).

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{g \cdot 3EJc}{Q(3EJ + cl^3)}}$.

32.39. Колебания груза весом $P = 10$ *кГ*, лежащего на середине упругой балки жесткостью $c = 2$ *кГ/см*, происходят с амплитудой 2 *см*. Определить величину начальной скорости груза, если в момент времени $t = 0$ груз находился в положении равновесия.

Ответ: $v_0 = 28$ *см/сек*.

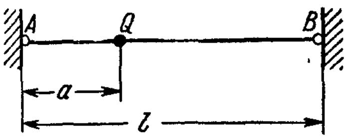
32.40. Груз весом Q закреплен горизонтально натянутым тросом $AB = l$. При малых вертикальных колебаниях груза натяжение троса S можно считать постоянным. Определить частоту свободных колебаний груза, если расстояние груза от конца троса A равно a.

Ответ: $k = \sqrt{\dfrac{Sgl}{Qa(l-a)}}$ $сек^{-1}$.

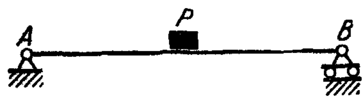
32.41. Груз весом $P=50$ *кГ* лежит посередине балки AB. Момент инерции поперечного сечения балки $J=80$ *см*^{4}. Определить длину балки l из условия, чтобы период свободных колебаний груза на балке был равен $T=1$ *сек*.

Примечание. Статический прогиб балки определяется формулой $f=\frac{Pl^3}{48EJ}$, где модуль упругости $E=2{,}1\cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}.

Ответ: $l=15{,}9$ *м*.



К задаче 32.40.

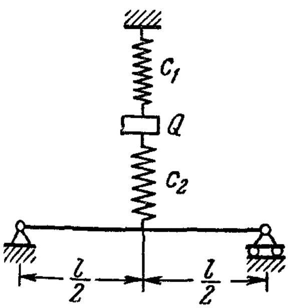


К задаче 32.41.

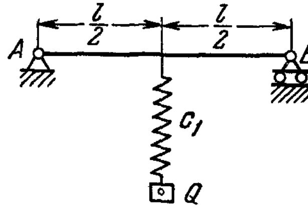
32.42. Груз весом Q зажат между двумя вертикальными пружинами с коэффициентами жесткости c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно, а нижний конец второй пружины прикреплен к середине балки. Определить длину балки l так, чтобы период колебаний груза был равен T. Момент инерции поперечного сечения балки J, модуль упругости E.

Ответ: $l=\sqrt[3]{\dfrac{48EJ\left(c_1+c_2-\dfrac{4\pi^2}{T^2}\dfrac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\dfrac{4\pi^2}{T^2}\dfrac{Q}{g}-c_1\right)}}$.

32.43. Найти уравнение движения и период колебаний груза Q, подвешенного к пружине с коэффициентом жесткости c_1, если пружина прикреплена к середине балки длиной l. Жесткость балки на изгиб EJ. В начальный момент груз находился в положении статического равновесия и ему была сообщена скорость v_0, направленная вниз.



К задаче 32.42.

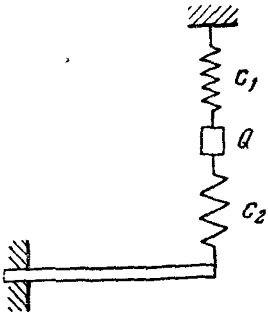


К задаче 32.43.

Ответ: $x=v_0\sqrt{\dfrac{Q\,(c_1l^3+48EJ)}{48EJc_1g}}\sin\sqrt{\dfrac{48EJc_1g}{(c_1l^3+48EJ)\,Q}}\,t$;

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(c_1l^3+48EJ)Q}{c_1\cdot 48EJg}}.$$

32.44. Груз весом Q зажат между двумя вертикальными пружинами, коэффициенты жесткости которых равны c_1 и c_2. Верхний конец первой пружины закреплен неподвижно. Нижний конец второй пружины прикреплен к свободному концу балки, заделанной другим концом в стене. Зная, что свободный конец заделанной балки под действием силы P, приложенной к свободному концу балки, дает прогиб



К задаче 32.44.

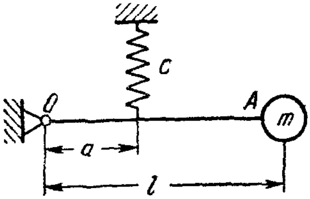
$$f=\frac{Pl^3}{3EJ},$$

где EJ — заданная жесткость балки при изгибе, определить длину балки l, при которой груз будет колебаться с данным периодом T. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент он был подвешен к концам нерастянутых пружин и отпущен без начальной скорости.

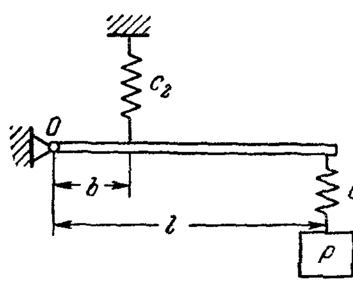
Ответ: 1) $$l=\sqrt[3]{\frac{3EJ\left(c_1+c_2-\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g}-c_1\right)}};$$

2) $$x=-Q\frac{c_2l^3+3EJ}{c_1c_2l^3+(c_1+c_2)3EJ}\times$$
$$\times\cos\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+(c_1+c_2)3EJ]g}{(c_2l^3+3EJ)Q}}\,t.$$

32.45. Невесомый стержень OA длиной l, на конце которого помещен груз массы m, может поворачиваться вокруг оси O. На расстоянии a от оси O к стержню прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.



К задаче 32.45.



К задаче 32.46.

Определить собственную частоту колебаний груза, если стержень OA в положении равновесия занимает горизонтальное положение.

Ответ: $k=\frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$ *сек*$^{-1}$.

32.46. Груз P подвешен на пружине к концу невесомого стержня длиной l, который может поворачиваться вокруг оси O. Коэффициент жесткости пружины c_1. Пружина, поддерживающая стержень, установлена на расстоянии b от точки O и имеет коэффициент жесткости c_2.

Определить собственную частоту колебаний груза P.

Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot c_1c_2}{P\left[c_2+\left(\dfrac{l}{b}\right)^2c_1\right]}}$ *сек*$^{-1}$.

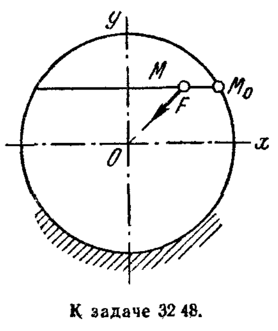
32.47 (842). Для определения ускорения силы тяжести в данном месте земного шара производят два опыта. К концу пружины подвешивают груз P_1 и измеряют статическое удлинение пружины l_1. Затем к концу этой же пружины подвешивают другой груз P_2 и опять измеряют статическое удлинение l_2. После этого повторяют оба опыта, заставляя оба груза по очереди совершать свободные колебания, и измеряют при этом периоды колебаний T_1 и T_2. Второй опыт делают для того, чтобы учесть влияние массы самой пружины, считая, что при движении груза это влияние эквивалентно прибавлению к колеблющейся массе некоторой добавочной массы.

Найти формулу для определения ускорения силы тяжести по этим опытным данным.

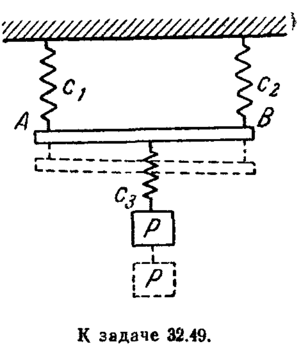
Ответ: $g=\dfrac{4\pi^2(l_1-l_2)}{T_1^2-T_2^2}$.

32.48. По горизонтальной хорде (пазу) вертикально расположенного круга движется без трения точка M весом 2 *кГ* под действием силы притяжения $\boldsymbol{F}$, пропорциональной расстоянию до центра O, причем коэффициент пропорциональности 0,1 *кГ/см*. Расстояние от центра круга до хорды равно 20 *см*; радиус окружности 40 *см*. Определить закон движения точки, если в начальный момент она находилась в правом крайнем положении M_0 и отпущена без начальной скорости. С какой скоростью точка проходит через середину хорды?

Ответ: $x=34{,}6\cos 7t$ *см*; $\dot{x}=\pm 242$ *см/сек*.



К задаче 32.48.



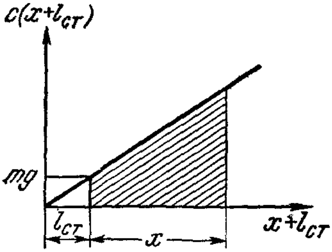
К задаче 32.49.

32.49. К невесомому стержню AB прикреплены три пружины. Две, с жесткостью c_1 и c_2, удерживают стержень и расположены на его концах. Третья пружина, жесткость которой c_3, прикреплена к середине стержня и несет груз P.

Определить собственную частоту колебаний груза.

Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot 4c_1\cdot c_2\cdot c_3}{P\,(4c_1\cdot c_2+c_1\cdot c_3+c_2\cdot c_3)}}$ *сек*$^{-1}$.

32.50. Груз весом 10 *кГ*, прикрепленный к пружине, коэффициент жесткости которой равен $c=2$ *кГ/см*, совершает колебания. Определить полную механическую энергию груза и пружины, пренебрегая массой пружины, построить график зависимости упругой силы от перемещения и показать на нем потенциальную энергию пружины. Принять положение статического равновесия за начало отсчета потенциальной энергии.



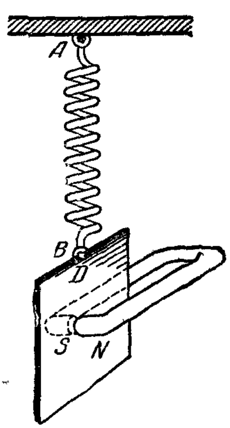
К решению задачи 32.50.

Ответ: $W=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}cx^2$.

Заштрихованная на чертеже площадь равна потенциальной энергии пружины.

б) Влияние сопротивления на свободные колебания

32.51 (843). Пластинка D весом 100 *Г*, подвешенная на пружине AB в неподвижной точке A, движется между полюсами магнита. Вследствие вихревых токов движение тормозится силой, пропорциональной скорости. Сила сопротивления движению равна $kv\Phi^2$ *дин*, где $k=0{,}0001$, v — скорость в *см/сек*, а Φ — магнитный поток между полюсами N и S. В начальный момент скорость пластинки равна нулю и пружина не растянута; удлинение ее на 1 *см* получается при статическом действии силы в 20 *Г*, приложенной в точке B. Определить движение пластинки в том случае, когда $\Phi=1000\sqrt{5}$ единиц CGS.



К задачам 32.51 и 32.52.

Ответ: $x=-e^{-2{,}5t}(5\cos 13{,}78t+0{,}907\sin 13{,}78t)$ *см*, где x обозначает расстояние центра тяжести пластинки от его равновесного положения по вертикали вниз.

32.52 (844). Определить движение пластинки D при условиях предыдущей задачи в том случае, когда магнитный поток $\Phi=10\,000$ единиц CGS.

Ответ: $x=-\frac{5}{48}e^{-98t}(49e^{96t}-1)$.

32.53 (845). Цилиндр весом P, радиусом r и высотой h, подвешен на пружине AB, верхний конец которой B закреплен; цилиндр погружен в воду. В положении равновесия цилиндр погружается в воду на половину своей высоты. В начальный момент времени цилиндр был погружен в воду на $2/3$ своей высоты и затем без начальной скорости пришел в движение по вертикальной прямой. Считая жесткость пружины равной c и предполагая, что действие воды сводится к добавочной архимедовой силе, определить движение цилиндра относительно положения равновесия. Принять удельный вес воды равным γ.

Ответ: $x=\frac{1}{6}h\cos kt$, где $k^2=\frac{g}{P}(c+\pi\gamma r^2)$.

32.54 (846). В предыдущей задаче определить колебательное движение цилиндра, если сопротивление воды пропорционально первой степени скорости и равно αv.

Ответ: Движение цилиндра будет колебательным, если

$$\left(\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2>0.$$

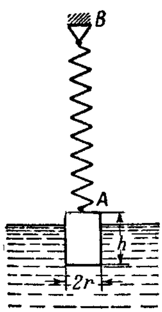
Тогда

$$x=\frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}\,e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right),$$

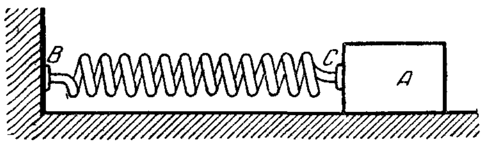
где

$$k^2=\frac{c}{m}+\frac{\pi r^2}{m}\gamma,\quad n=\frac{\alpha}{2m},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n},\quad m=\frac{P}{g}.$$

32.55 (847). Тело A весом 0,5 *кГ* лежит на негладкой горизонтальной плоскости и соединено с неподвижной точкой B пружиной, ось которой BC горизонтальна. Коэффициент трения плоскости 0,2; пружина такова, что для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 0,25 *кГ*. Тело A отодвинуто от точки B так, что пружина вытянулась на 3 *см*, и затем отпущено без начальной



К задаче 32.53.



К задаче 32.55.

скорости. Найти: 1) число размахов, которые совершит тело A, 2) величины размахов и 3) продолжительность T каждого из них.

Тело остановится, когда в положении, где скорость его равна нулю, сила упругости пружины будет равна силе трения или меньше ее.

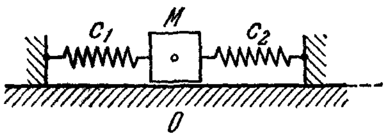
Ответ: 1) 4 размаха; 2) 5,2 *см*, 3,6 *см*, 2 *см*, 0,4 *см*;
3) $T=0{,}141$ *сек*.

32.56. Груз весом $Q=20$ *кГ*, лежащий на наклонной негладкой плоскости, прикрепили к нерастянутой пружине и сообщили ему начальную скорость $v_0=0{,}5$ *м/сек*, направленную вниз. Коэффициент трения скольжения $f=0{,}08$, коэффициент жесткости пружины

$c = 2$ *кГ/см*. Угол, образованный наклонной плоскостью с горизонтом, $\alpha = 45°$. Определить: 1) период колебаний, 2) число размахов, которые совершит груз, 3) величины размахов.

Ответ: 1) $T = 0{,}628$ *сек*; 2) 8 размахов;
3) 7,68 *см*, 6,56 *см*, 5,44 *см*, 4,32 *см*,
3,2 *см*, 2,08 *см*, 0,96 *см*, 0,16 *см*.

32.57. Тело весом $P = 0{,}5$ *кГ* совершает колебания на горизонтальной плоскости под действием двух одинаковых пружин, прикрепленных к телу одним концом и к неподвижной стойке — другим; оси пружин лежат на одной горизонтальной прямой. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = c_2 = 0{,}125$ *кГ/см*; коэффициент трения при движении тела $f = 0{,}2$, при покое $f_0 = 0{,}25$. В начальный момент тело было отодвинуто от своего среднего положения O вправо в положение $x_0 = 3$ *см* и отпущено без начальной скорости. Найти: 1) область возможных равновесных положений тела — «область застоя», 2) величины размахов тела, 3) число его размахов, 4) продолжительность каждого из них, 5) положение тела после колебаний.



К задаче 32.57.

Ответ: 1) $-0{,}5$ *см* $< x <$ $0{,}5$ *см*; 2) 5,2 *см*, 3,6 *см*, 2 *см*, 0,4 *см*;
3) 4 размаха; 4) $T = 0{,}141$ *сек*; 5) $x = -0{,}2$ *см*.

32.58. Под действием силы сопротивления R, пропорциональной первой степени скорости ($R = \alpha v$), тело массы m, подвешенное к пружине жесткости c, совершает затухающие колебания.

Определить, во сколько раз период затухающих колебаний T превосходит период незатухающих колебаний T_0, если отношение $n/k = 0{,}1$ ($k^2 = c/m$, $n = \alpha/2m$).

Ответ: $T \approx 1{,}005 T_0$.

32.59. В условиях предыдущей задачи определить, через сколько полных колебаний амплитуда уменьшится в сто раз.

Ответ: через 7,5 полных колебаний.

32.60 (848). Для определения сопротивления воды движению модели судна при очень малых скоростях модель M пустили плавать в сосуде, привязав нос и корму посредством двух одинаковых пружин A и B, силы натяжения которых пропорциональны удлинениям. Результаты наблюдений показали, что отклонения модели от положения равновесия после каждого размаха уменьшаются, составляя геометрическую прогрессию, знаменатель которой равен 0,9, а продолжительность каждого размаха $T = 0{,}5$ *сек*.

К задачам 32.60 и 32.61.

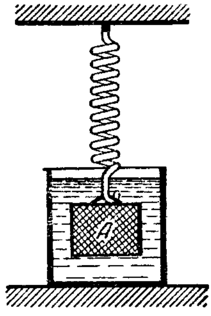
Определить в граммах силу R сопротивления воды, приходящуюся на каждый грамм веса модели, при скорости ее, равной 1 *см/сек*, предполагая, что сопротивление воды пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $R = 0{,}00043$ *Г*.

32.61. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения модели, если в начальный момент пружина A была растянута, а пружина B сжата на величину $\Delta l = 4$ *см* и модель была отпущена без начальной скорости.

Ответ: $x = e^{-0{,}21t}(4\cos 6{,}28t + 0{,}134\sin 6{,}28t)$.

32.62 (849). Для определения вязкости жидкости Кулон употреблял следующий метод: подвесив на пружине тонкую пластинку A, он заставлял ее колебаться сначала в воздухе, а затем в той жидкости, вязкость которой надлежало определить, и находил продолжительность одного размаха: T_1 — в первом случае и T_2 — во втором. Сила трения между пластинкой и жидкостью может быть выражена формулой $2Skv$, где $2S$ — поверхность пластинки, v — ее скорость, k — коэффициент вязкости. Пренебрегая трением между пластинкой и воздухом, определить коэффициент k по найденным из опыта величинам T_1 и T_2, если вес пластинки равен P.



К задаче 32.62.

Ответ: $k = \frac{\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$.

32.63 (850). Тело весом 5 *кГ* подвешено на пружине, коэффициент жесткости которой равен 2 *кГ/см*. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после четырех колебаний уменьшилась в 12 раз.

Определить период колебаний и логарифмический декремент затухания.

Ответ: $T = 0{,}319$ *сек*; $\frac{nT}{2} = 0{,}311$.

32.64. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения тела, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Ответ: $x = e^{-1{,}94t}(-2{,}5\cos 19{,}2t - 0{,}252\sin 19{,}2t)$.

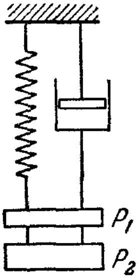
32.65 (851). Тело весом 5,88 *кГ*, подвешенное на пружине, при отсутствии сопротивления колеблется с периодом $T = 0{,}4\pi$ *сек*, а если действует сопротивление, пропорциональное первой степени скорости, — с периодом $T_1 = 0{,}5\pi$ *сек*. Найти силу сопротивления k при скорости, равной 1 *см/сек*, и определить движение, если в начальный момент пружина была растянута из положения равновесия на 4 *см* и тело предоставлено самому себе.

Ответ: $k = 0{,}036$; $x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

32.66 (852). Тело весом 1,96 *кГ*, подвешенное на пружине, которая силой 1 *кГ* растягивается на 20 *см*, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 *см/сек* равное 0,02 *кГ*. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 *см*, и тело пришло в движение без начальной скорости. Определить движение тела.

Ответ: $x=5e^{-5t}(5t+1)$ *см*.

32.67. Грузы весом $P_1=2$ *кГ* и $P_2=3$ *кГ* подвешены в положении статического равновесия к пружине, коэффициент жесткости которой $c=0,4$ *кГ/см*. Масляный демпфер вызывает силу сопротивления, пропорциональную первой степени скорости и равную $R=-\alpha v$, где $\alpha=0,1$ *кГ сек/см*. Груз P_2 сняли. Найти после этого уравнение движения груза P_1.



К задаче 32.67.

Ответ: $x=8,34e^{-4,5t}-0,84e^{-44,5t}$.

32.68. Статическое удлинение пружины под действием груза P равно f. На колеблющийся груз действует сила сопротивления среды, пропорциональная скорости.

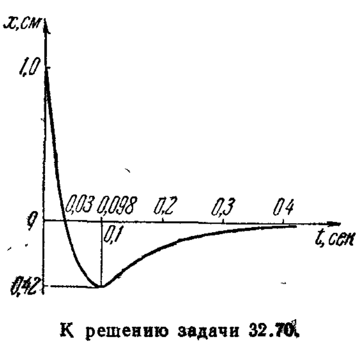
Определить наименьшее значение коэффициента сопротивления α, при котором процесс движения будет апериодическим. Найти период затухающих колебаний, если коэффициент сопротивления меньше найденного значения.

Ответ: $\alpha=\frac{2P}{\sqrt{gf}}$. При $\alpha<\frac{2P}{\sqrt{gf}}$ движение будет колебательным с периодом $T=\sqrt{\frac{g}{f}-\frac{\alpha^2}{4m^2}}$.

32.69. Груз весом 100 *Г*, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c=20$ *Г/см*. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R=\alpha v$, где $\alpha=3,5$ *Г сек/см*.

Найти уравнение движения груза и построить зависимость перемещения от времени, если в начальный момент груз был смещен из положения равновесия на $x_0=1$ *см* и отпущен без начальной скорости.

Ответ: $x=e^{-17,15t}(1,36e^{9,95t}-0,36e^{-9,95t})$ *см*.



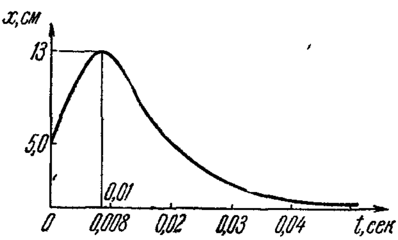
К решению задачи 32.70.

32.70. Груз весом 100 *Г*, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c=20$ *Г/см*. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R=\alpha v$, где $\alpha=3{,}5$ *Г сек/см.*

Найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени, если в начальный момент груз смещен из положения статического равновесия на расстояние $x_0=1$ *см* и ему была сообщена начальная скорость 50 *см/сек* в направлении, противоположном смещению.

Ответ: $x=e^{-17,15t}(-1{,}15e^{9,95t}+2{,}15e^{-9,95t})$ *см.*

32.71. Груз весом 100 *Г*, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины $c=20$ *Г/см.* Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: $R=\alpha v$, где $\alpha=3{,}5$ *Г сек/см.*

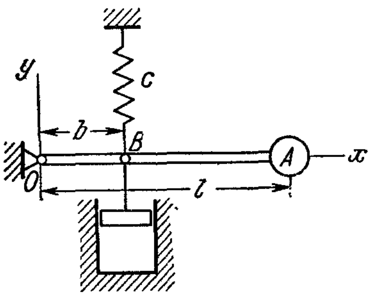


К решению задачи 32.71.

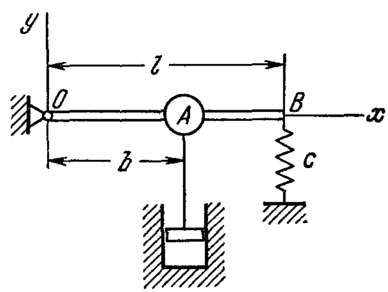
Найти уравнение движения груза и построить график зависимости перемещения от времени, если в начальный момент груз был смещен из положения равновесия на $x_0=5$ *см* и ему была сообщена начальная скорость в том же направлении 10 *см/сек.*

Ответ: $x=e^{-17,15t}(7{,}30e^{9,95t}-2{,}30e^{-9,95t})$ *см.*

32.72. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний тяжелой точки A, находящейся на конце невесомого стержня, закрепленного шарнирно в точке O, считая силу сопротивления среды пропорциональной первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности α, и определить частоту затухающих колебаний. Вес



К задаче 32.72.



К задаче 32.74.

точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, длина стержня l, расстояние $OB=b$. Массой стержня пренебречь. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?

Ответ: 1) $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y}+c\frac{b^2}{l^2}y=0$;

2) $k=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}-\left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}$ $сек^{-1}$; 3) $\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

32.73. При колебаниях груза весом 20 *кГ*, подвешенного на пружине, было замечено, что наибольшее отклонение после 10 полных колебаний уменьшилось вдвое. Груз совершил 10 полных колебаний за 9 *сек*. Как велик коэффициент сопротивления α (при сопротивлении среды, пропорциональном первой степени скорости) и каково значение коэффициента жесткости c?

Ответ: $\alpha = 0{,}00314$ *кГ см*$^{-1}$*сек*; $c = 0{,}99$ *кГ см*$^{-1}$.

32.74. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний точки A и определить частоту затухающих колебаний. Вес точки A равен P, коэффициент жесткости пружины c, расстояние $OA = b$, $OB = l$. Сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, коэффициент пропорциональности равен α. Массой стержня OB, шарнирно закрепленного в точке O, пренебрегаем. В положении равновесия стержень горизонтален. При каком значении коэффициента α движение будет апериодическим?

Ответ: 1) $\frac{P}{g}\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{cl^2}{b^2}y = 0$; 2) $k_1 = \sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2g^2}{4P^2}}$ *сек*$^{-1}$;
3) $\alpha \geqslant \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$.

в) Вынужденные колебания

32.75. Найти уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и постоянной силы F_0. В начальный момент $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Найти также период колебаний.

Ответ: $x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $T = 2\pi/k$.

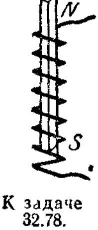
32.76. Определить уравнение прямолинейного движения точки массы m, находящейся под действием восстанавливающей силы $Q = -cx$ и силы $F = \alpha t$. В начальный момент точка находится в положении статического равновесия и скорость ее равна нулю.

Ответ: $x = \frac{a}{mk^3}(kt - \sin kt)$, где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

32.77. Найти уравнение прямолинейного движения точки весом P, на которую действует восстанавливающая сила $Q = -cx$ и сила $F = F_0e^{-\alpha t}$, если в начальный момент точка находилась в положении равновесия в состоянии покоя.

Ответ:

$$x = \frac{F_0}{m(k^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt\right), \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$



К задаче 32.78.

32.78 (853). На пружине, коэффициент жесткости которой $c = 20$ *Г/см*, подвешен магнитный стержень весом 100 *Г*. Нижний конец магнита проходит через катушку, по которой идет переменный ток $i = 20\sin 8\pi t$ ампер. Ток идет с момента времени $t = 0$, втягивая стержень в соленоид; до этого момента магнитный стержень висел на пружине неподвижно. Сила взаимодействия между магнитом и катушкой определяется равенством $F = 16\pi i$ *дин*. Определить вынужденные колебания магнита.

Ответ: $x = -0{,}023 \sin 8\pi t$ *см*.

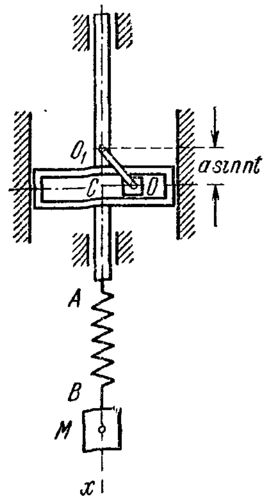
32.79. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения магнитного стержня, если его подвесили к концу нерастянутой пружины и отпустили без начальной скорости.

Ответ: $x = (-5 \cos 14t + 0{,}041 \sin 14t - 0{,}023 \sin 8\pi t)$ *см*.

32.80. В условиях задачи 32.78 найти уравнение движения магнитного стержня, если ему в положении статического равновесия сообщили начальную скорость $v_0 = 5$ *см/сек*.

Ответ: $x = (0{,}4 \sin 14t - 0{,}023 \sin 8\pi t)$ *см*.

32.81 (855). Гиря M подвешена на пружине AB, верхний конец которой совершает гармонические колебания по вертикальной прямой амплитуды a и частоты n: $O_1C = a \sin nt$ *см*. Определить вынужденные колебания гири M при следующих данных: вес гири равен 400 $Г$, от действия силы 40 $Г$ пружина удлиняется на 1 *см*, $a = 2$ *см*, $n = 7$ *сек*$^{-1}$.



К задаче 32.81.

Ответ: $x = 4 \sin 7t$ *см*.

32.82 (856). Определить движение гири M (см. задачу 32.81), подвешенной на пружине AB, верхний конец которой A совершает гармонические колебания по вертикали амплитуды a и круговой частоты k, статическое растяжение пружины под действием веса гири равно δ. В начальный момент точка A занимает свое среднее положение, а гиря M находится в покое; начальное положение гири принять за начало координат, а ось Ox направить по вертикали вниз.

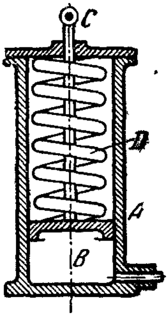
Ответ: $$x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \sin kt\right] \text{ при } k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}};$$
$$x = \frac{a}{2}\left[\sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t \cos kt\right] \text{ при } k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

32.83 (858). Статический прогиб рессор груженого товарного вагона $\Delta l_{ст} = 5$ *см*. Определить критическую скорость движения вагона, при которой начнется «галопирование» вагона, если на стыках рельсов вагон испытывает толчки, вызывающие вынужденные колебания вагона на рессорах; длина рельсов $L = 12$ *м*.

Ответ: $v = 96$ *км/час*.

32.84 (859). Индикатор паровой машины состоит из цилиндра A, в котором ходит поршень B, упирающийся в пружину D; с поршнем соединен стержень BC, к которому прикреплен пишущий штифт C. Предполагая, что давление пара p на поршень B, выраженное в килограммах на квадратный сантиметр, изменяется согласно формуле

$p=4+3\sin\frac{2\pi}{T}t$, где T — время одного оборота вала, определить амплитуду вынужденных колебаний штифта C, если вал совершает 3 *об/сек*, при следующих данных: площадь поршня индикатора $\sigma=4$ *см*^{2}; вес подвижной части индикатора $Q=1$ *кГ*; пружина сжимается на 1 *см* силой в 3 *кГ*.



К задаче 32.84.

Ответ: $a=4{,}54$ *см.*

32.85. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения штифта C, если в начальный момент времени система находилась в покое в положении статического равновесия.

Ответ: $x=(-1{,}57\sin 54{,}3t+4{,}54\sin 6\pi t)$ *см.*

32.86. Груз весом $Q=200$ *Г*, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c=1$ *кГ/см*, находится под действием силы $S=H\sin pt$, где $H=2{,}0$ *кГ*, $p=50$ *сек*$^{-1}$. В начальный момент $x_0=2$ *см*, $\dot{x}_0=10$ *см/сек.* Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

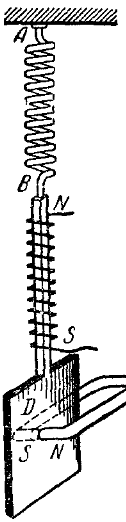
Найти уравнение движения груза.

Ответ: $x=(2\cos 70t-2{,}77\sin 70t+4{,}08\sin 50t)$ *см.*

32.87. Груз весом $Q=200$ *Г*, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c=1$ *кГ/см*, находится под действием силы $S=H\sin pt$, где $H=2$ *кГ*, $p=70$ *сек*$^{-1}$. В начальный момент $x_0=2$ *см*, $\dot{x}_0=10$ *см/сек*. Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

Найти уравнение движения груза.

Ответ: $x=(2\cos 70t+1{,}14\sin 70t-70t\cos 70t)$ *см.*



К задачам 32 88 и 32 89.

г) Влияние сопротивления на вынужденные колебания

32.88 (854). На пружине, коэффициент жесткости которой $c=20$ *Г/см*, подвешены магнитный стержень весом 50 *Г*, проходящий через соленоид, и медная пластинка весом 50 *Г*, проходящая между полюсами магнита. По соленоиду течет ток $i=20\sin 8\pi t$ ампер и развивает силу взаимодействия с магнитным стержнем $F=16\pi i$ *дин.* Сила торможения медной пластинки вследствие вихревых токов равна $kv\Phi^2$, где $k=10^{-4}$, $\Phi=1000\sqrt{5}$ единиц CGS и v — скорость пластинки. Определить вынужденные колебания пластинки.

Ответ: $x=0{,}022\sin(8\pi t-0{,}91\pi)$ *см.*

32.89. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения пластинки, если ее подвесили вместе с магнитным стержнем к концу нерастянутой пружины и сообщили им начальную скорость $v_0=5$ *см/сек*, направленную вниз.

Ответ: $x = e^{-2,5t}(-4,99 \cos 13,75t - 0,56 \sin 13,75t) +$
$+ 0,022 \sin(8\pi t - 0,91\pi)$ *см*.

32.90 (857). Материальная точка весом $Q = 2$ *кГ* подвешена к пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 4$ *кГ/см*. На точку действует возмущающая сила $S = 12 \sin(pt + \delta)$ *кГ* и сила сопротивления движению, пропорциональная первой степени скорости и равная $R = 0,5\sqrt{mc}\,\dot{x}$ *кГ*. Чему равно наибольшее значение A_{max} амплитуды вынужденных колебаний? При какой частоте p амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения?

Ответ: $A_{max} = 6,21$ *см*; $p = 41,5$ *сек*$^{-1}$.

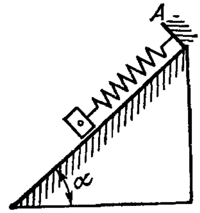
32.91. В условиях предыдущей задачи найти уравнение движения точки, если в начальный момент времени ее положение и скорость были равны: $x_0 = 2$ *см*, $\dot{x}_0 = 3$ *см/сек*. Частота возмущающей силы $p = 30$ *сек*$^{-1}$, начальная фаза возмущающей силы $\delta = 0°$. Начало координат выбрано в положении статического равновесия.

Ответ: $x = e^{-0,0865t}(2 \cos 1,73t + 1,95 \sin 1,73t) +$
$+ 0,0067 \sin(30t - \pi)$ *см*.

32.92 (861). Материальная точка весом $p = 3$ *Г* подвешена к пружине с коэффициентом жесткости $c = 12$ *Г/см*. На точку действует возмущающая сила $F = H \sin(62,6t + \beta)$ *Г* и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости и равная $R = \alpha v$ *Г*.

Во сколько раз уменьшится амплитуда вынужденных колебаний точки, если сила сопротивления увеличится в три раза?

Ответ: Амплитуда вынужденных колебаний уменьшится в три раза.



К задаче 32.93.

32.93. Тело весом 2 *кГ*, прикрепленное пружиной к неподвижной точке A, движется по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, под действием возмущающей силы $S = 1,8 \sin 10t$ *кГ* и силы сопротивления, пропорциональной скорости: $\boldsymbol{R} = -0,03\boldsymbol{v}$ *кГ*. Коэффициент жесткости пружины $c = 5$ *кГ/см*. В начальный момент тело находилось в покое в положении статического равновесия. Найти уравнение движения тела, периоды T свободных и T_1 вынужденных колебаний, сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: 1) $x = 10^{-2} \cdot e^{-7,35t}(2,3 \cos 49t - 7,3 \sin 49t) +$
$+ 0,374 \sin(10t - 3°34')$ *см*;
2) $T = 0,128$ *сек*; 3) $T_1 = 0,628$ *сек*; 4) $\varepsilon = 3°34'$.

32.94. На тело весом $Q = 392$ *Г*, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 4$ *кГ/см*, действует сила $S = H \sin pt$ *кГ*, где $H = 4$ *кГ*, $p = 50$ *сек*$^{-1}$, и сила сопротивления $R = \alpha v$, где $\alpha = 25$ *Г сек/см*, v — скорость тела. В начальный момент тело покоится в положении статического равновесия. Написать уравнение движения груза и определить значение круговой частоты p, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Ответ: $x = ae^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\beta\right) - A\sin(pt-\varepsilon)$, где

$$a = \frac{ph}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\sqrt{4n^2+\frac{(2n^2+p^2-k^2)^2}{k^2-n^2}} = 0{,}647\ см,$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{2n\sqrt{k^2-n^2}}{2n^2+p^2-k^2} = -1{,}07,\quad A = \frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} = 1{,}23,$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2np}{k^2-p^2} = 0{,}416,\quad n = 31{,}25\ сек^{-1},\quad \sqrt{k^2-n^2} = 95\ сек^{-1}.$$

Максимальная амплитуда получается при круговой частоте возбуждения

$$p = \sqrt{k^2-2n^2}.$$

32.95. На тело весом Q $Г$, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости c $Г/см$, действуют возмущающая сила $S = H\sin pt$ $Г$ и сила сопротивления $R = \alpha v$ $Г$, где v — скорость тела. В начальный момент тело находится в положении статического равновесия и не имеет начальной скорости. Найти уравнение движения тела, если $c > (\alpha/2)^2$.

Ответ:
$$x = \frac{hpe^{-nt}}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left(2n\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t+\frac{2n^2+p^2-k^2}{\sqrt{k^2-n^2}}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\sqrt{k^2-n^2}t\right)+\frac{h}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\left[(k^2-p^2)\sin pt-2np\cos pt\right]$$

где $h = \dfrac{Hg}{Q}$, $k^2 = \dfrac{cg}{Q}$, $n = \dfrac{\alpha g}{2Q}$.

32.96. На тело весом 6 *кГ*, подвешенное к пружине с жесткостью $c = 18$ *кГ/см*, действует возмущающая сила $P_0\sin\omega t$. Сопротивление жидкости пропорционально скорости. Каким должен быть коэффициент сопротивления α вязкой жидкости, чтобы максимальная амплитуда вынужденных колебаний равнялась утроенному значению статического смещения пружины? Чему равняется коэффициент расстройки z (отношение круговой частоты вынужденных колебаний к круговой частоте свободных колебаний)? Найти сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: $\alpha = 0{,}115$ *кГ см*$^{-1}$*сек*; $z = 0{,}97$; $\varepsilon = 79°48'$.

32.97. На тело весом $Q = 100$ $Г$, прикрепленное к пружине с коэффициентом жесткости $c = 5$ *кГ/см*, действует сила $S = H\sin pt$, где $H = 10$ *кГ*, $p = 100$ *сек*$^{-1}$, и сила сопротивления $R = \beta v$, где $\beta = 50$ *Г сек/см*.

Написать уравнение вынужденных колебаний и определить значение частоты p, при котором амплитуда вынужденных колебаний будет максимальной.

Ответ: 1) $x_2 = 0{,}98\sin 100t - 1{,}22\cos 100t$;

2) максимума амплитуды не существует, так как $n > k/\sqrt{2}$.

32.98. В условиях предыдущей задачи определить сдвиг фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: $\varepsilon = \operatorname{arctg} 1{,}26 = 51°40'$.

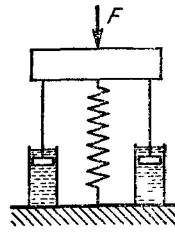
32.99. Груз весом 200 *Г* подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 20$ *Г/см*. На груз действуют возмущающая сила $S = 0{,}2 \sin 14t$ *Г* и сила сопротивления $R = 50v$ *Г*.

Определить сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Ответ: $\varepsilon = 91°38'$.

32.100. В условиях предыдущей задачи найти коэффициент жесткости c_1 новой пружины, которой нужно заменить данную пружину, чтобы сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы стал равным $\pi/2$.

Ответ: $c_1 = 40$ *Г/см*.



К задаче 32.101.

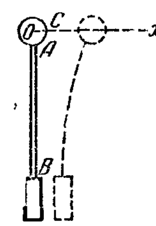
32.101. Для уменьшения действия на тело массы m возмущающей силы $F = F_0 \sin(pt + \delta)$ устанавливают пружинный амортизатор с жидкостным демпфером. Коэффициент жесткости пружины c. Считая, что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости ($F_{\text{сопр}} = \alpha v$), найти максимальное динамическое давление всей системы на фундамент при установившихся колебаниях.

Ответ: $N_{\max} = F_0 \sqrt{\dfrac{k^4 + 4n^2p^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}$, где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

§ 33. Относительное движение

33.1 (862). К концу A вертикального упругого стержня AB прикреплен груз C весом 2,5 *кГ*. Груз C, будучи выведен из положения равновесия, совершает гармонические колебания под влиянием силы, пропорциональной расстоянию от положения равновесия. Стержень AB таков, что для отклонения конца его A на 1 *см* нужно приложить силу 0,1 *кГ*. Найти амплитуду вынужденных колебаний груза C в том случае, когда точка закрепления стержня B совершает по горизонтальной прямой гармонические колебания амплитуды 1 *мм* и периода 1,1 *сек*.

Ответ: 5,9 *мм*.

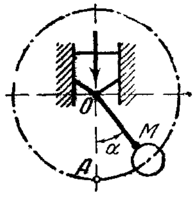


К задаче 33.1.

33.2 (863). Точка привеса математического маятника длиной l движется по вертикали равноускоренно. Определить период T малых колебаний маятника в двух случаях: 1) когда ускорение точки привеса направлено вверх и имеет какую угодно величину p; 2) когда это ускорение направлено вниз и величина его $p < g$.

Ответ: 1) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{p+g}}$; 2) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g-p}}$.

33.3 (864). Математический маятник OM длиной l в начальный момент отклонен от положения равновесия OA на некоторый угол α и имеет скорость, равную нулю; точка привеса его в этот момент имеет также скорость, равную нулю, но затем опускается с постоянным ускорением $p \geqslant g$. Определить длину s дуги окружности, описываемой точкой M в относительном движении вокруг точки O.



К задаче 33.3.

Ответ: 1) При $p = g$ $s = 0$; 2) при $p > g$ $s = 2l(\pi - \alpha)$.

33.4 (865). Железнодорожный поезд идет со скоростью 15 *м/сек* по рельсам, проложенным по меридиану, с юга на север. Вес поезда 2000 *т*.

1) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он пересекает в данный момент северную широту 60°. 2) Определить боковое давление поезда на рельсы, если он идет в этом же месте с севера на юг.

Ответ: 1) 384 *кГ* на правый восточный рельс; 2) 384 *кГ* на правый западный рельс.

33.5 (866). Материальная точка свободно падает в северном полушарии с высоты 500 *м* на Землю. Принимая во внимание вращение Земли вокруг своей оси и пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится на восток точка при падении. Географическая широта места равна 60°.

Ответ: На 12 *см*.

33.6 (867). В вагоне, движущемся по прямому горизонтальному пути, маятник совершает малые гармонические колебания, причем среднее его положение остается отклоненным от вертикали на угол 6°.

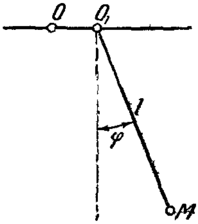
1) Определить ускорение w вагона.

2) Найти разность периодов колебаний маятника: T — в случае неподвижного вагона и T_1 — в данном случае.

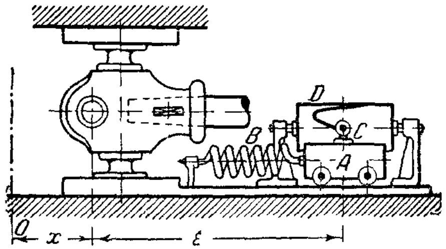
Ответ: 1) $w = 103$ *см/сек*^{2}; 2) $T - T_1 = 0{,}0028\,T$.

33.7 (868). Точка O_1 привеса маятника длиной l совершает прямолинейные горизонтальные гармонические колебания около неподвижной точки O: $OO_1 = a \sin pt$. Определить малые колебания маятника, считая, что в момент, равный нулю, он находился в покое.

Ответ: $\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right)$, $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$.



К задаче 33.7.



К задаче 33.8.

33.8 (869). Для измерения ускорений поршня двигателя внутреннего сгорания применяется прибор, состоящий из подвижной тележки A и равномерно вращающегося барабана D, жестко скрепленного с крейцкопфом. Тележка весит Q и благодаря особым направляющим совершает поступательное движение, при котором конец закрепленного на тележке карандаша C описывает прямую, параллельную оси штока. Тележка A связана с крейцкопфом пружиной B, жесткость пружины c. Часовой механизм вращает барабан с угловой скоростью ω, радиус барабана r. Найти уравнение кривой, вычерчиваемой карандашом на ленте барабана, если движение крейцкопфа относительно направляющих крейцкопфа выражается уравнением $x = a + l\cos\Omega t$, где a — некоторая постоянная, зависящая от выбранного начала неподвижной системы координат, l — ход поршня, Ω — угловая скорость махового колеса двигателя.

Ответ: $\xi = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}t + \frac{Ql\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}\cos\Omega t,$
$\eta = r\omega t,$

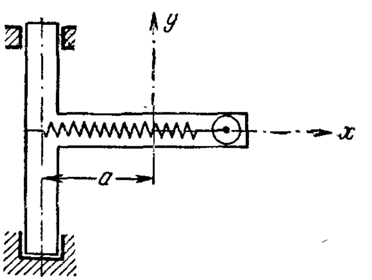
A и B — постоянные, определяемые по начальным данным.

33.9. Шарик массы m, прикрепленный к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

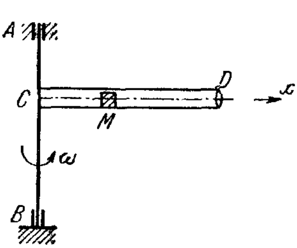
Ответ: В системе координат, начало которой совпадает с точкой равновесия шарика,

1) $x = 2\frac{\omega^2 a}{k^2 - \omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t$ при $k = \sqrt{\frac{c}{m}} > \omega$;

2) $x = \frac{\omega^2 a}{\omega^2 - k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t - 1\right)$ при $k = \sqrt{\frac{c}{m}} < \omega$.



К задаче 33.9.



К задаче 33.10.

33.10. Горизонтальная трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость v тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна L. Трением пренебречь.

Ответ: $v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega$.

33.11. В условиях предыдущей задачи определить время движения тела в трубке.

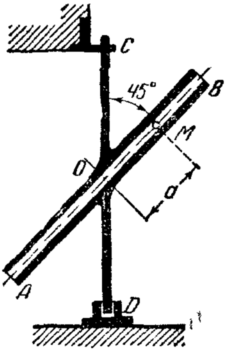
Ответ: $T = \frac{1}{\omega} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$.

33.12. В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f.

Ответ: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f \sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$; верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $\dot{x} > 0$.

33.13 (870). Кольцо движется по гладкому стержню AB, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A, делая один оборот в секунду; длина стержня 1 *м*; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 *см* от конца A и имело скорость, равную нулю Определить момент t_1, когда кольцо сойдет со стержня.

Ответ: $t_1 = \frac{1}{2\pi} \ln 3 = 0{,}175$ *сек*.



К задаче 33 14.

33.14 (871). Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней неизменный угол 45°. В трубке находится тяжелый шарик M. Определить движение этого шарика относительно трубки, если начальная скорость его равна нулю и начальное расстояние от точки O равно a. Трением пренебрегаем.

Ответ: $OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{+0{,}5\omega t\sqrt{2}} + e^{-0{,}5\omega t\sqrt{2}}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

33.15 (874). Определить, как меняется ускорение силы тяжести в зависимости от широты места φ вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Радиус Земли $R = 6370$ *км*.

Ответ: Если пренебречь членом с ω^4 ввиду его малости, то

$$g_1 = g\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right),$$

где g — ускорение силы тяжести на полюсе, φ — географическая широта места.

33.16 (875). Во сколько раз надо увеличить угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тяжелая точка, находящаяся на поверхности Земли на экваторе, не имела бы веса? Радиус Земли $R = 6370$ *км*.

Ответ: В 17 раз.

33.17 (876). Артиллерийский снаряд движется по настильной траектории (т. е. по траектории, которую приближенно можно считать горизонтальной прямой). Горизонтальная скорость снаряда во время движения $v_0 = 900$ *м/сек*. Снаряд должен поразить цель, отстоящую от места выстрела на расстоянии 18 *км*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, насколько отклонится снаряд от цели вследствие вращения Земли. Стрельба происходит на северной широте $\lambda = 60^\circ$.

Ответ: Снаряд отклонится вправо (если смотреть на него сверху перпендикулярно к скорости) на величину

$$s = \omega v_0 t^2 \sin\lambda = 22{,}7 \text{ м}$$

независимо от направления стрельбы.

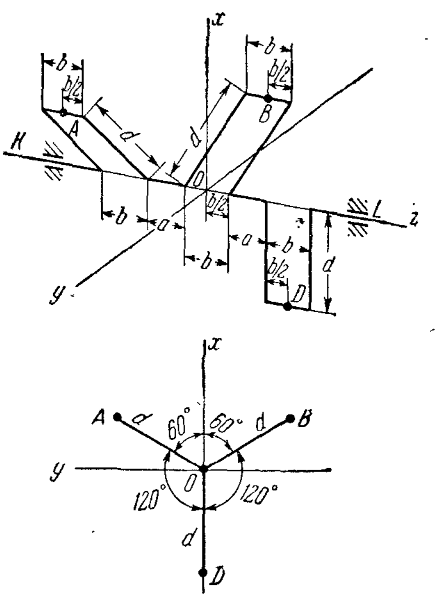
33.18 (877). Маятник на длинной нити получает небольшую начальную скорость в плоскости север — юг. Считая отклонения маятника малыми по сравнению с длиной нити и принимая во внимание вращение Земли вокруг оси, найти время, по истечении которого плоскость качаний маятника совпадет с плоскостью запад — восток. Маятник расположен на 60° северной широты.

Ответ: $T = 13{,}86\,(0{,}5 + k)$ часов, где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

ГЛАВА X
ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 34. Геометрия масс: центр масс материальной системы, моменты инерции твердых тел

34.1. Коленчатый вал трехцилиндрового двигателя, изображенный на чертеже, состоит из трех колен, расположенных под углом 120° друг к другу. Определить положение центра масс коленчатого вала, считая, что массы колен сосредоточены в точках A, B и D, причем $m_A = m_B = m_D = m$, и пренебрегая массами остальных частей вала. Размеры указаны на чертеже.



К задаче 34.1.

Ответ: Центр масс совпадает с началом координат O.

34.2. Найти уравнения движения центра масс шарнирного параллелограмма $OABO_1$, а также уравнение траектории его центра масс при вращении кривошипа OA с постоянной угловой скоростью ω. Звенья параллелограмма — однородные стержни, причем $OA = O_1B = \frac{AB}{2} = a$.

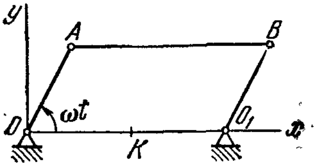
Ответ: $x_C = a + \frac{3}{4} a \cos \omega t$, $y_C = \frac{3}{4} a \sin \omega t$; уравнение траектории $(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4} a\right)^2$ — окружность радиуса $\frac{3}{4} a$ с центром в точке K с координатами $(a, 0)$.

34.3. К ползуну I весом P_1 посредством тонкой невесомой нити прикреплен груз II весом P_2. При колебаниях груза по закону

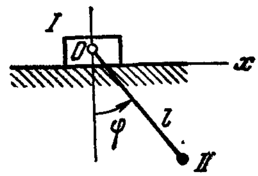
$\varphi=\varphi_0 \sin \omega t$ ползун скользит по неподвижной горизонтальной гладкой плоскости.

Найти уравнение движения ползуна $x_1=f(t)$, считая, что в начальный момент $(t=0)$ ползун находился в начале отсчета O оси x. Длина нити равна l.

Ответ: $x_1=-\dfrac{P_2}{P_1+P_2} l \sin(\varphi_0 \sin \omega t)$.



К задаче 34.2.

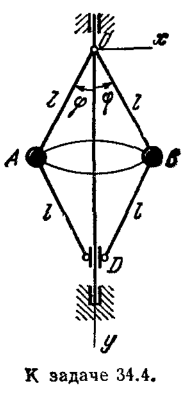


К задаче 34.3.

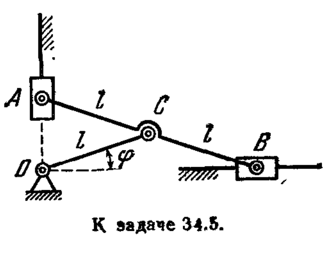
34.4. Определить положéние центра масс центробежного регулятора, изображенного на чертеже, если вес каждого из шаров A и B равен P_1, вес муфты D равен P_2. Шары A и B считать точечными массами. Массой стержней пренебречь.

Ответ: $x_C=0$, $y_C=2\dfrac{P_1+P_2}{2P_1+P_2} l \cos \varphi$.

34.5 (950). Определить траекторию центра масс механизма эллипсографа, состоящего из муфт A и B весом Q каждая, кривошипа OC весом P и линейки AB весом $2P$; дано: $OC=AC=CB=l$. Считать, что линейка и кривошип представляют однородные стержни, а муфты — точечные массы.



К задаче 34.4.



К задаче 34.5.

Ответ: Окружность с центром в точке O и радиусом, равным

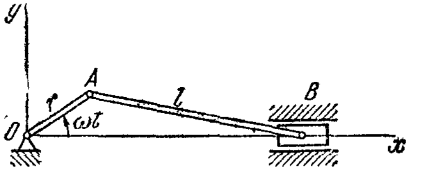
$$\frac{5P+4Q}{3P+2Q}\frac{l}{2}.$$

34.6. Кривошипно-шатунный механизм приводится в движение посредством кривошипа OA весом P_1 и длиной r, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω. Написать уравнения движения центра масс механизма, если вес шатуна AB длиной l $(r \leqslant l)$ равен P_2, а вес ползуна B равен P_3.

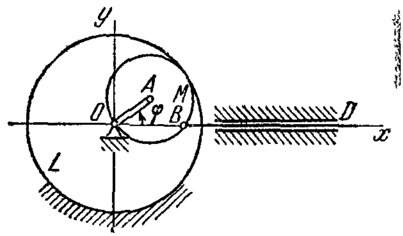
Указание. Выражение $\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \omega t}$, где $\lambda = r/l$, следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие λ^2, в степени выше второй.

Ответ:
$$x_C = (4-\lambda^2)\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}l + \frac{P_1+2P_2+2P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}r\cos\omega t + \lambda^2\frac{P_2+2P_3}{8(P_1+P_2+P_3)}l\cos 2\omega t.$$
$$y_C = \frac{P_1+P_2}{2(P_1+P_2+P_3)}r\sin\omega t, \text{ где } \lambda = \frac{r}{l}.$$

34.7. Кривошип OA весом P_1 и длиной r механизма, изображенного на чертеже, вращает зубчатое колесо M весом P_2 и радиуса r, находящееся во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом L радиуса $2r$.



К задаче 34.6.



К задаче 34.7.

К зубчатому колесу M шарнирно прикреплена рейка BD весом P_3 и длиною l, движущаяся в прямолинейных горизонтальных направляющих. Кривошип OA и рейку BD считать однородными стержнями. Центр тяжести колеса M находится в точке A. Определить положение центра масс механизма.

Ответ:
$$x_C = \frac{P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}l + \frac{P_1+2P_2+4P_3}{2(P_1+P_2+P_3)}r\cos\varphi;$$
$$y_C = \frac{P_1+2P_2}{2(P_1+P_2+P_3)}r\sin\varphi.$$

34.8. Вычислить момент инерции стального вала радиуса 5 *см* и массой 100 *кг* относительно его образующей. Вал считать однородным сплошным цилиндром.

Ответ: 3750 *кгсм*^{2}.

34.9. Вычислить момент инерции тонкого однородного полудиска весом P и радиуса r относительно оси, проходящей вдоль диаметра, ограничивающего полудиск.

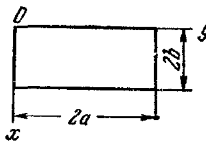
Ответ: $\frac{Pr^2}{4g}$.

34.10. Вычислить осевые J_x и J_y моменты инерции изображенной на чертеже однородной прямоугольной пластинки весом P относительно осей x и y.

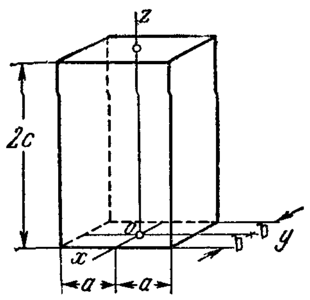
Ответ: $J_x = \frac{4}{3}\frac{P}{g}a^2$; $J_y = \frac{4}{3}\frac{P}{g}b^2$.

34.11. Вычислить моменты инерции изображенного на чертеже однородного прямоугольного параллелепипеда весом P относительно осей x, y и z.

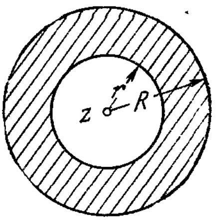
Ответ: $J_x = \frac{P}{3g}(a^2 + 4c^2)$; $J_y = \frac{P}{3g}(b^2 + 4c^2)$; $J_z = \frac{P}{3g}(a^2 + b^2)$.



К задаче 34.10.



К задаче 34.11.

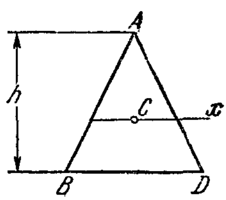


К задаче 34.12.

34.12. В тонком однородном круглом диске радиуса R высверлено концентрическое отверстие радиуса r. Вычислить момент инерции этого диска весом P относительно оси z, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости диска.

Ответ: $J_z = \frac{P}{2g}(R^2 + r^2)$.

34.13. Вычислить момент инерции тонкой однородной пластинки весом P, имеющей форму равнобедренного треугольника с высотой h, относительно оси, проходящей через ее центр тяжести C параллельно основанию.



К задаче 34.13.

Ответ: $\frac{1}{18}\frac{P}{g}h^2$.

34.14. Вычислить момент инерции пластинки, рассмотренной в предыдущей задаче, относительно оси, проходящей через ее вершину параллельно основанию.

Ответ: $\frac{P}{2g}h^2$.

34.15. Сохранив данные задачи 34.13, вычислить момент инерции пластинки относительно оси, проходящей через вершину A перпендикулярно к ее плоскости, если основание $BD = a$.

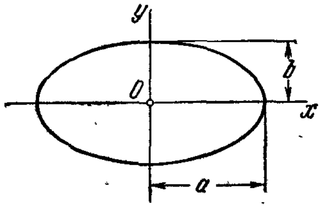
Ответ: $\frac{P}{24g}(a^2 + 12h^2)$.

34.16. Вычислить моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей x, y и z тонкой однородной эллиптической пластинки весом P, ограниченной контуром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

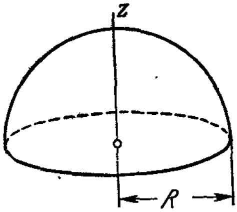
Ответ: $J_x = \frac{P}{4g}b^2$, $J_y = \frac{P}{4g}a^2$, $J_z = \frac{P}{4g}(a^2 + b^2)$.

34.17. Определить момент инерции однородного полого шара массы M относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Внешний и внутренний радиусы соответственно равны R и r.

Ответ: $\frac{2}{5} M \frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$.



К задаче 34.16.



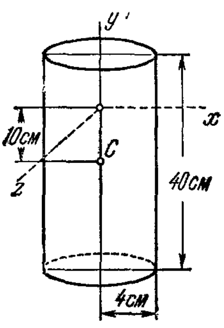
К задаче 34.18.

34.18. Вычислить момент инерции однородной тонкой оболочки, выполненной в виде полусферы радиуса R, относительно оси, проходящей через центр полусферы перпендикулярно к ограничивающей ее плоскости. Масса M оболочки равномерно распределена по поверхности полусферы.

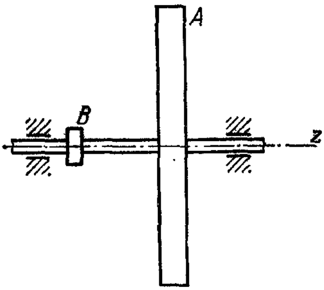
Ответ: $\frac{2}{3}MR^2$.

34.19. Вычислить радиус инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси z, перпендикулярной к оси цилиндра и отстоящей от его центра тяжести C на расстоянии 10 *см*, если радиус цилиндра равен 4 *см*, а высота 40 *см*.

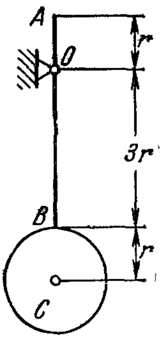
Ответ: 15,4 *см*.



К задаче 34.19.



К задаче 34.20.



К задаче 34.21.

34.20. На вал весом 60 *кГ* насажено маховое колесо A весом 1 *т* и шестерня B весом 10 *кГ*. Радиус вала равен 5 *см*, махового колеса — 1 *м* и шестерни — 10 *см*. Вычислить момент инерции системы относительно ее оси вращения z. Вал считать сплошным однородным цилиндром, шестерню — сплошным однородным диском. Масса маховика равномерно распределена по его ободу.

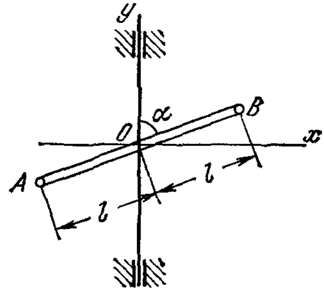
Ответ: 102 *кГ м сек*^{2}.

34.21. Маятник состоит из тонкого однородного стержня AB весом P_1, к концу которого прикреплен однородный диск C весом P_2. Длина стержня равна $4r$, где r — радиус диска. Вычислить момент инерции маятника относительно его оси привеса O, перпендикулярной к плоскости маятника и отстоящей на расстоянии r от конца стержня.

Ответ: $\dfrac{14P_1+99P_2}{6g}r^2$.

34.22. Вычислить радиус инерции маятника, рассмотренного в предыдущей задаче, относительно оси, проходящей через конец A стержня AB перпендикулярно к плоскости маятника.

Ответ: $\rho_A=r\sqrt{\dfrac{32P_1+153P_2}{6(P_1+P_2)}}$.



К задаче 34.23.

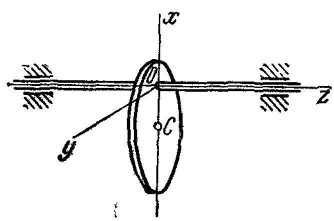
34.23. Тонкий однородный стержень AB длиной $2l$ и весом P прикреплен в центре O к вертикальной оси, образуя с ней угол α. Вычислить моменты инерции стержня J_x, J_y и центробежный момент инерции J_{xy}. Оси координат показаны на чертеже.

Ответ: $J_x=\dfrac{Pl^2}{3g}\cos^2\alpha$; $J_y=\dfrac{Pl^2}{3g}\sin^2\alpha$; $J_{xy}=\dfrac{Pl^2}{6g}\sin 2\alpha$.

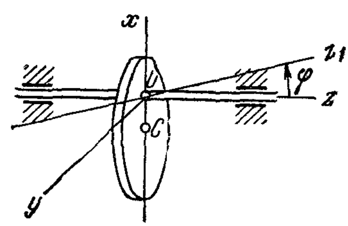
34.24. По данным условия задачи 34.1 определить центробежные моменты инерции J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} коленчатого вала.

Ответ: $J_{xz}=-\dfrac{3}{2}md(a+b)$; $J_{yz}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}md(a+b)$; $J_{xy}=0$.

34.25. Однородный круглый диск весом P эксцентрично насажен на ось z, перпендикулярную к его плоскости. Радиус диска равен r,



К задаче 34.25.



К задаче 34 27.

эксцентриситет $OC=a$, где C — центр тяжести диска. Вычислить осевые J_x, J_y, J_z и центробежные J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} моменты инерции диска. Оси координат показаны на чертеже.

Ответ: $J_x=\dfrac{Pr^2}{4g}$; $J_y=\dfrac{P}{g}\left(\dfrac{r^2}{4}+a^2\right)$; $J_z=\dfrac{P}{g}\left(\dfrac{r^2}{2}+a^2\right)$;

$J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$.

34.26. Использовав условие и ответ предыдущей задачи, определить величины полуосей эллипсоида инерции, построенного в точке O.

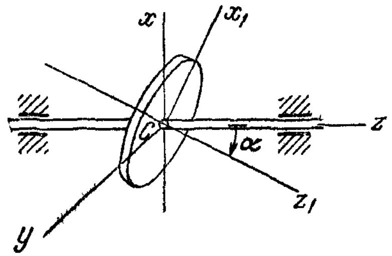
Ответ: $a=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{g}{P}}$; $b=\sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{4}+a^2\right)}}$;

$c=\sqrt{\frac{g}{P\left(\frac{r^2}{2}+a^2\right)}}$.

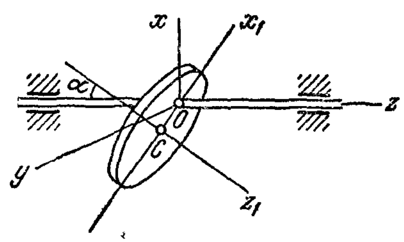
34.27. По данным условия задачи 34.25 вычислить момент инерции диска относительно оси z_1, лежащей в вертикальной плоскости xz и образующей с осью z угол φ.

Ответ: $J_{z_1}=\frac{Pr^2}{4g}\sin^2\varphi+\frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2}+a^2\right)\cos^2\varphi$.

34.28. Однородный круглый диск весом P насажен на ось z, проходящую через его центр тяжести C. Ось симметрии диска z_1



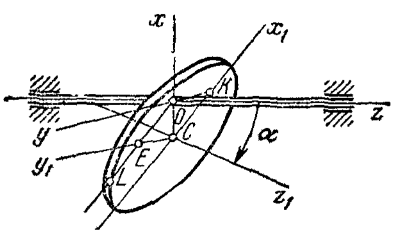
К задаче 34.28.



К задаче 34.29.

лежит в вертикальной плоскости симметрии xz и образует с осью z угол α. Радиус диска равен r. Вычислить центробежные моменты инерции диска J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (оси координат показаны на чертеже).

Ответ: $J_{xy}=J_{zy}=0$; $J_{xz}=$
$=(J_{z_1}-J_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2}=\frac{Pr^2}{8g}\sin 2\alpha$.



К задаче 34.30.

34.29. Решить предыдущую задачу в предположении, что диск эксцентрично насажен на ось z, причем эксцентриситет $OC=a$.

Ответ: $J_{xy}=J_{yz}=0$; $J_{xz}=$
$=\frac{P}{2g}\left(\frac{r^2}{4}+a^2\right)\sin 2\alpha$.

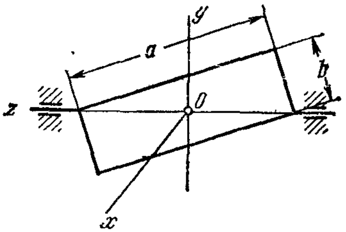
34.30. Однородный круглый диск радиуса R насажен на ось вращения z, проходящую через точку O и составляющую с осью симметрии диска Cz_1 угол α. Масса диска равна M. Определить момент инерции J_z диска относительно оси вращения z и центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz}, если OL — проекция оси z на плоскость диска, $OE=a$, $OK=b$.

Ответ: $J_z=M\left[\left(a^2+\frac{1}{2}R^2\right)\cos^2\alpha+\frac{1}{4}R^2\sin^2\alpha+b^2\right]$;

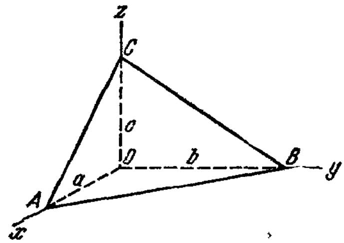
$J_{xz}=M\left(\frac{1}{4}R^2+a^2\right)\sin\alpha\cos\alpha$; $J_{yz}=Mab\sin\alpha$.

34.31. Однородная прямоугольная пластинка весом P со сторонами длиной a и b прикреплена к оси z, проходящей через одну из ее диагоналей. Вычислить центробежный момент инерции J_{yz} пластинки относительно осей y и z, лежащих вместе с пластинкой в плоскости чертежа. Начало координат совмещено с центром тяжести пластинки.

Ответ: $J_{yz}=\frac{P}{12g}\frac{ab\,(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$.



К задаче 34.31.



К задаче 34.32.

34.32. Определить относительно осей x, y, z осевые и центробежные моменты инерции изображенного на чертеже однородного тетраэдра $OABC$ массы M.

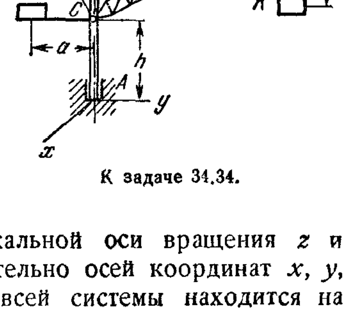
Ответ: $J_x=\frac{M}{10}(b^2+c^2),\quad J_y=\frac{M}{10}(a^2+c^2),\quad J_z=\frac{M}{10}(a^2+b^2);$

$$J_{xy}=\frac{M}{20}ab,\quad J_{yz}=\frac{M}{20}bc,\quad J_{zx}=\frac{M}{20}ca.$$

34.33. Приняв в условии предыдущей задачи $a=b=c$, найти уравнение эллипсоида инерции тетраэдра относительно точки O.

Ответ: $\frac{Ma^2}{4}(x_1^2+y_1^2)+\frac{M}{10}a^2z_1^2=$ $=1$; *ось* z_1 *симметрии эллипсоида* инерции составляет с осями x, y, z равные углы. Оси x_1 и y_1 занимают произвольное положение в плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно к z_1.

34.34. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длиной L и весом G, противовеса E весом Q и груза K весом P. Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес E и груз K как точечные массы, определить моменг инерции J_z крана относительно вертикальной оси вращения z и центробежные моменты инерции относительно осей координат x, y, z, связанных с краном. Центр тяжести всей системы находится на оси z; стрела CD расположена в плоскосги yz.



К задаче 34.34.

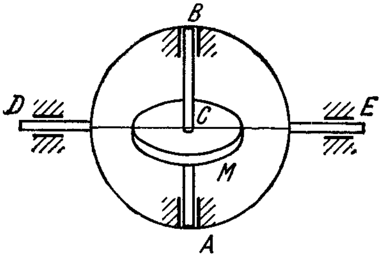
Ответ: $J_z = \frac{1}{g}\left[Qa^2 + \left(P + \frac{1}{3}G\right)L^2 \sin^2\alpha\right]$;

$$J_{yz} = \frac{P + \frac{1}{3}G}{2g} L^2 \sin 2\alpha - \frac{P}{g} Ll \sin\alpha, \quad L_{xy} = L_{xz} = 0.$$

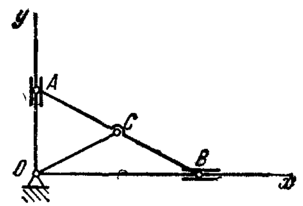
§ 35. Теорема о движении центра масс материальной системы

35.1. Определить главный вектор внешних сил, действующих на маховик M, вращающийся вокруг оси AB с угловым ускорением ε. Ось AB, укрепленная в круговой раме, в свою очередь вращается равномерно вокруг оси DE. Центр тяжести C маховика находится в точке пересечения осей AB и DE.

Ответ: Главный вектор внешних сил равен нулю.



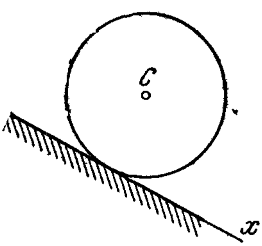
К задаче 35.1.



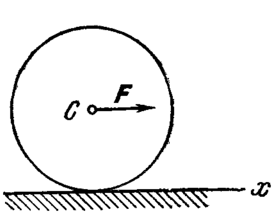
К задаче 35.2.

35.2. Определить главный вектор внешних сил, приложенных к линейке AB эллипсографа, изображенного на чертеже. Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω; вес линейки AB равен P; $OC = AC = BC = l$.

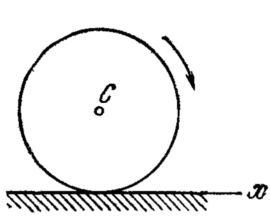
Ответ: Главный вектор внешних сил параллелен CO и равен по модулю $\frac{P}{g} l\omega^2$.



К задаче 35.3.



К задаче 35.4.



К задаче 35 5.

35.3. Определить главный вектор внешних сил, действующих на колесо весом P, скатывающееся с наклонной плоскости вниз, если его центр масс C движется по закону $x_C = at^2/2$.

Ответ: Главный вектор внешних сил параллелен оси x, направлен в сторону движения и равен по модулю Pa/g.

35.4. Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием силы F, изображенной на чертеже. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f, а $F=5fP$, где P — вес колеса. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ: $x_C=2fgt^2$.

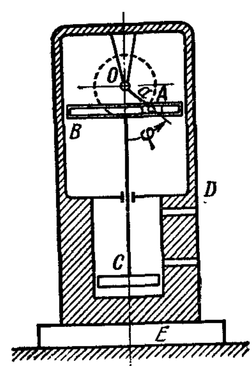
35.5. Колесо катится со скольжением по горизонтальной прямой под действием приложенного к нему вращающего момента. Найти закон движения центра масс C колеса, если коэффициент трения скольжения равен f. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ: $x_C=\frac{fgt^2}{2}$.

35.6 (958). Вагон трамвая совершает вертикальные гармонические колебания на рессорах амплитуды 2,5 *см* и периода $T=0,5$ *сек*. Вес кузова с нагрузкой 10 *т*, вес тележки и колес 1 *т*. Определить давление вагона на рельсы.

Ответ: Давление изменяется от 7 до 15 *т*.

35.7 (959). Определить давление на грунт насоса для откачки воды при его работе вхолостую, если вес неподвижных частей корпуса D и фундамента E равен P_1, вес кривошипа $OA=a$ равен P_2, вес кулисы B и поршня C равен P_3. Кривошип OA, вращающийся равномерно с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.



К задаче 35.7.

Ответ:

$$N=P_1+P_2+P_3+\frac{a\omega^2}{2g}(P_2+2P_3)\cos\omega t.$$

35.8. Использовав данные предыдущей задачи, считать, что насос установлен на упругом основании, коэффициент упругости которого равен c. Найти закон движения оси O кривошипа OA по вертикали, если в начальный момент ось O находилась в положении статического равновесия и ей была сообщена по вертикали вниз скорость v_0. Взять начало отсчета оси x, направленной вертикально вниз, в положении статического равновесия оси O. Силами сопротивления пренебречь.

Ответ: 1) При $\frac{cg}{P_1+P_2+P_3}\neq\omega^2$ $x_O=$

$$=-\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt+\frac{h}{k^2-\omega^2}\cos\omega t,$$

где $k=\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2+P_3}}$, $h=\frac{P_2+2P_3}{P_1+P_2+P_3}\frac{a\omega^2}{2}$;

2) при $\frac{cg}{P_1+P_2+P_3}=\omega^2 x_O=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{h}{2\omega}t\sin\omega t$.

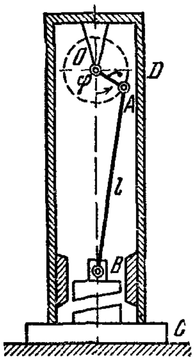
35.9 (961). Ножницы для резки металла состоят из кривошипно-шатунного механизма OAB, к ползуну B которого прикреплен подвижный нож. Неподвижный нож укреплен на фундаменте C. Определить давление фундамента на грунт, если длина кривошипа r, вес кривошипа P_1, длина шатуна l, вес ползуна B с подвижным ножом P_2, вес фундамента C и корпуса D равен P_3. Массой шатуна пренебречь. Кривошип OA, равномерно вращающийся с угловой скоростью ω, считать однородным стержнем.

Указание. Выражение $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\omega t}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение r/l в степени выше второй.

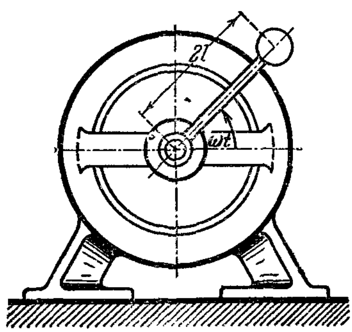
Ответ: $N=P_1+P_2+P_3+$

$$+\frac{r\omega^2}{2g}\left[(P_1+2P_2)\cos\omega t+2P_2\frac{r}{l}\cos 2\omega t\right].$$

35.10 (962). Электрический мотор весом P установлен без креплений на гладком горизонтальном фундаменте; на валу мотора под прямым углом закреплен одним концом однородный стержень длиной $2l$ и весом p, на другой конец стержня насажен точечный груз Q; угловая скорость вала равна ω.



К задаче 35.9



К задаче 35.10.

Определить: 1) горизонтальное движение мотора; 2) наибольшее горизонтальное усилие R, действующее на болты, если ими будет закреплен кожух электромотора на фундаменте.

Ответ: 1) Гармонические колебания с амплитудой $\frac{l(p+2Q)}{p+P+Q}$ и периодом $\frac{2\pi}{\omega}$;

2) $R=\frac{p+2Q}{g}l\omega^2$.

35.11 (963). По условиям предыдущей задачи вычислить ту угловую скорость ω вала электромотора, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом, не будучи к нему прикреплен болтами.

Ответ: $\omega>\sqrt{\frac{(p+P+Q)g}{(p+2Q)l}}$.

35.12. При сборке электромотора его ротор B был эксцентрично насажен на ось вращения C_1 на расстоянии $C_1C_2 = a$, где C_1 — центр тяжести статора A, а C_2 — центр тяжести ротора B. Ротор равномерно вращается с угловой скоростью ω. Электромотор установлен посередине упругой балки, статический прогиб которой равен Δ; P_1 — вес статора, P_2 — вес ротора.

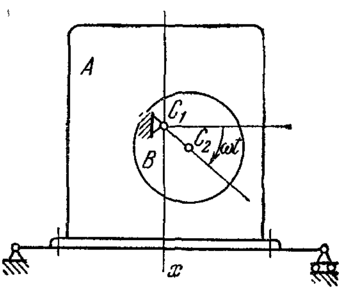
Найти уравнение движения точки C_1 по вертикали, если в начальный момент она находилась в покое в положении статического равновесия. Силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в положении статического равновесия точки C_1.

Ответ: 1) При $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} \neq \omega$ $x_1 = -\frac{\omega}{k}\frac{h}{k^2-\omega^2}\sin kt + \frac{h}{k^2-\omega^2}\sin \omega t$,

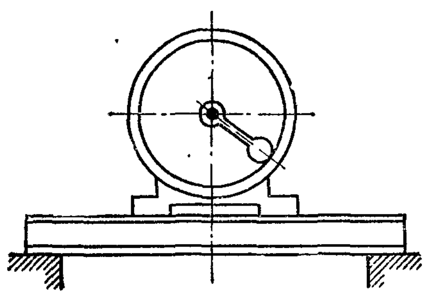
где $k = \sqrt{\frac{g}{\Delta}}$, $h = \frac{P_2}{P_1+P_2}a\omega^2$;

2) при $\sqrt{\frac{g}{\Delta}} = \omega$ $x_1 = \frac{h}{2\omega^2}\sin \omega t - \frac{h}{2\omega}t\cos \omega t$.

35.13 (872). Электрический мотор весом 30 *кГ* установлен на балке, жесткость которой $c = 300$ *кГ/см*. На вал мотора насажен



К задаче 35.12.



К задаче 35.13.

груз весом 200 *Г* на расстоянии 1,3 *см* от оси вала. Угловая скорость мотора $\omega = \text{const} = 90$ *сек*$^{-1}$. Определить амплитуду вынужденных колебаний мотора и критическое число его оборотов в минуту, пренебрегая массой балки и сопротивлением движению.

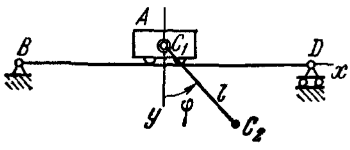
Ответ: $a = 0{,}410$ *мм*; $n_{\text{кр}} = 950$ *об/мин*.

35.14 (873). Мотор весом $P = 50$ *кГ* установлен на балке, жесткость которой $c = 500$ *кГ/см*. При свободных колебаниях балки с мотором уменьшение амплитуд последовательных отклонений от равновесного положения оказалось равным $\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{10}{9}$. На валу мотора имеется неуравновешенный груз весом $p = 0{,}2$ *кГ* на расстоянии $r = 6$ *см* от оси вращения. Найти амплитуду и сдвиг фаз вынужденных колебаний мотора, когда угловая скорость вращения вала соответствует $n = \text{const} = 980$ *об/мин*.

Ответ: $a = 0{,}253$ *см*; $\varepsilon = 137°$.

35.15. На чертеже изображена крановая тележка A весом P_1, которая заторможена посередине балки BD. В центре тяжести C_1

тележки подвешен трос длиной l с привязанным к нему грузом C_2 весом P_2. Трос с грузом совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Определить: 1) суммарную вертикальную реакцию балки BD, считая ее жесткой; 2) закон движения точки C_1 в вертикальном направлении, считая балку упругой с коэффициентом упругости, равным c.



К задаче 35.15.

В начальный момент балка, будучи недеформированной, находилась в покое в горизонтальном положении. Считая колебания троса малыми, принять: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Начало отсчета оси y взять в положении статического равновесия точки C_1. Массой троса и размерами тележки по сравнению с длиной балки пренебречь.

Ответ: 1) $R_y = P_1 + P_2$; 2) точка C_1 совершает свободные колебания по закону $y_1 = -\frac{P_1+P_2}{c}\cos\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2}}\,t$.

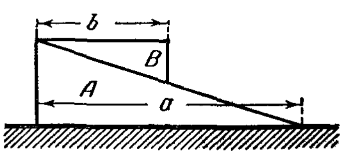
35.16. Сохранив данные предыдущей задачи и считая балку BD жесткой, определить: 1) суммарную горизонтальную реакцию рельсов; 2) в предположении, что тележка не заторможена, закон движения центра тяжести C_1 тележки A вдоль оси x.

В начальный момент точка C_1 находилась в покое в начале отсчета оси x. Трос совершает колебания по закону $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$.

Ответ: 1) $R_x = -\frac{P_2}{g} l\varphi_0\omega^2 \cos\omega t$; 2) точка C_1 совершает колебания с амплитудой $\frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0$ и круговой частотой ω по закону $x_1 = \frac{P_2}{P_1+P_2} l\varphi_0 (1 - \cos\omega t)$.

35.17 (951). На средней скамейке лодки, находившейся в покое, сидели два человека. Один из них, весом $P_1 = 50$ *кГ*, переместился вправо на нос лодки. В каком направлении и на какое расстояние должен переместиться второй человек весом $P_2 = 70$ *кГ* для того, чтобы лодка осталась в покое? Длина лодки 4 *м*. Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Ответ: Влево на корму лодки на расстояние 1,43 *м*.



К задаче 35.18.

35.18 (952). На однородную призму A, лежащую на горизонтальной плоскости, положена однородная призма B; поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники, вес призмы A втрое больше веса призмы B. Предполагая, что призмы и горизонтальная плоскость идеально гладкие, определить длину l, на которую передвинется призма A, когда призма B, спускаясь по A, дойдет до горизонтальной плоскости.

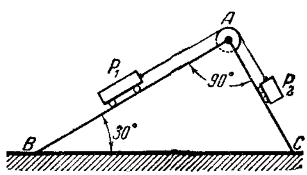
Ответ: $l = \frac{a-b}{4}$.

35.19. По горизонтальной товарной платформе длиною 6 *м* и весом 2700 *кГ*, находившейся в начальный момент в покое, двое рабочих перекатывают тяжелую стальную отливку из левого конца платформы в правый. В какую сторону и насколько переместится при этом платформа, если общий вес груза и рабочих равен 1800 *кГ*? Силами сопротивления движению платформы пренебречь.

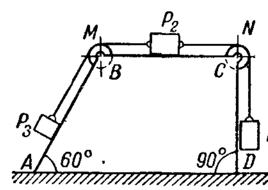
Ответ: Налево на 2,4 *м*.

35.20 (954). Грузы P_1 и P_2, соединенные нерастяжимой нитью, переброшенной через блок A, скользят по гладким боковым сторонам прямоугольного клина, опирающегося основанием BC на гладкую горизонтальную плоскость. Найти перемещение клина по горизонтальной плоскости при опускании груза P_1 на высоту $h = 10$ *см*. Вес клина $P = 4P_1 = 16P_2$; массой нити и блока пренебречь.

Ответ: Клин переместится вправо на 3,77 *см*.



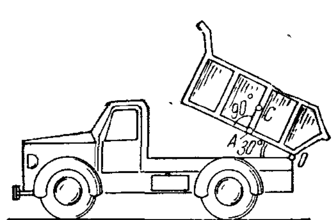
К задаче 35.20.



К задаче 35.21.

35.21 (955). Три груза весом $P_1 = 20$ *н*, $P_2 = 15$ *н* и $P_3 = 10$ *н* соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижные блоки M и N. При опускании груза P_1 вниз груз P_2 перемещается по верхнему основанию четырехугольной усеченной пирамиды $ABCD$ весом $P = 100$ *н* вправо, а груз P_3 поднимается по боковой грани AB вверх. Пренебрегая трением между усеченной пирамидой $ABCD$ и полом, определить перемещение усеченной пирамиды $ABCD$ относительно пола, если груз P_1 опустится вниз на 1 *м*.

Ответ: Влево на 14 *см*.



К задаче 35.22.

35.22. Определить перемещение незаторможенного грузовика-самосвала, находившегося в начальный момент в покое, если его кузов весом 4 *т* из горизонтального положения повернулся вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, на угол 30°. Вес грузовика без кузова равен 1,5 *т*. Положение центра тяжести C кузова указано на чертеже, причем $OA = 2$ *м*, $AC = 50$ *см*. Сопротивлением движению грузовика пренебречь.

Ответ: Влево на 39 *см*.

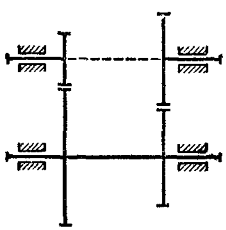
§ 36. Теорема об изменении главного вектора количеств движения материальной системы. Приложение к сплошным средам

36.1. Определить главный вектор количеств движения работающего редуктора скоростей, изображенного на чертеже, если центры тяжести каждого из четырех вращающихся зубчатых колес лежат на осях вращения.

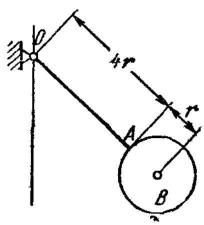
Ответ: Главный вектор количеств движения равен нулю.

36.2. Определить сумму импульсов внешних сил, приложенных к редуктору, рассмотренному в предыдущей задаче, за произвольный конечный промежуток времени.

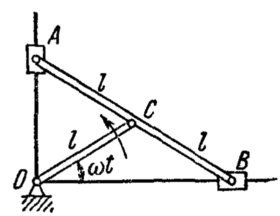
Ответ: Сумма импульсов внешних сил равна нулю.



К задаче 36.1.



К задаче 36.3



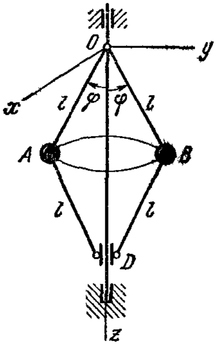
К задаче 36.4.

36.3. Определить главный вектор количеств движения маятника, состоящего из однородного стержня OA весом P_1, длиной $4r$ и однородного диска B весом P_2, радиуса r, если угловая скорость маятника в данный момент равна ω.

Ответ: Главный вектор количеств движения направлен перпендикулярно к OA и по модулю равен $\frac{2P_1+5P_2}{g}r\omega$.

36.4 (968). Определить величину и направление главного вектора количеств движения механизма эллипсографа, если вес кривошипа равен P_1, вес линейки AB эллипсографа равен $2P_1$, вес каждой из муфт A и B равен P_2; даны размеры: $OC=AC=CB=l$. Центры тяжести кривошипа и линейки расположены в их серединах. Кривошип вращается с угловой скоростью ω.

Ответ: Модуль главного вектора равен $Q=\frac{\omega l}{2g}(5P_1+4P_2)$; направление главного вектора перпендикулярно к кривошипу.



К задаче 36.5.

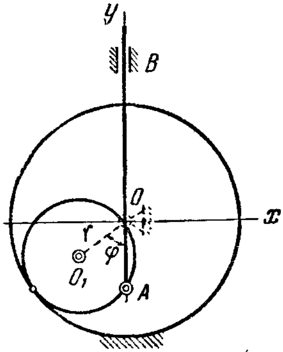
36.5. Определить главный вектор количеств движения центробежного регулятора, ускоренно вращающегося вокруг вертикальной оси. При этом углы φ изменяются по закону $\varphi=\varphi(t)$ и верхние стержни, поворачиваясь, поднимают шары A и B. Длины стержней: $OA=OB=AD=BD=l$.

Центр тяжести муфты D весом P_2 лежит на оси z. Шары A и B считать точечными массами весом P_1 каждый. Массой стержней пренебречь.

Ответ: $Q_x = Q_y = 0$, $Q_z = -2\frac{P_1 + P_2}{g} l\dot{\varphi} \sin\varphi$, где Q — главный вектор количеств движения; плоскость yz совпадает с плоскостью расположения стержней регулятора.

36.6. Определить сумму импульсов внешних сил, приложенных к регулятору, рассмотренному в предыдущей задаче, за промежуток времени, соответствующий увеличению угла φ от 30° до 60°, если φ изменяется по закону $\varphi = \alpha t$, где α — постоянная.

Ответ: Суммы импульсов внешних сил в проекциях на оси x, y, z равны: $S_x^e = S_y^e = 0$, $S_z^e = -0{,}73\frac{P_1 + P_2}{g} l\alpha$.



К задаче 36 7.

36.7 (969). В механизме, изображенном на чертеже, движущееся колесо радиуса r имеет вес p, причем центр тяжести колеса находится в точке O_1; прямолинейный стержень AB весит в k раз больше подвижного колеса и имеет центр тяжести в его середине. Кривошип OO_1 вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω. Определить главный вектор количеств движения системы, пренебрегая массой кривошипа.

Ответ: Проекции главного вектора количеств движения системы на оси координат:

1) на ось Ox: $-\frac{p}{g} r\omega \cos\omega t$;

2) на ось Oy: $\frac{p}{g} r\omega (1 + 2k) \sin\omega t$.

36.8 (970). Ствол орудия весит 11 000 *кГ*. Вес снаряда равен 54 *кГ*. Скорость снаряда у дульного среза $v_0 = 900$ *м/сек*. Определить скорость свободного отката ствола орудия в момент вылета снаряда.

Ответ: Скорость отката ствола орудия равна 4,42 *м/сек* и направлена в сторону, противоположную движению снаряда.

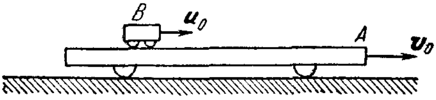
36.9 (972). Граната весом 12 *кГ*, летевшая со скоростью 15 *м/сек*, разорвалась в воздухе на две части. Скорость осколка весом 8 *кГ* возросла в направлении движения до 25 *м/сек*. Определить скорость второго осколка.

Ответ: 5 *м/сек* в направлении, противоположном движению первого осколка.

36.10 (973). Буксирный пароход весом 600 *т* приобрел скорость 1,5 *м/сек*, после чего натянулся буксирный канат и баржа весом 400 *т* тронулась вслед за пароходом. Найти общую скорость парохода и баржи, считая, что движущая сила и сила сопротивления воды уравновешиваются.

Ответ: 0,9 *м/сек*.

36.11. По горизонтальной платформе A, движущейся по инерции со скоростью v_0, перемещается тележка B с постоянной относительной скоростью u_0. В некоторый момент времени тележка была заторможена. Определить общую скорость v платформы с тележкой после ее остановки, если M — масса платформы, а m — масса тележки.



К задаче 36.11.

Ответ:

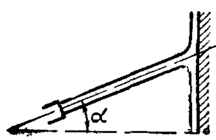
$$v = v_0 + \frac{m}{M+m} u_0.$$

36.12. Сохранив условие предыдущей задачи, определить путь s, который пройдет тележка B по платформе A с момента начала торможения до полной остановки, и время торможения τ, если считать, что при торможении возникает постоянная по величине сила сопротивления F.

Указание. В дифференциальном уравнении движения тележки использовать соотношение $Mv + m(u+v) = \text{const}$, где u и v — переменные скорости.

Ответ: $s = \frac{1}{2} \frac{mM}{M+m} \cdot \frac{u_0^2}{F}$, $\tau = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{u_0}{F}$.

36.13 (975). Из наконечника пожарного рукава с поперечным сечением 16 $см^2$ бьет струя воды под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью 8 *м/сек*. Определить давление струи на вертикальную стену, пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что частицы жидкости после встречи со стеною приобретут скорости, направленные вдоль стены.



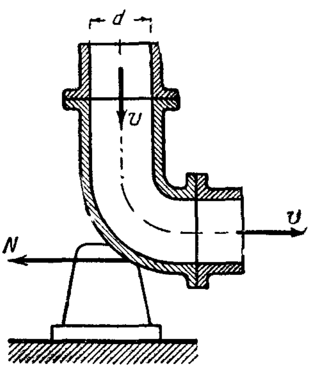
К задаче 36.13.

Ответ: 9,05 *кГ*.

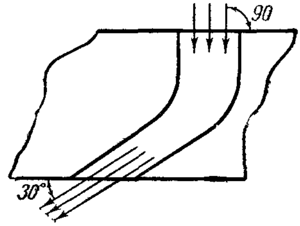
36.14 (976). Определить горизонтальную составляющую N возникающего при движении воды давления на опору колена трубы диаметром $d = 300$ *мм*, по которой течет вода со скоростью $v = 2$ *м/сек*.

Ответ: $N = 28{,}9$ *кГ*.

36.15 (977). Вода входит в неподвижный канал переменного



К задаче 36.14.



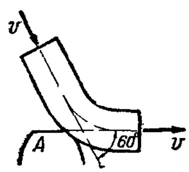
К задаче 36.15.

сечения, симметричный относительно вертикальной плоскости, со скоростью $v_0 = 2$ *м/сек* под углом $\alpha_0 = 90°$ к горизонту; сечение канала при входе 0,02 $м^2$; скорость воды у выхода из канала $v_1 = 4$ *м/сек* и направлена под углом $\alpha_1 = 30°$ к горизонту. Определить модуль горизонтальной составляющей реакции, которую вода оказывает на стенки канала.

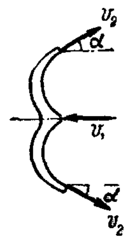
Ответ: 14,1 *кГ*.

36.16 (978). Определить давление на опору A колена трубы диаметром 20 *см*, которое возникает при движении воды. Ось трубы расположена в горизонтальной плоскости (на чертеже показан вид сверху). По трубе течет вода со скоростью 4 *м/сек*, скорость воды при входе в трубу образует угол 60° со скоростью воды при выходе из трубы.

Ответ: 51,2 *кГ*.



К задаче 36.16.

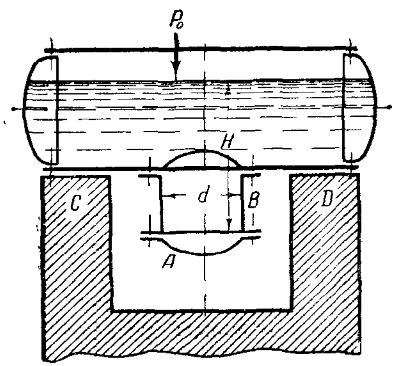


К задаче 36.17.

36.17 (979). Определить модуль горизонтальной составляющей давления струи воды на неподвижную лопатку турбинного колеса, если объемный расход воды Q, удельный вес γ, скорость подачи воды на лопатку v_1 горизонтальна, скорость схода воды v_2 образует угол α с горизонтом.

Ответ: $N = \frac{\gamma}{g} Q(v_1 + v_2 \cos\alpha)$.

36.18 (980). Паровой котел весом 10,35 *т* заполнен водой в количестве 15 *т* при давлении на свободной поверхности $p_0 = 10$ *ат* по манометру. В некоторый момент времени происходит разрыв болтов, которыми крышка A прикреплена к патрубку B посредством фланцевого соединения; вследствие срыва крышки A горячая вода начинает вытекать в атмосферу; $H = 1$ *м*, $d = 0{,}4$ *м*, относительный удельный вес горячей воды $\gamma \approx 0{,}9$. Пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, скоростями частиц воды внутри котла и явлением парообразования воды по выходе из патрубка B, вычислить давление котла на опоры в момент срыва крышки A. Среднюю скорость, с которой вода будет вытекать в атмосферу после срыва крышки, вычислить по формуле



К задаче 36.18.

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0}{\gamma}\right)}.$$

Ответ: Давление на опоры равно нулю.

§ 37. Теорема об изменении главного момента количеств движения материальной системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

37.1 (981). Однородный круглый диск весом $P=50$ *кГ* и радиуса $R=30$ *см* катится без скольжения по горизонтальной плоскости, делая вокруг своей оси 60 *об/мин.*

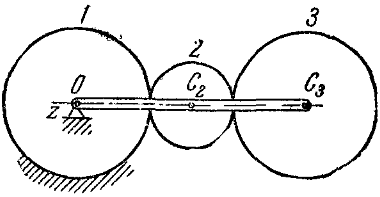
Вычислить главный момент количеств движения диска относительно осей: 1) проходящей через центр диска перпендикулярно к плоскости движения; 2) относительно мгновенной оси.

Ответ: 1) 1,44 *кГм сек*; 2) 4,32 *кГм сек.*

37.2. Вычислить главный момент количеств движения линейки AB эллипсографа в абсолютном движении относительно оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC, а также в относительном движении по отношению к оси, проходящей через центр тяжести C линейки параллельно оси z. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z; масса линейки равна m; $OC=AC=BC=l$ (см. чертеж к задаче 34.5).

Ответ:

$$L_{Oz}=\frac{2}{3}ml^2\omega_z;\quad L_{Cz}=-\frac{ml^2}{3}\omega_z.$$



К задаче 37.3.

37.3. Вычислить главный момент количеств движения планетарной передачи относительно неподвижной оси z, совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3. Неподвижное колесо *1* и подвижное колесо *3* — одинакового радиуса r. Масса колеса *3* равна m. Колесо *2* массой m_2 имеет радиус r_2. Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_z. Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками.

Ответ: $L_{Oz}=\dfrac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r^2)}{2}(r+r^2)\,\omega_z.$

37.4. (990). Натяжения ведущей и ведомой ветвей ремня, приводящего во вращение шкив радиуса $r=20$ *см*, весом $P=3{,}27$ *кГ*, соответственно равны: $T_1=10{,}1$ *кГ*, $T_2=5{,}05$ *кГ*. Чему должен быть равен момент сил сопротивления для того, чтобы шкив вращался с угловым ускорением $\varepsilon=1{,}5$ *сек*$^{-2}$? Шкив считать однородным диском.

Ответ: 1 *кГм.*

37.5 (991). Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик весом 0,5 *т*; радиус инерции маховика $\rho=1{,}5$ *м.* Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n=240$ *об/мин*; предоставленный самому себе, он остановился через 10 *мин.* Определить момент трения, считая его постоянным.

Ответ: 4,8 *кГм.*

37.6 (992). Однородный круглый диск диаметром 10 *см* и весом 1 *н* делает 100 *об/мин.* Постоянная сила трения, будучи приложена на ободе диска, может остановить его в 1 *мин.* Определить величину силы трения.

Ответ: $4{,}4 \cdot 10^{-4}$ *н.*

37.7 (993). Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущий на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости v на ободе маховика: $M_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным; диаметр маховика D, момент инерции его относительно оси вращения J. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.

Ответ: $T = \frac{2J}{kD} \ln\left(1 + \frac{kD\omega_0}{2M_2}\right)$.

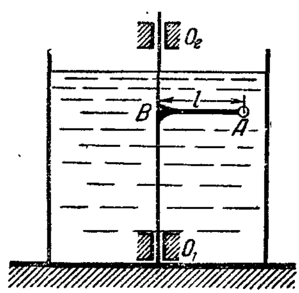
37.8 (994). Твердое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M; при этом возникает момент сил сопротивления M_1, пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твердого тела относительно оси вращения равен J.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$, где $\beta = \frac{2}{J}\sqrt{\alpha M}$.

37.9 (995). Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твердого тела: $M_1 = \alpha\omega$.

Ответ: $\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J}t}\right)$.

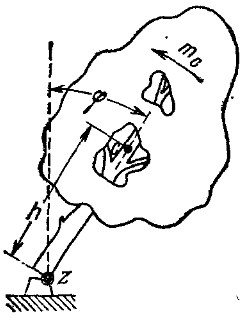
37.10 (996). Шарик A, находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длиной l, приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0. Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m\omega$, где m — масса шарика, α — коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов, которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.



К задаче 37.10.

Ответ: $T = \frac{1}{\alpha} \ln 2$; $n = \frac{l\omega_0}{4\pi\alpha}$ *об.*

37.11. Определить, с какой угловой скоростью ω упадет на землю спиленное дерево весом G, если его центр тяжести C расположен на расстоянии h от основания, а силы сопротивления воздуха создают момент сопротивления m_c, причем $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, где $\alpha = \text{const}$. Момент инерции дерева относительно оси z, совпадающей с осью, вокруг которой поворачивается дерево при падении, равен J.



К задаче 37.11.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{2GhJ}{J^2+4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\,\dfrac{\alpha}{J}\right)}$.

37.12 (997). Вал радиуса r приводится во вращательное движение вокруг горизонтальной оси гирей, подвешенной посредством троса. Для того чтобы угловая скорость вала через некоторое время после начала движения имела величину, близкую к постоянной, с валом соединены n одинаковых пластин; сопротивление воздуха, испытываемое пластиной, приводится к силе, нормальной к пластине, приложенной на расстоянии R от оси вала и пропорциональной квадрату ее угловой скорости, причем коэффициент пропорциональности равен k. Масса гири m, момент инерции всех вращающихся частей относительно оси вращения равен J; массой троса и трением в опорах пренебречь.

Определить угловую скорость ω вала, предполагая, что в начальный момент она равна нулю.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}\,\dfrac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$, где $\alpha = \dfrac{2}{J+mr^2}\sqrt{mgnkrR}$; при достаточно большом значении t угловая скорось ω близка к постоянной величине $\sqrt{\dfrac{mgr}{knR}}$.

37.13 (998). Определить закон вращения вала, рассмотренного в предшествующей задаче, считая, что при отсутствии гири начальная угловая скорость вала равнялась ω_0. Начальный угол поворота считать равным нулю.

Ответ: $\varphi = \dfrac{J}{nkR}\ln\left(1 + \dfrac{nkR\omega_0}{J}\,t\right)$.

37.14 (999). Определить закон вращения вала, рассмотренного в задаче 37.12, считая силу сопротивления движению пропорциональной угловой скорости вала. Начальный угол поворота принять равным нулю.

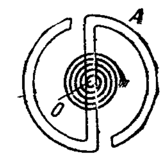
Ответ: $\varphi = \sigma\left[t + \dfrac{1}{\gamma}\left(e^{-\gamma t} - 1\right)\right]$, где $\sigma = \dfrac{mgr}{nkR}$, $\gamma = \dfrac{nkR}{J+mr^2}$.

37.15 (1014). Упругую проволоку, на которой подвешен однородный шар с радиусом r и массой m, закручивают на угол φ_0, а затем предоставляют ей свободно раскручиваться. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c.

Определить движение, пренебрегая сопротивлением воздуха и считая момент силы упругости закрученной проволоки пропорциональным углу кручения φ.

Ответ: $\varphi = \varphi_0\cos\sqrt{\dfrac{5c}{2mr^2}}\,t$.

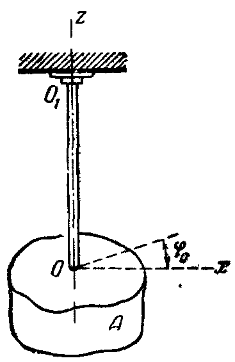
37.16 (1015). Часовой балансир A может вращаться вокруг перпендикулярной к его плоскости оси, проходящей через центр тяжести O, имея относительно этой оси момент инерции J. Балансир приводится в движение спиральной пружиной, один конец которой с ним скреплен, а другой присоединен к неподвижному корпусу часов. При повороте балансира возникает момент сил упругости пружины, пропорциональный углу поворота. Момент, необходимый для закручивания пружины на один радиан, равен c. Определить закон движения балансира, если в начальный момент в условиях отсутствия сил упругости балансиру сообщили начальную угловую скорость ω_0.



К задаче 37.16.

Ответ: $\varphi = \omega_0 \sqrt{\frac{J}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{J}}\, t.$

37.17 (1016). Для определения момента инерции J_z тела A относительно вертикальной оси Oz его прикрепили к упругому вертикальному стержню OO_1, закрутили этот стержень, повернув тело A вокруг оси Oz на малый угол φ_0, и пустили колебаться; продолжительность 100 размахов оказалась равной $100T_1 = 2$ *мин*, где T_1 — половина периода; момент сил упругости относительно оси Oz равен $m_z = -c\varphi$. Для определения коэффициента c проделали второй опыт: на стержень в точке O был надет однородный круглый диск радиуса $r = 15$ *см*, весом $P = 1{,}6$ *кГ*, и тогда продолжительность одного размаха оказалась равной $T_2 = 1{,}5$ *сек*. Определить момент инерции тела J_z.



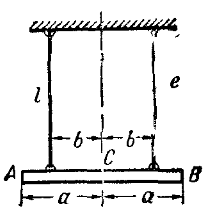
К задаче 37.17.

Ответ: $J_z = \frac{Pr^2}{2g}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 0{,}117$ *кГ см сек*^{2}.

37.18 (1017). Решить предыдущую задачу в предположении, что для определения коэффициента c второй опыт проделывают иначе: однородный круглый диск весом P и радиуса r прикрепляется к телу, момент инерции которого требуется определить. Найти момент инерции тела J_z, если период колебаний тела τ_1, а период колебаний тела с прикрепленным к нему диском τ_2.

Ответ: $J_z = \frac{Pr^2}{2g}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2}$.

37.19 (1018). Бифилярный подвес состоит из однородного стержня AB длиной $2a$, подвешенного горизонтально посредством двух вертикальных нитей длиной l, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$. Определить период крутильных колебаний стержня, полагая, что стержень в течение всего времени движения остается в горизонтальном положении и натяжение каждой из нитей равно половине веса стержня.



К задаче 37.19.

Указание. При определении горизонтальной составляющей натяжения каждой из нитей, считая колебания бифиляра малыми, заменить синус угла между направлением нити и вертикалью самим углом.

Ответ: $T=\frac{2\pi a}{b}\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

37.20 (1019). Диск, подвешенный к упругой проволоке, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент инерции диска относительно оси проволоки равен J. Момент, необходимый для закручивания проволоки на один радиан, равен c. Момент сопротивления движению равен $\alpha S\omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — угловая скорость диска. Определить период колебаний диска в жидкости.

Ответ: $T=\frac{4\pi J}{\sqrt{4cJ-\alpha^2S^2}}$.

37.21 (1020). Определить закон убывания амплитуд колебаний диска, рассмотренного в предыдущей задаче.

Ответ: Амплитуды колебаний диска убывают по геометрической прогрессии со знаменателем $e^{-\frac{\alpha\pi S}{\sqrt{4cJ-\alpha^2S^2}}}$.

37.22. Твердое тело, подвешенное на упругой проволоке, совершает крутильные колебания под действием внешнего момента $m_в$, причем $m_{в_z}=m_1\sin\omega t+m_3\sin 3\omega t$, где m_1, m_3 и ω — постоянные, а z — ось, направленная вдоль проволоки. Момент упругости проволоки равен $m_{упр}$, причем $m_{упр\,z}=-c\varphi$, где c — коэффициент упругости, а φ — угол закручивания. Определить закон вынужденных крутильных колебаний твердого тела, если его момент инерции относительно оси z равен J_z. Силами сопротивления движению пренебречь. Считать, что $\sqrt{\frac{c}{J_z}}\neq\omega$ и $\sqrt{\frac{c}{J_z}}\neq 3\omega$.

Ответ: $\varphi=\frac{h_1}{k^2-\omega^2}\sin\omega t+\frac{h_3}{k^2-9\omega^2}\sin 3\omega t$, где

$$k^2=\frac{c}{J_z};\quad h_1=\frac{m_1}{J_z},\quad h_3=\frac{m_3}{J_z}.$$

37.23. Решить предыдущую задачу с учетом момента сопротивления m_c, пропорционального угловой скорости твердого тела, причем $m_{cz}=-\beta\dot\varphi$, где β — постоянный коэффициент.

Ответ: $\varphi=A_1\sin(\omega t-\varepsilon_1)+A_3\sin(3\omega t-\varepsilon_3)$, где

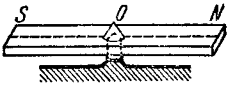
$$A_1=\frac{h_1}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}},\qquad A_3=\frac{h_3}{\sqrt{(k^2-9\omega^2)^2+36n^2\omega^2}},$$

$$\varepsilon_1=\operatorname{arctg}\frac{2n\omega}{k^2-\omega^2},\qquad \varepsilon_3=\operatorname{arctg}\frac{6n\omega}{k^2-9\omega^2},\qquad n=\frac{\beta}{2J_z}.$$

37.24 (1021). Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают колебания диска, подвешенного к упругой проволоке в жидкости. К диску приложен внешний момент, равный $M_0\sin pt$ ($M_0=\text{const}$), при котором наблюдается явление резонанса. Момент сопротивления движению диска в жидкости равен $\alpha S\omega$, где α — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — угловая скорость диска. Определить коэффициент α вязкости жидкости, если амплитуда вынужденных колебаний диска при резонансе равна φ_0.

Ответ: $\alpha = \dfrac{M_0}{\varphi_0 S p}$.

37.25 (1022). Призматический магнит массой m граммов, длиной $2a$ и шириной $2b$ сантиметров, полюсы которого находятся на его концах, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести, в земном магнитном поле. Отклонив магнит из положения равновесия SN на весьма малый угол, предоставляют его самому себе. Определить движения магнита, если известно, что горизонтальная составляющая магнитного поля Земли действует на единицу магнетизма с силою H *дин*, а магнитный момент магнита, т. е. произведение количества магнетизма, сосредоточенного в полюсах, на расстояние $2a$ между полюсами, равен A единицам в системе CGS.



К задаче 37.25.

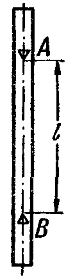
Ответ: Гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(a^2+b^2)}{3AH}}.$$

37.26 (1026). При полете снаряда вращение его вокруг оси симметрии замедляется действием момента силы сопротивления воздуха, равного $k\omega$, где ω — угловая скорость вращения снаряда, k — постоянный коэффициент пропорциональности. Определить закон убывания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0, а момент инерции снаряда относительно оси симметрии равен J.

Ответ: $\omega = \omega_0 e^{-\frac{k}{J}t}$.

37.27 (1003). Для определения ускорения силы тяжести пользуются оборотным маятником, который представляет собой стержень, снабженный двумя трехгранными ножами A и B. Один из ножей неподвижен, а второй может перемещаться вдоль стержня. Подвешивая стержень то на один, то на другой нож и меняя расстояние AB между ними, можно добиться равенства периодов качаний маятника вокруг каждого из ножей. Чему равно ускорение силы тяжести, если расстояние между ножами, при котором периоды качаний маятника равны, $AB = l$, а период качаний равен T?



К задаче 37.27.

Ответ: $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$.

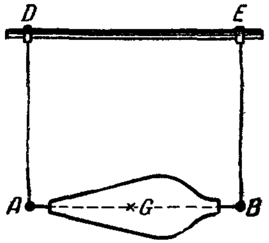
37.28 (1004). Два твердых тела могут качаться вокруг одной и той же горизонтальной оси как отдельно друг от друга, так и скрепленные вместе. Определить приведенную длину сложного маятника, если веса твердых тел p_1 и p_2, расстояния от их центров тяжести до общей оси вращения a_1 и a_2, а приведенные длины при отдельном качании каждого l_1 и l_2.

Ответ: $l_{\text{пр}} = \dfrac{p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2}$.

37.29 (1005). Для регулирования хода часов к маятнику весом P приведенной длины l с расстоянием a от его центра тяжести до оси привеса прикрепляют добавочный груз весом p на расстоянии x от оси привеса. Принимая добавочный груз за материальную точку, определить изменение Δl приведенной длины маятника при данных значениях p и x и значение $x = x_1$, при котором заданное изменение Δl приведенной длины маятника достигается при помощи добавочного груза наименьшей массы.

Ответ: Приведенную длину маятника надо уменьшить на

$$\Delta l_{\text{пр}} = \frac{px(x-l)}{Pa+px}; \quad x_1 = \frac{1}{2}(l + \Delta l).$$



К задаче 37.30.

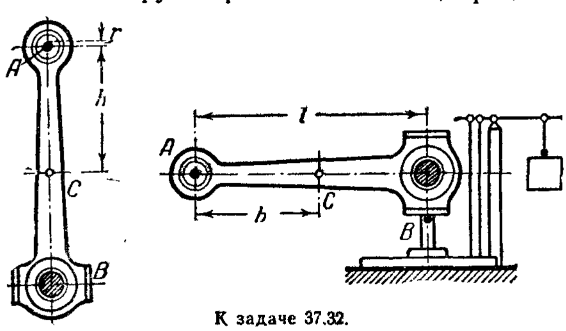
37.30 (1006). Для определения момента инерции J данного тела относительно некоторой оси AB, проходящей через центр тяжести G тела, его подвесили жестко скрепленными с ним стержнями AD и BE, свободно насаженными на неподвижную горизонтальную ось DE, так, что ось AB параллельна DE; приведя затем тело в колебательное движение, определили продолжительность T одного размаха. Как велик момент инерции J, если вес тела p и расстояние между осями AB и DE равно h? Массами стержней пренебречь.

Ответ: $J = hp\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$.

37.31. Решить предыдущую задачу с учетом массы тонких однородных прямолинейных стержней AD и BE, если вес каждого из них равен Q.

Ответ: $J = h\left[\frac{(P+Q)\,T^2}{\pi^2} - \frac{3P+2Q}{3g}\,h\right]$.

37.32 (1007). Для определения момента инерции шатуна его заставляют качаться вокруг горизонтальной оси, продев через втулку



К задаче 37.32.

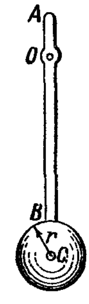
цапфы крейцкопфа тонкий цилиндрический стержень. Продолжительность ста размахов $100T = 100$ *сек*, где T — половина периода. Затем для определения расстояния $AC = h$ центра тяжести C от центра A

отверстия шатун положили горизонтально, подвесив его в точке A к талям и оперев точкой B на платформу десятичных весов; давление на нее оказалось при этом равным $P = 50$ *кГ*. Определить центральный момент инерции J шатуна относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа, имея следующие данные: вес шатуна $Q = 80$ *кГ*, расстояние между вертикалями, проведенными через точки A и B (см. правый чертеж), $l = 1$ *м*, радиус цапфы крейцкопфа $r = 4$ *см*.

Ответ:

$$J = \frac{Pl + Qr}{g}\left(\frac{g}{\pi^2}T^2 - \frac{P}{Q}l - r\right) = 1,77 \text{ кГм сек}^2.$$

37.33 (1008). Маятник состоит из стержня AB с прикрепленным к нему шаром с массой m и радиусом r, центр которого C находится на продолжении стержня. Определить, пренебрегая массой стержня, в какой точке стержня нужно поместить ось привеса для того, чтобы продолжительность одного размаха при малых качаниях имела данную величину T.



К задаче 37.33.

Ответ: $OC = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1,6\pi^4 r^2}\right)$.

Так как должно быть $OC \geqslant r$, то решение возможно, если $T^2 \geqslant 1,4\frac{\pi^2}{g}r$; решение, соответствующее знаку минус перед радикалом, невозможно.

37.34 (1009). На каком расстоянии от центра тяжести должен быть подвешен физический маятник, чтобы период его качаний был наименьшим?

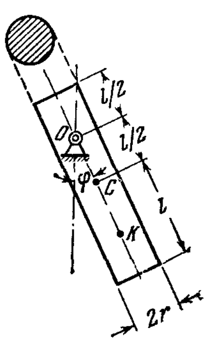
Ответ: На расстоянии, равном радиусу инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к плоскости качаний.

37.35 (1010). Маятник состоит из стержня с двумя закрепленными на нем грузами, расстояние между которыми равно l; верхний груз имеет массу m_1, нижний — массу m_2. Определить, на каком расстоянии x от нижнего груза нужно поместить ось привеса для того, чтобы период малых качаний маятника был наименьшим; массой стержня пренебречь и грузы считать материальными точками.

Ответ: $x = l\sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}$.

37.36 (1011). На каком расстоянии от оси привеса должен быть присоединен к физическому маятнику добавочный груз, чтобы период качаний маятника не изменился?

Ответ: На расстоянии приведенной длины физического маятника.

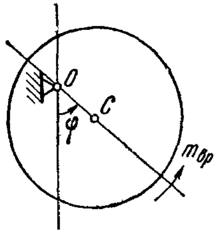


К задаче 37.37.

37.37 (1012). Круглый цилиндр с массой M, длиной $2l$ и радиусом $r = l/6$ качается около оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа.

Как изменится период качаний цилиндра, если прикрепить к нему на расстоянии $OK=\frac{85}{72}l$ точечную массу m?

Ответ: Период качаний не изменится, так как точечная масса добавлена в центре качаний цилиндра.



К задаче 37.38.

37.38. Найти уравнение малых колебаний однородного диска весом P и радиуса r, совершающего колебания вокруг горизонтальной оси Oz, перпендикулярной к его плоскости и отстоящей от центра тяжести C диска на расстоянии $OC=r/2$. К диску приложен вращающий момент $m_{вр}$, причем $m_{врz}=m_0\sin pt$, где m_0 и p — постоянные. В начальный момент диску, находившемуся в наинизшем положении, была сообщена угловая скорость ω_0. Силами сопротивления пренебречь. Считая колебания малыми, принять $\sin\varphi\approx\varphi$.

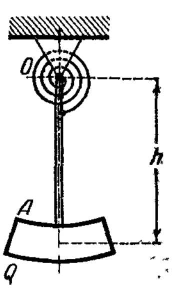
Ответ: 1) При $p\neq\sqrt{\frac{2g}{3r}}$ $\varphi=\frac{1}{k}\left(\omega_0-\frac{hp}{k^2-p^2}\right)\sin kt+$ $+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$, где $k=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $h=\frac{4gm_0}{3Pr^2}$;

2) при $p=\sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $\varphi=\frac{1}{p}\left(\omega_0+\frac{h}{2p}\right)\sin pt-\frac{h}{2p}t\cos pt$,

где $h=\frac{4gm_0}{3Pr^2}$.

37.39 (1013). В сейсмографах — приборах для регистрации землетрясений — применяется физический маятник, ось подвеса которого образует угол α с вертикалью. Расстояние от оси привеса до центра тяжести маятника равно a, момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно оси привеса, равен J_C, вес маятника равен P. Определить период колебаний маятника.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{gJ_C+Pa^2}{Pga\sin\alpha}}$.



К задаче 37.40.

37.40 (1023). В вибрографе для записи горизонтальных колебаний фундаментов машин маятник OA, состоящий из рычага с грузом на конце, может качаться вокруг своей горизонтальной оси O, удерживаясь в вертикальном положении устойчивого равновесия собственным весом и спиральной пружиной. Определить период собственных колебаний маятника при малых углах отклонения, если максимальный статический момент веса маятника относительно его оси вращения $Qh=4{,}5$ *кГсм*, момент инерции относительно той же оси $J=0{,}03$ *кГ см сек*^{2}, коэффициент жесткости пружины, сопротивление которой пропорционально углу закручивания, равен $c=0{,}1$ *кГсм*; при равновесном положении маятника пружина находится в ненапряженном состоянии. Сопротивлениями пренебречь.

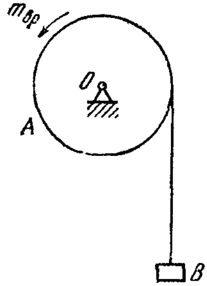
Ответ: $T=0{,}5$ *сек*.

37.41 (1024). Виброграф (см. предыдущую задачу) закреплен на фундаменте, совершающем горизонтальные гармонические колебания по закону $x = a\sin 60t$ *см*. Определить амплитуду a колебаний фундамента, если амплитуда вынужденных колебаний маятника вибрографа оказалась равной 6°.

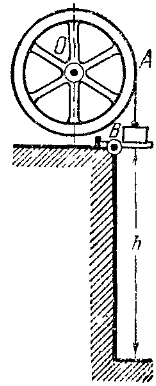
Ответ: $a = 6{,}5$ *мм*.

37.42. При пуске в ход электрической лебедки к барабану A приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$, пропорциональный времени, причем $m_{\text{вр}} = at$, где a — постоянная. Груз B весом P_1 поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и весом P_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебедка находилась в покое.

Ответ: $\omega = \dfrac{(at - 2P_1 r)\, gt}{r^2\,(2P_1 + P_2)}$.



К задаче 37.42.

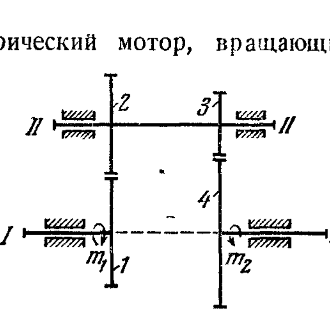


К задаче 37.43.

37.43 (1002). Для определения момента инерции J махового колеса A радиуса $R = 50$ *см* относительно оси, проходящей через центр тяжести, колесо обмотали тонкой проволокой, к которой привязали гирю B весом $P_1 = 8$ *кГ* и наблюдали продолжительность $T = 16$ *сек* опускания гири с высоты $h = 2$ *м*. Для исключения трения в подшипниках проделали второй опыт с гирей весом $p_2 = 4$ *кГ*, причем продолжительность опускания оказалась равной $T_2 = 25$ *сек* при прежней высоте. Считая момент силы трения постоянным и не зависящим от веса гири, вычислить момент инерции J.

Ответ: $J = R^2 \dfrac{\dfrac{1}{2h}(p_1 - p_2) - \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{p_1}{T_1^2} - \dfrac{p_2}{T_2^2}\right)}{\dfrac{1}{T_1^2} - \dfrac{1}{T_2^2}} = 108$ *кГм сек*^{2}.

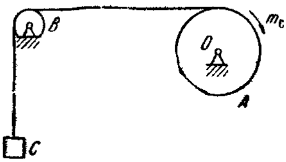
37.44. К валу I присоединен электрический мотор, вращающий момент которого равен m_1. Посредством редуктора скоростей, состоящего из четырех зубчатых колес 1, 2, 3 и 4, этот вращающий момент передается на шпиндель III токарного станка, к которому приложен момент сопротивления m_2 (этот момент возникает при снятии резцом стружки с обтачиваемого изделия). Определить угловое ускорение шпинделя III, если моменты инерции всех вращающихся деталей, насаженных на валы I, II и III, соответственно равны J_I, J_{II}, J_{III}. Радиусы колес равны r_1, r_2, r_3 и r_4.



К задаче 37.44.

Ответ: $\varepsilon_{III} = \dfrac{m_1 k_{1,2} \cdot k_{3,4} - m_2}{(J_I k_{1,2}^2 + J_{II}) k_{3,4}^2 + J_{III}}$, где $k_{1,2} = \dfrac{r_2}{r_1}$, $k_{3,4} = \dfrac{r_4}{r_3}$.

37.45. Барабан A весом P_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза C весом P_2, привязанного к концу нерастяжимого троса. Трос переброшен через блок B и намотан на барабан A. К барабану A приложен момент сопротивления m_c, пропорциональный угловой скорости барабана; коэффициент пропорциональности равен α. Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое. Массой каната и блока B пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.



К задаче 37.45.

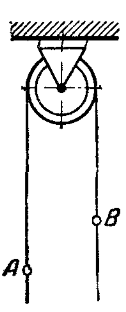
Ответ: $\omega = \dfrac{P_2 r}{\alpha}(1 - e^{-\beta t})$, где $\beta = \dfrac{2g\alpha}{r^2 (P_1 + 2P_2)}$;

$$\lim_{t \to \infty} \omega = \frac{P_2 r}{\alpha} = \text{const}.$$

37.46. Определить угловое ускорение ведущего колеса автомашины весом P и радиуса r, если к колесу приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$. Момент инерции колеса относительно оси, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости материальной симметрии, равен J_C; f_k — коэффициент трения качения, $F_{\text{тр}}$ — сила трения. Найти также значение вращающего момента, при котором колесо катится с постоянной угловой скоростью.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{m_{\text{вр}} - Pf_k - F_{\text{тр}} r}{I_C}$; $m_{\text{вр}} = Pf_k + F_{\text{тр}} r$.

37.47. Определить угловую скорость ведомого автомобильного колеса весом P и радиуса r. Колесо, катящееся со скольжением по горизонтальному шоссе, приводится в движение посредством горизонтально направленной силы, приложенной в его центре тяжести C. Момент инерции колеса относительно оси C, перпендикулярной к плоскости материальной симметрии, равен J_C; f_k — коэффициент трения качения, f — коэффициент трения при качении со скольжением. В начальный момент колесо находилось в покое.



К задаче 37.49.

Ответ: $\omega = \dfrac{P}{J_C}(fr - f_k)t$.

37.48. Изменится ли угловая скорость колеса, рассмотренного в предыдущей задаче, если модуль силы, приложенной в его центре тяжести C, увеличится в два раза?

Ответ: Не изменится.

37.49 (982). Через блок, массой которого пренебрегаем, перекинут канат; за точку A каната ухватился человек, к точке B подвязан груз одинакового веса с человеком. Что произойдет с грузом, если человек станет подниматься по канату со скоростью a относительно каната?

Ответ: Груз будет подниматься с канатом со скоростью $\frac{a}{2}$.

37.50 (983). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание вес блока, который в четыре раза меньше веса человека. Считать, что масса блока равномерно распределена по его ободу.

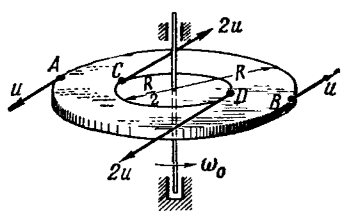
Ответ: Груз будет подниматься со скоростью $\frac{4}{9}a$.

37.51 (984). Круглая горизонтальная платформа может вращаться без трения вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через ее центр O; по платформе на неизменном расстоянии от оси Oz, равном r, идет с постоянной относительной скоростью u человек, вес которого равен p.

С какой угловой скоростью ω будет при этом вращаться платформа вокруг оси, если вес ее P можно считать равномерно распределенным по площади круга радиуса R, а в начальный момент платформа и человек имели скорость, равную нулю?

Ответ: $\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2} u$.

37.52 (985). Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести, с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом на платформе стоят четыре человека одинакового веса: два — на краю платформы, а два — на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u, а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу — круглым однородным диском.



К задаче 37.52.

Ответ: Платформа будет вращаться с той же угловой скоростью.

37.53 (986). Решить предыдущую задачу в предположении, что все люди двигаются в сторону вращения платформы. Радиус платформы R, ее масса в четыре раза больше массы каждого из людей и равномерно распределена по всей ее площади. Выяснить также, чему должна быть равна относительная линейная скорость u для того, чтобы платформа перестала вращаться.

Ответ: $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$; $u = \frac{9}{8} R\omega_0$.

37.54 (987). Человеку, стоящему на скамейке Жуковского, в то время, когда он протянул руки в стороны, сообщают начальную угловую скорость, соответствующую 15 *об/мин*; при этом момент инерции человека и скамейки относительно оси вращения равен 0,8 *кГм сек*^{2}. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамейка с человеком, если, приблизив руки к туловищу, он уменьшит момент инерции системы до 0,12 *кГм сек*^{2}?

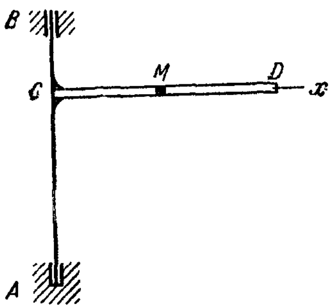
Ответ: 100 *об/мин*.

37.55 (988). Два твердых тела вращаются независимо друг от друга вокруг одной неподвижной оси с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Моменты инерции твердых тел относительно этой оси соответственно равны J_1 и J_2. С какой угловой скоростью станут вращаться оба тела, если они будут во время вращения соединены?

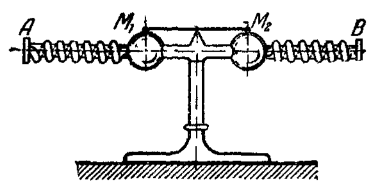
Ответ: $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$.

37.56. Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB. Внутри трубки на расстоянии $MC = a$ от оси находится шарик M. В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0. Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J, L — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m.

Ответ: $\omega = \dfrac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$.



К задаче 37.56.

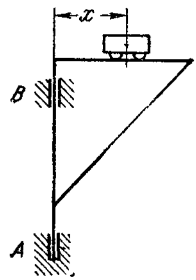


К задаче 37.57.

37.57 (989). Однородный стержень AB длиной $2L = 180$ *см* и весом $Q = 2$ *н* подвешен в устойчивом положении равновесия на острие так, что ось его горизонтальна. Вдоль стержня могут перемещаться два шара M_1 и M_2, весом каждый $P = 5$ *н*, прикрепленные к концам двух одинаковых пружин. Стержню сообщается вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 64$ *об/мин*, причем шары расположены симметрично относительно оси вращения и центры их с помощью нити удерживаются на расстоянии $2l_1 = 72$ *см* друг от друга. Затем нить пережигается, и шары, совершив некоторое число колебаний, устанавливаются под действием пружин и сил трения в положение равновесия на расстоянии $2l_2 = 108$ *см* друг от друга. Рассматривая шары как материальные точки и пренебрегая массами пружин, определить новое число n_2 оборотов стержня в минуту.

Ответ: $n_2 = \dfrac{6Pl_1^2 + QL^2}{6Pl_2^2 + QL^2}n_1 = 34$ *об/мин*.

37.58. Тележка поворотного подъемного крана движется с постоянной скоростью v относительно стрелы. Мотор, вращающий кран, создает в период разгона постоянный момент, равный m_0. Определить угловую скорость ω вращения крана в зависимости от расстояния x тележки до оси вращения AB, если вес тележки с грузом равен P, J — момент инерции крана (без тележки) относительно оси вращения; вращение начинается в момент, когда тележка находится на расстоянии x_0 от оси AB.



К задаче 37.58.

Ответ: $\omega = \dfrac{m_0}{J + \dfrac{P}{g} x^2} \cdot \dfrac{x - x_0}{v}$.

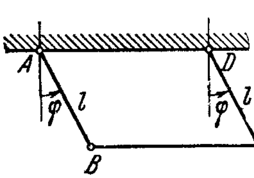
37.59. Сохранив условие предыдущей задачи, определить угловую скорость ω вращения крана, если мотор создает вращающий момент, равный $m_0 - \alpha\omega$, где m_0 и α — положительные постоянные.

Ответ: $\omega = \dfrac{m_0}{v\left(J + \dfrac{P}{g} x^2\right)} e^{-\mu \operatorname{arctg} \frac{x}{k}} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{\mu \operatorname{arctg} \frac{x}{k}} dx$, где $k = \sqrt{\dfrac{gJ}{P}}$, $\mu = \dfrac{\alpha}{v_x} \sqrt{\dfrac{g}{JP}}$ (ось x направлена горизонтально вправо вдоль стрелы).

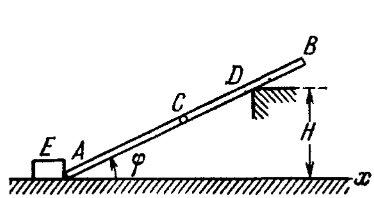
§ 38. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

38.1. Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней AB, BC и CD, прикрепленных цилиндрическими шарнирами A и D к потолку и соединенных между собой шарнирами B и C. Вес каждого из стержней AB и CD длиной l равен P_1, вес стержня BC равен P_2, причем $BC = AD$. Стержни AB и DC вращаются с угловой скоростью ω.

Ответ: $T = \dfrac{2P_1 + 3P_2}{6g} l^2 \omega^2$.



К задаче 38.1.



К задаче 38.2.

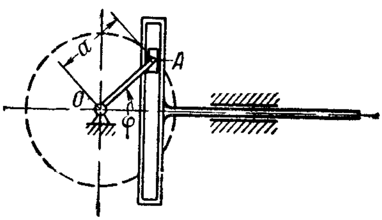
38.2. Однородный тонкий стержень AB весом P опирается на угол D и концом A скользит по горизонтальной направляющей. Упор E перемещается вправо с постоянной скоростью v. Определить кинетическую энергию стержня в зависимости от угла φ, если длина стержня равна $2l$, а превышение угла D над горизонтальной направляющей равно H.

Ответ: $T=\frac{Pv^2}{2g}\left(1-2\frac{l}{H}\sin^3\varphi+\frac{4}{3}\frac{l^2}{H^2}\sin^4\varphi\right)$.

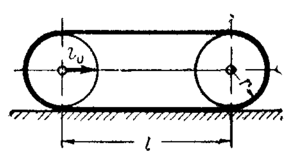
38.3 (1043). Вычислить кинетическую энергию кулисного механизма, если момент инерции кривошипа OA относительно оси вращения, перпендикулярной к плоскости чертежа, равен J_0; длина кривошипа равна a, масса кулисы равна m, массой камня A пренебречь. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. При каких положениях механизма кинетическая энергия достигает наибольшего и наименьшего значений?

Ответ: $T=\frac{1}{2}(J_0+ma^2\sin^2\varphi)\,\omega^2$.

Наименьшая кинетическая энергия — при крайних положениях кулисы, наибольшая — при прохождении кулисой среднего положения.



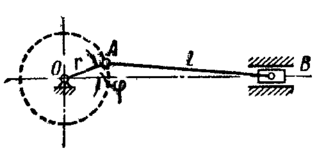
К задаче 38.3.



К задаче 38.4.

38.4 (1042). Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, вес одного погонного метра гусеничной цепи равен γ.

Ответ: $T=2\frac{\gamma}{g}(l+\pi r)\,v_0^2$.



К задаче 38.5.

38.5 (1044). Вычислить кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма, если масса кривошипа m_1, длина кривошипа r, масса ползуна m_2, длина шатуна l. Массой шатуна пренебречь. Кривошип считать однородным стержнем. Угловая скорость вращения кривошипа ω.

Ответ: $T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1+m_2\left[\sin\varphi+\frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\}r^2\omega^2$.

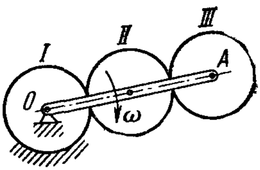
38.6 (1045). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание в положении, когда кривошип OA перпендикулярен к направляющей ползуна, массу шатуна m_3.

Ответ: $T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_1+m_2+m_3\right)r^2\omega^2$.

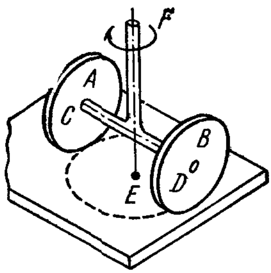
38.7 (1046). Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом OA, соединяющим оси трех одинаковых колес I, II и III. Колесо I неподвижно;

кривошип вращается с угловой скоростью ω. Вес каждого из колес равен P, радиус каждого из колес равен r, вес кривошипа равен Q. Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к колесу III?

Ответ: $T = \frac{r^2\omega^2}{3g}(33P + 8Q)$; работа равна нулю.



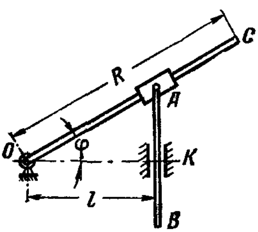
К задаче 38.7.



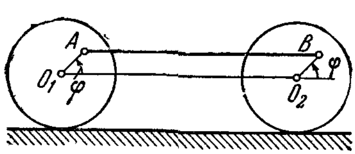
К задаче 38.8.

38.8 (1047). Мельничные бегуны A и B насажены на горизонтальную ось CD, которая вращается вокруг вертикальной оси EF; вес каждого бегуна 200 *кГ*; диаметры бегунов одинаковые, каждый равен 1 *м*; расстояние между ними CD равно 1 *м*. Найти кинетическую энергию бегунов, когда ось CD совершает 20 *об/мин*, допуская, что при вычислении моментов инерции бегуны можно рассматривать как однородные тонкие диски.

Ответ: 39 *кГм*.



К задаче 38.9.



К задаче 38.10.

38.9 (1048). В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Рычаг OC длиной R считать однородным стержнем с массою m_1, масса ползуна равна m_2, масса стержня AB равна m_3, $OK = l$. Выразить кинетическую энергию механизма в функции от угловой скорости и угла поворота рычага OC. Ползун считать точечной массой.

Ответ: $T = \frac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}\left[m_1R^2\cos^4\varphi + 3l^2(m_2 + m_3)\right]$.

38.10. Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником AB и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Вес каждого колеса равен P_1. Спарник AB и соединительный стержень O_1O_2 весят P_2 каждый. Масса более равномерно распределена по их ободам; $O_1A = O_2B = r/2$, где r — радиус колеса. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.

Ответ: $T = \frac{v_0^2}{8g}[16P_1 + P_2(9 + 4\sin\varphi)]$.

38.11. Автомобиль весом P движется прямолинейно по горизонтальной дороге со скоростью v. Коэффициент трения качения между колесами автомобиля и дорогой равен f_k, радиус колес r, сила аэродинамического сопротивления R_c воздуха пропорциональна квадрату скорости: $R_c = \mu P v^2$, где μ — коэффициент, зависящий от формы автомобиля. Определить мощность N двигателя, передаваемую на оси ведущих колес, в установившемся режиме.

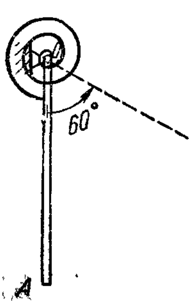
Ответ: $N = P\left(\frac{f_k}{r} + \mu v^2\right)v$.

38.12 (1052). На вал диаметром 60 *мм* насажен маховик диаметром 50 *см*, делающий 180 *об/мин*. Определить коэффициент трения скольжения f между валом и подшипниками, если после выключения привода маховик сделал 90 оборотов до остановки. Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу. Массой вала пренебречь.

Ответ: $f = 0{,}07$.

38.13 (1053). Цилиндрический вал диаметром 10 *см* и весом 0,5 *т*, на который насажено маховое колесо диаметром 2 *м* и весом 3 *т*, вращается в данный момент с угловой скоростью 60 *об/мин*, а затем он предоставлен самому себе. Сколько оборотов еще сделает вал до остановки, если коэффициент трения в подшипниках равен 0,05? Массу маховика считать равномерно распределенной по его ободу.

Ответ: 109,8 оборота.



К задаче 38.14.

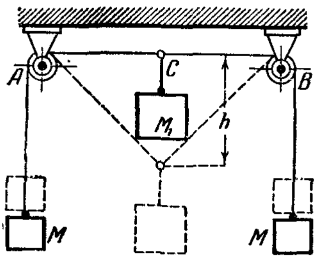
38.14. Однородный стержень OA длиной l и весом P может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O, проходящей через его конец перпендикулярно к плоскости чертежа. Спиральная пружина, коэффициент упругости которой равен c, одним концом скреплена с неподвижной осью O, а другим — со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована. Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол, равный 60°?

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g(9Pl + 2\pi^2 c)}{6P}}$.

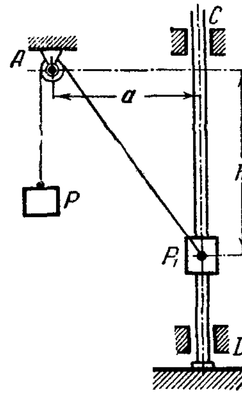
38.15 (1055). Через два блока A и B, находящихся на одной горизонтали на расстоянии $AB = 2l$ друг от друга, перекинута нить, к концам которой привешены два равных груза M весом по p граммов. К нити в середине C между блоками привешивают груз M_1

весом p_1 граммов и предоставляют ему падать без начальной скорости. Определить наибольшее расстояние h, на которое опустится груз M_1, предполагая, что длина нити достаточно велика и $p_1 < 2p$. Размерами блоков пренебречь.

Ответ: $h = \frac{4pp_1l}{4p^2 - p_1^2}$.



К задаче 38.15.

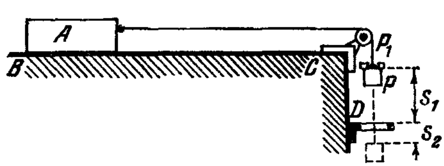


К задаче 38.16.

38.16 (1056). К концам гибкой нерастяжимой нити, переброшенной через ничтожно малый блок A, подвешены грузы P и P_1. Груз P_1 может скользить вдоль гладкого вертикального стержня CD, отстоящего от оси блока на расстоянии a; центр тяжести груза P_1 в начальный момент находился на одном уровне с осью блока; под действием силы тяжести груз P_1 начинает опускаться без начальной скорости. Найти зависимость между скоростью груза P_1 и высотой его опускания h.

Ответ: $v^2 = 2g(a^2 + h^2)\frac{P_1h - P(\sqrt{a^2+h^2} - a)}{P_1(a^2+h^2)+Ph^2}$.

38.17 (1057). Груз P с наложенной на него нагрузкой P_1 посредством шнура, перекинутого через блок, приводит в движение из состояния покоя тело A весом Q, находящееся на негладкой горизонтальной плоскости BC. Опустившись на расстояние s_1, груз P проходит через кольцо D, которое снимает нагрузку P_1, после чего груз P, опустившись на расстояние s_2, приходит в состояние покоя. Определить коэффициент трения f между телом A и плоскостью, пренебрегая массой шнура и блока и трением в блоке; дано $Q = 0{,}8$ *кГ*, $P = P_1 = 0{,}1$ *кГ*, $s_1 = 50$ *см*, $s_2 = 30$ *см*.



К задаче 38.20.

Ответ: $f = \frac{s_1(P_1+P)(P+Q)+s_2P(P+P_1+Q)}{Q[s_1(P+Q)+s_2(P+P_1+Q)]} = 0{,}2$.

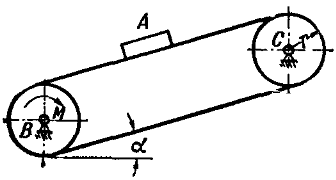
38.18 (1058). Однородная нить длиной L, часть которой лежит на гладком горизонтальном столе, движется под влиянием веса другой части, которая свешивается со стола. Определить промежуток времени T, по истечении которого нить покинет стол, если известно, что в начальный момент длина свешивающейся части равна l, а начальная скорость равна нулю.

Ответ: $T=\sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}\right)$.

38.19 (1059). Однородная весомая нить длиной $2a$, висевшая на гладком штифте и находившаяся в покое, начинает двигаться с начальной скоростью v_0.

Определить скорость нити в тот момент, когда она сойдет со штифта.

Ответ: $v=\sqrt{ag+v_0^2}$.



К задаче 38.20.

38.20 (1064). Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M.

Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s, если вес поднимаемого груза A равен P, а шкивы B и C радиуса r и весом Q каждый представляет собой однородные круглые цилиндры.

Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.

Ответ: $v=\sqrt{\frac{2g\,(M-Pr\sin\alpha)}{r\,(P+Q)}s}$.

38.21. Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB (см. чертеж к задаче 37.56). Внутри трубки на расстоянии $MC=x_0$ от оси лежит тело M. В некоторый момент времени трубке сообщена начальная угловая скорость ω_0.

Определить скорость v тела M относительно трубки в момент, когда тело вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J, L — длина трубки; трением пренебречь. Тело считать материальной точкой массы m.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 37.56.

Ответ: $v=\omega_0\sqrt{\frac{J+mx_0^2}{J+mL^2}(L^2-x_0^2)}$.

38.22. По горизонтальной платформе A, движущейся при отсутствии трения, перемещается тело B с постоянной относительной скоростью u_0 (см. чертеж к задаче 36.11). При затормаживании тела B между ним и платформой A возникают силы трения. Определить работу внутренних сил трения между телом B и платформой A от момента начала торможения до полной остановки тела B относительно платформы A, если их массы соответственно равны m и M.

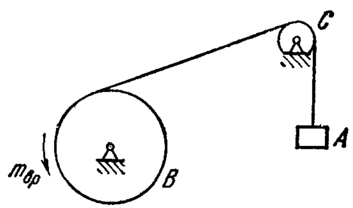
Указание. Воспользоваться ответом задачи 36.11.

Ответ: $A=-\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}u_0^2$.

38.23. При пуске в ход с помощью электромотора лебедки к валу барабана A радиуса r и весом P_1 приложен вращающий момент $m_{\text{вр}}$, пропорциональный углу поворота φ барабана, причем коэффициент пропорциональности равен a (см. чертеж к задаче 37.42). Определить скорость поднимаемого груза B весом P_2 в зависимости от высоты его подъема h. Барабан A считать сплошным цилиндром. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

Ответ: $v=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2gh\,(ah-2P_2r^2)}{P_1+2P_2}}$.

38.24. На чертеже изображен подъемный механизм лебедки. Груз A весом P_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r и весом P_2. К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\text{вр}}=a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимется на высоту h. Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C — сплошной диск весом P_3. Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



К задаче 38.24.

Ответ: $v=\frac{2}{r}\sqrt{\frac{gh\,(ah^2-3P_1r^3)}{3r\,(2P_1+2P_2+P_3)}}$.

38.25 (1062). Какую начальную скорость, параллельную линии наибольшего ската наклонной плоскости, надо сообщить оси колеса радиуса r для того, чтобы оно, катясь без скольжения, поднялось на высоту h по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом? Коэффициент трения качения равен f_k. Колесо считать однородным диском.

Ответ: $v=\frac{2}{3}\sqrt{3gh\left(1+\frac{f_k}{r}\operatorname{ctg}\alpha\right)}$.

38.26. Два цилиндра одинакового веса и радиуса скатываются без скольжения по наклонной плоскости. Первый цилиндр сплошной, массу второго цилиндра можно считать равномерно распределенной по его ободу. Найти зависимость между скоростями центров тяжести цилиндров при опускании их на одну и ту же высоту. В начальный момент цилиндры находились в покое.

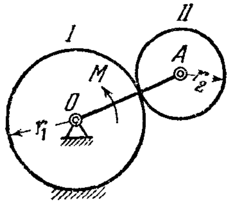
Ответ: $v_2/v_1=\sqrt{3}/2$.

38.27 (1066). Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента M, приложенного к кривошипу OA. Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо I имеет радиус r_1, подвижное колесо II — радиус r_2 и вес P, а кривошип OA —

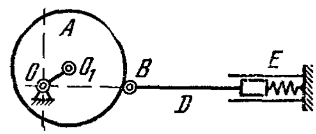
вес Q. Колесо II считать однородным диском, а кривошип — однородным стержнем.

Ответ: $\omega=\frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3gM}{9P+2Q}\varphi}$.

38.28 (1067). В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик A приводит в возвратно-поступательное движение ролик B со штангой D. Пружина E, соединенная со штангой, обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком.



К задаче 38.27.



К задаче 38.28.

Вес эксцентрика равен p, эксцентриситет e равен половине его радиуса; коэффициент упругости пружины равен c. При крайнем левом положении штанги пружина не напряжена. Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику для того, чтобы он переместил штангу D из крайнего левого в крайнее правое положение? Массой ролика, штанги и пружины пренебречь. Эксцентрик считать однородным круглым диском.

Ответ: $\omega=2\sqrt{\frac{cg}{3p}}$.

38.29 (1068). Какой путь проедет велосипедист не вращая педалями до остановки, если в начальный момент он двигался со скоростью 9 *км/час*? Общий вес велосипеда и велосипедиста равен 80 *кГ*, вес каждого из колес равен 5 *кГ*, массу каждого из колес считать равномерно распределенной по окружности радиуса 50 *см*. Коэффициент трения качения колес о землю равен 0,5 *см*.

Ответ: 35,6 *м*.

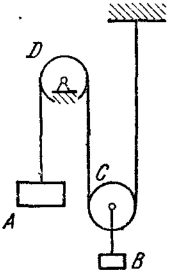
38.30 (1069). При посадке на аэродром самолет имел скорость 20 *м/сек*. Определить путь, пройденный самолетом до остановки, если сила сопротивления воздуха приближенно равна 60 *кГ*, вес каждого из двух передних колес равен 100 *кГ*, радиус колес равен 0,5 *м*, вес самолета без колес равен 1100 *кГ*, коэффициент трения качения колес о землю 1 *см*. Колеса считать однородными круглыми дисками. Массой заднего колеса и наличием тормозов пренебречь.

Ответ: 332,1 *м*.

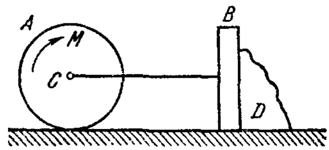
38.31. Груз A весом P_1, опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D, поднимает вверх груз B весом P_2, прикрепленный к оси подвижного блока C. Блоки C и D считать однородными сплошными дисками весом P_3 каждый. Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h. Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

Ответ: $v=2\sqrt{2gh\frac{2P_1-P_2-P_3}{8P_1+2P_2+7P_3}}$.

38.32. К ведущему колесу — барабану A — снегоочистителя приложен постоянный вращающий момент M. Массу барабана A можно считать равномерно распределенной по его ободу. Суммарный вес снега D, щита B и всех прочих поступательно движущихся частей постоянен и равен P_2. Коэффициент трения скольжения снега и щита о землю равен f, коэффициент трения качения барабана о землю равен f_k. Вес барабана равен P_1, его радиус r.



К задаче 38.31.



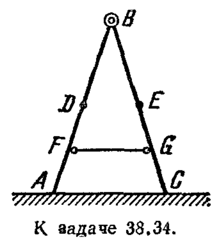
К задаче 38.32.

Определить зависимость между путем s, пройденным щитом B снегоочистителя, и модулем его скорости v, если в начальный момент система находилась в покое.

Ответ: $s=\frac{r}{2g}\frac{2P_1+P_2}{M-P_1f_k-fP_2r}v^2$.

38.33. Скорость автомашины, движущейся по прямой горизонтальной дороге, возросла от v_1 до v_2 за счет увеличения мощности мотора. При этом был пройден путь s. Вычислить работу, совершенную мотором на этом перемещении автомашины, если P_1 — вес каждого из четырех колес, P_2 — вес кузова, r — радиус колес, f_k — коэффициент трения качения колес о шоссе. Колеса, катящиеся без скольжения, считать однородными сплошными дисками. Кинетической энергией всех деталей, кроме колес и кузова, пренебречь.

Ответ: $A=\frac{6P_1+P_2}{2g}(v_2^2-v_1^2)+\frac{f_k}{r}(4P_1+P_2)s$.

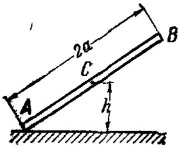


К задаче 38.34.

38.34 (1071). Стремянка ABC с шарниром B стоит на гладком горизонтальном полу, длина $AB=BC=2l$, центры тяжести находятся в серединах D и E стержней, радиус инерции каждой лестницы относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен ρ, расстояние шарнира B от пола равно h. В некоторый момент времени стремянка начинает падать вследствие разрыва стяжки FG. Пренебрегая трением в шарнире, определить: 1) скорость точки B в момент удара ее о пол; 2) скорость точки B в тот момент, когда расстояние ее от пола будет равно $\frac{1}{2}h$.

Ответ: 1) $v = 2l\sqrt{\dfrac{gh}{l^2+\rho^2}}$; 2) $v = \dfrac{1}{2}\sqrt{gh\dfrac{16l^2-h^2}{2(l^2+\rho^2)}}$.

38.35 (1072). Стержень AB длиной $2a$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра тяжести стержня в зависимости от его высоты h над полом.

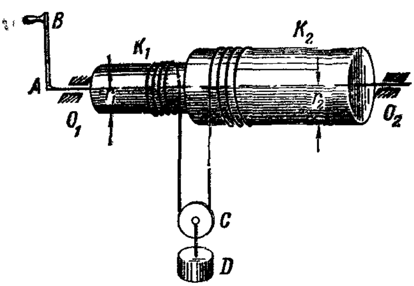


К задаче 38.35.

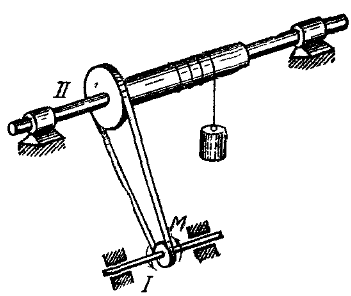
Ответ: $v = (a-h)\sqrt{\dfrac{6g\,(a+h)}{4a^2-3h^2}}$.

38.36 (1073). В дифференциальном вороте два жестко соединенных вала K_1 и K_2 с радиусами r_1 и r_2 и моментами инерции относительно оси O_1O_2 соответственно J_1 и J_2 приводятся во вращение рукояткой AB. Подвижный блок C подвешен на невесомой нерастяжимой нити, левая ветвь которой навита на вал K_1, а правая ветвь — на вал K_2. При вращении рукоятки AB левая ветвь нити сматывается с вала K_1, а правая ветвь наматывается на вал K_2. К рукоятке AB приложен постоянный вращающий момент M. К блоку C подвешен груз D весом P. Найти угловую скорость вращения рукоятки в момент, соответствующий концу подъема груза D на высоту s. В начальный момент система находилась в покое. Массами рукоятки и блока пренебречь.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{2gs\dfrac{2M-P(r_2-r_1)}{(r_2-r_1)[P(r_2-r_1)^2+4g(J_1+J_2)]}}$.



К задаче 38.36.



К задаче 38.37.

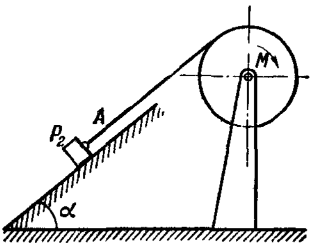
38.37 (1074). Ворот приводится в движение посредством ременной передачи, соединяющей шкив II, сидящий на валу ворота, со шкивом I, сидящим на валу мотора. К шкиву I весом P_1 и радиуса r приложен постоянный вращающий момент M. Вес шкива II равен P_2, радиус его R. Вес барабана ворота P_3, радиус его r, вес поднимаемого груза P_4. Ворот приводится в движение из состояния покоя. Найти скорость груза P_4 в момент, когда он поднимается на высоту h. Массами ремня, каната и трением в подшипниках пренебречь. Шкивы и барабан считать однородными круглыми цилиндрами.

Ответ: $v=2\sqrt{\dfrac{gh\left(M\dfrac{R}{r^2}-P_4\right)}{P_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2+P_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2+P_3+2P_4}}$.

38.38 (1075). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание массу каната, к которому привязан груз P_4. Длина каната l, вес единицы длины каната p. В начальный момент с вала барабана ворота свисала часть каната длиной $2h$.

Ответ: $v=2\sqrt{\dfrac{gh\left(M\dfrac{R}{r^2}-P_4-\dfrac{3}{2}ph\right)}{P_1\left(\dfrac{R}{r}\right)^2+P_2\left(\dfrac{R}{r}\right)^2+P_3+2P_4+2pl}}$.

38.39 (1076). Постоянный вращающий момент M приложен к барабану ворота с радиусом r и весом P_1. К концу A намотанного на барабан троса привязан груз P_2, который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан ворота, повернувшись на угол φ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f. Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.



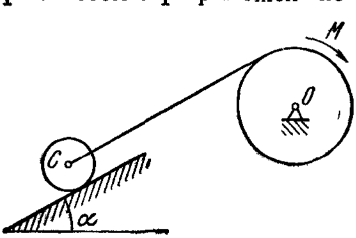
К задаче 38.39.

Ответ:
$\omega=\dfrac{2}{r}\sqrt{g\dfrac{M-P_2r(\sin\alpha+f\cos\alpha)}{P_1+2P_2}\varphi}$.

38.40 (1077). Решить предыдущую задачу с учетом массы троса, к которому привязан груз P_2. Длина троса равна l, вес единицы длины троса равен p. В начальный момент с барабана ворота свисала часть троса длиной a. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

Ответ: $\omega=\dfrac{1}{r}\sqrt{2g\dfrac{2M-2P_2r(\sin\alpha+f\cos\alpha)-pr(2a-r\varphi)\sin\alpha}{P_1+2P_2+2pl}\varphi}$.

38.41. К барабану ворота радиуса r_1 и весом P_1 приложен постоянный вращающий момент M. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса весом P_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.



К задаче 38.41.

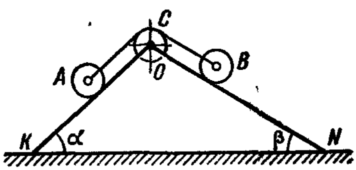
Ответ: $\omega=\frac{2}{r_1}\sqrt{2\pi ng\frac{M-P_2r_1\sin\alpha}{P_1+3P_2}}$.

38.42. Решить предыдущую задачу с учетом массы троса и трения качения колеса о наклонную плоскость, если l — длина троса, p — вес его единицы длины, a — длина части троса, не намотанной на барабан в начальный момент, f_k — коэффициент трения качения, r_2 — радиус колеса. Изменением потенциальной энергии троса, намотанного на барабан, пренебречь.

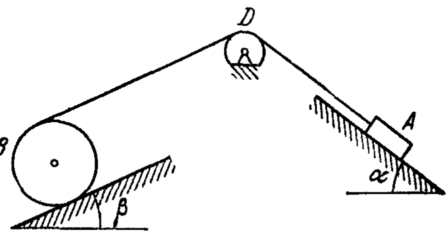
Ответ:

$$\omega=\frac{2}{r}\sqrt{2\pi ng\frac{M-r_1\left[P_2\left(\sin\alpha+\frac{f_k}{r_2}\cos\alpha\right)+p\,(a-\pi nr_1)\sin\alpha\right]}{P_1+3P_2+2pl}}.$$

38.43 (1078). Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK, поднимая посредством нерастяжимого троса колеса B, которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON. Трос



К задаче 38.43.



К задаче 38.45.

переброшен через блок C, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти скорость оси колеса A при ее перемещении параллельно линии OK наибольшего ската наклонной плоскости на расстояние s. В начальный момент система была в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинакового веса и радиуса. Весом троса пренебречь.

Ответ: $v=2\sqrt{\frac{1}{7}gs\,(\sin\alpha-\sin\beta)}$.

38.44 (1079). Решить предыдущую задачу, принимая во внимание трения качения колес о наклонные плоскости. Коэффициент трения качения равен f_k, радиусы колес равны r.

Ответ: $v=2\sqrt{\frac{1}{7}gs\left[\sin\alpha-\sin\beta-\frac{f_k}{r}(\cos\alpha+\cos\beta)\right]}$.

38.45. К грузу A весом P_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D весом P_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B весом P_3. При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.

Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути s, если в начальный момент система находилась в покое. Блок

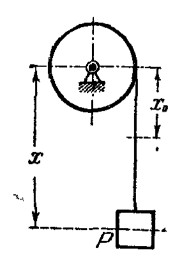
D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Силами трения и весом нити пренебречь.

Ответ: $v=2\sqrt{2gs\dfrac{2P_1\sin\alpha-P_3\sin\beta}{8P_1+4P_2+3P_3}}$.

38.46. Решить предыдущую задачу в предположении, что коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны f и f_k. Радиус катка B равен r.

Ответ: $v=2\sqrt{2gs\dfrac{2P_1(\sin\alpha-f\cos\alpha)-P_3\left(\sin\beta+\dfrac{f_k}{r}\cos\beta\right)}{8P_1+4P_2+3P_3}}$.

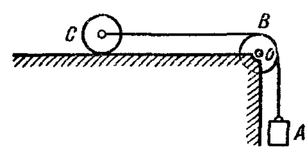
38.47 (1080). Груз весом P подвешен на нерастяжимом однородном тросе длиной l, навитом на цилиндрический барабан с горизонтальной осью вращения. Момент инерции барабана относительно оси вращения J, радиус барабана R, вес единицы длины каната p. Определить скорость груза в момент, когда длина свисающей части каната равна x, если в начальный момент скорость груза $v_0=0$, а длина свисающей части каната была равна x_0; трением на оси барабана, толщиной троса и изменением потенциальной энергии троса, навитого на барабан, пренебречь.



К задаче 38.47.

Ответ: $v=R\sqrt{\dfrac{g\,[2P+p\,(x+x_0)]\,(x-x_0)}{Jg+(P+pl)\,R^2}}$.

38.48 (1081). Груз A весом P_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длиной L и весом Q. Канат переброшен через блок B, вращающийся вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Второй конец каната прикреплен к оси катка C, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. Блок B и каток C — однородные круглые диски с радиусом r и весом P_2 каждый. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен f_k. В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока B свисала часть каната длиною l. Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h.



К задаче 38.48.

Ответ:

$$v=\sqrt{\frac{2gh\left\{P_1+\dfrac{Q}{2L}\,(2l+2r+h)-\dfrac{f_k}{r}\left[P_2+Q\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{l}{2L}-\dfrac{\pi r}{4L}-\dfrac{h}{4L}\right)\right]\right\}}{P_1+2P_2+Q}}.$$

38.49. Механизм эллипсографа, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством постоянного вращающего момента m_0, приложенного к кривошипу OC. В начальный момент при $\varphi=0$ механизм находился в покое. Найти угловую скорость кривошипа OC в момент, когда он сделал четверть оборота. Дано: M — масса стержня AB, $m_A=m_B=m$ — массы ползунов A

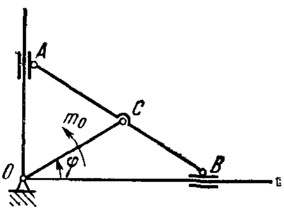
и B, $OC=AC=BC=l$; массой кривошипа OC и силами сопротивления пренебречь.

Ответ: $\omega=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi m_0}{M+3m}}$.

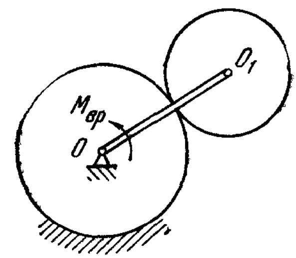
38.50. Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента сопротивления m_C в шарнире C.

Ответ: $\omega=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{3\pi(m_0-2m_C)}{M+3m}}$.

38.51. К кривошипу OO_1 эпициклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, приложен вращающий момент $M_{вр}=M_0-\alpha\omega$, где M_0 и α — положительные постоянные, а ω — угловая скорость кривошипа. Масса кривошипа равна m, M — масса



К задаче 38.49.



К задаче 38.51.

сателлита (подвижного колеса). Считая кривошип тонким однородным стержнем, а сателлит — однородным круглым диском радиуса r, определить угловую скорость ω кривошипа как функцию времени. В начальный момент система находилась в покое. Радиус неподвижной шестерни равен R; силами сопротивления пренебречь.

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Ответ: $\omega=\frac{M_0}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{J_{пр}}t}\right)$, где $J_{пр}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3}{2}M\right)(R+r)^2$.

38.52. Решить предыдущую задачу с учетом постоянного момента трения $M_{тр}$ на оси O_1 сателлита.

Ответ: $\omega=\frac{M_0-\frac{R}{r}M_{тр}}{\alpha}\left(1-e^{-\frac{\alpha}{J_{пр}}t}\right)$, где

$$J_{пр}=\left(\frac{m}{3}+\frac{3}{2}M\right)(R+r)^2.$$

38.53. Кривошип OO_1 гипоциклического механизма, расположенного в горизонтальной плоскости, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. В некоторый момент времени двигатель был отключен и под действием постоянного момента $M_{тр}$ сил трения на оси сателлита (подвижного колеса) механизм остановился.

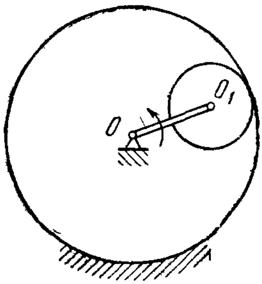
Определить время τ торможения и угол φ поворота кривошипа за это время, если его вес равен P, G — вес сателлита, R и r — соответствующие радиусы. Кривошип принять за однородный тонкий стержень, а сателлит — за однородный диск.

Указание. Применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

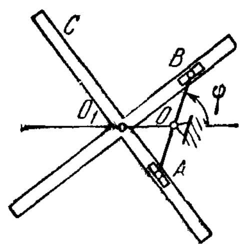
Ответ: $\tau = \frac{rJ_{\text{пр}}}{RM_{\text{тр}}}\omega_0$; $\varphi = \frac{1}{2}\frac{rJ_{\text{пр}}}{RM_{\text{тр}}}\omega_0^2$, где

$$J_{\text{пр}} = \frac{1}{g}\left(\frac{P}{3} + \frac{3}{2}G\right)(R-r)^2.$$

38.54. Крестовина C приводится во вращение вокруг неподвижной оси O_1 посредством однородного стержня AB, вращающегося вокруг



К задаче 38.53.



К задаче 38.54.

неподвижной оси O (оси O и O_1 перпендикулярны к плоскости чертежа). При этом ползуны A и B, соединенные при помощи шарниров со стержнем AB, скользят вдоль взаимно перпендикулярных прорезей крестовины C. Вращение стержня происходит под действием постоянного вращающегося момента $m_{\text{вр}}$. Определить угловую скорость стержня AB в момент, когда он сделает четверть оборота, если в начальный момент при $\varphi = 0$ он имел угловую скорость ω_0. Величина момента сопротивления, возникающего в каждом из шарниров ползунов A и B, в два раза меньше $m_{\text{вр}}$. Прочими силами сопротивления пренебречь. Масса стержня равна m; момент инерции крестовины C относительно оси O_1 равен J; $OO_1 = OA = OB = l$.

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{6\pi m_{\text{вр}}}{4ml^2 + 3J} + \omega_0^2}$.

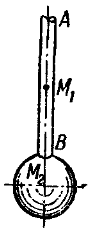
§ 39. Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

39.1 (1082). Тяжелое тело состоит из стержня AB длиной 80 *см* и весом 1 *н* и прикрепленного к нему диска с радиусом 20 *см* и весом 2 *н*. В начальный момент при вертикальном положении стержня телу сообщено такое движение, что скорость центра тяжести M_1 стержня равна нулю, а скорость центра тяжести M_2 диска равна 360 *см/сек* и направлена по горизонтали вправо.

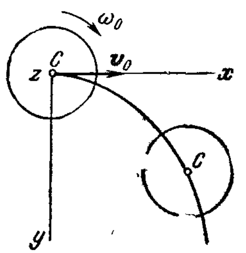
Найти последующее движение тела, принимая во внимание только действие силы тяжести.

Ответ: Тело равномерно вращается с угловой скоростью 6 *сек*$^{-1}$ вокруг своего центра тяжести, который описывает параболу $y^2=117{,}5\,x$ (начало координат — в точке B, ось y направлена по горизонтали вправо, ось x — вниз).

39.2. Диск падает в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. В начальный момент диску была сообщена угловая скорость ω_0, а его центр тяжести C, находившийся в начале координат, имел горизонтально направленную скорость v_0.



К задаче 39.1.



К задаче 39.2.

Найти уравнения движения диска. Оси x, y изображены на рисунке. Силами сопротивления пренебречь.

Ответ: $x_C=v_0t$, $y_C=\frac{gt^2}{2}$, $\varphi=\omega_0t$, где φ — угол поворота диска, образованный осью x и диаметром, занимавшим в начальный момент горизонтальное положение.

39.3. Решить предыдущую задачу, считая, что момент m_C сопротивления движению относительно подвижной горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести C диска перпендикулярно к плоскости движения его, пропорционален первой степени угловой скорости диска $\dot{\varphi}$, причем коэффициент пропорциональности равен β. Момент инерции диска относительно этой оси равен J_C.

Ответ: $x_C=v_0t$, $y_C=\frac{gt^2}{2}$, $\varphi=\frac{J_C\omega_0}{\beta}\left(1-e^{-\frac{\beta}{J_C}t}\right)$, где φ — угол поворота диска, образованный осью x и диаметром, занимавшим в начальный момент горизонтальное положение.

39.4 (1084). Ведущее колесо автомашины радиуса r и весом P движется горизонтально и прямолинейно. К колесу приложен вращающий момент M. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

Ответ: $M\leqslant fP\frac{r^2+\rho^2}{r}$.

39.5. Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен f_k.

Ответ: $M\leqslant fP\frac{r^2+\rho^2}{r}+Pf_k$.

39.6 (1085). Ось ведомого колеса автомашины движется горизонтально и прямолинейно. К оси колеса приложена горизонтально направленная движущая сила $\boldsymbol{F}$. Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения колеса о землю равен f. Радиус колеса равен r, вес колеса равен P. Какому условию должна удовлетворять величина силы $\boldsymbol{F}$ для того, чтобы колесо катилось без скольжения? Сопротивлением качения пренебречь.

Ответ: $F \leqslant fP \dfrac{r^2+\rho^2}{\rho^2}$.

39.7. Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения равен f_k.

Ответ: $F \leqslant \dfrac{fP(r^2+\rho^2) - Pf_k \cdot r}{\rho^2}$.

39.8. К оси колеса весом P и радиуса r приложена постоянная по модулю горизонтальная сила $\boldsymbol{F}$. Найти зависимость между этой силой и силой трения при условии, что центр тяжести C колеса неподвижен или движется равномерно и прямолинейно. Определить также угловую скорость колеса, если в начальный момент оно находилось в покое. Массу колеса считать распределенной равномерно по его ободу. Трением качения пренебречь.

Ответ: $F_{\text{тр}} = F$; $\quad \dot{\varphi} = \dfrac{Fg}{Pr} t$.

39.9. Колесо радиуса r катится по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием приложенного вращающего момента $m_{\text{вр}} = \dfrac{5}{2} fPr$, где f — коэффициент трения скольжения, P — вес колеса. Определить скорость точки колеса, соприкасающейся с рельсом (скорость проскальзывания). Масса колеса равномерно распределена по его ободу. Трением качения пренебречь. В начальный момент колесо находилось в покое.

Ответ: $\dfrac{fg}{2} t$.

39.10. Решить предыдущую задачу с учетом трения качения, если коэффициент трения качения $f_k = \dfrac{1}{4} fr$.

Ответ: $\dfrac{1}{4} fgt$.

39.11 (1087). Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием собственного веса по наклонной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра, предполагая, что при движении цилиндра скольжение отсутствует. Сопротивлением качения пренебречь.

Ответ: $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} 3f$; $\quad w = \dfrac{2}{3} g \sin\alpha$.

39.12. Два цилиндра одинакового веса скатываются без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Масса первого цилиндра равномерно распределена по его боковой поверхности, второй цилиндр — сплошной. Определить разность между ускорениями центров тяжести второго и первого цилиндров. Трением качения пренебречь.

Ответ: Ускорение центра тяжести сплошного цилиндра больше ускорения центра тяжести первого цилиндра на $^1/_6\, g \sin \alpha$.

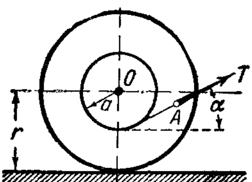
39.13. Однородный сплошной круглый диск катится без скольжения по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Ось диска образует угол β с линией наибольшего ската. Определить ускорение центра тяжести диска, считая, что его качение происходит в одной вертикальной плоскости.

Ответ: $w_C = \frac{2}{3} g \sin\alpha \sin\beta$.

39.14 (1088). Однородный цилиндр с горизонтальной осью скатывается под действием собственного веса со скольжением по наклонной плоскости при коэффициенте трения скольжения f. Определить угол наклона плоскости к горизонту и ускорение оси цилиндра.

Ответ: $\alpha > \operatorname{arctg} 3f$; $w = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$.

39.15 (1089). Однородное колесо радиуса r скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. При каком значении коэффициента трения качения f_k центр тяжести колеса будет двигаться равномерно, а колесо при этом будет равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к его плоскости?



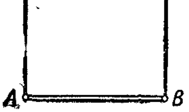
К задаче 39.16.

Ответ: $f_k = r \operatorname{tg} \alpha$.

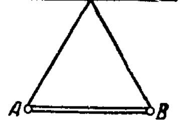
39.16 (1090). На барабан однородного катка весом P и радиуса r, лежащего на горизонтальном шероховатом полу, намотана нить, к которой приложена сила T под углом α к горизонту. Радиус барабана a, радиус инерции катка ρ. Определить закон движения оси катка O. В начальный момент каток находился в покое, затем катился без скольжения.

Ответ: $x = \frac{T}{P} \frac{rg\,(r\cos\alpha - a)}{2\,(\rho^2 + r^2)} t^2$, причем ось x направлена слева направо.

39.17 (1092). Однородный стержень AB весом P горизонтально подвешен к потолку посредством двух вертикальных нитей, прикрепленных к концам стержня. Найти натяжение одной из нитей в момент обрыва другой.



К задаче 39.17.



К задаче 39.18.

Указание. Составить дифференциальные уравнения движения стержня для весьма малого промежутка времени, следующего за моментом обрыва нити, пренебрегая изменением направления стержня и изменением расстояния центра тяжести стержня от другой нити.

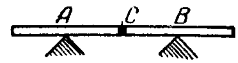
Ответ: $T = \frac{P}{4}$.

39.18 (1093). Однородный стержень AB весом P подвешен в точке O на двух нитях равной с ним длины.

Определить натяжение одной из нитей в момент обрыва другой. (См. указание к задаче 39.17.)

Ответ: $T = 0{,}266P$.

39.19 (1094). Однородный тонкий стержень длиной $2l$ и весом P лежит на двух опорах A и B; центр тяжести C стержня находится на одинаковых расстояниях от опор, причем $CA = CB = a$; давление на каждую опору равно $^1/_2 P$. Как изменится давление на опору A в тот момент, когда опора B будет мгновенно удалена? (См. указание к задаче 39.17.)



К задаче 39.19.

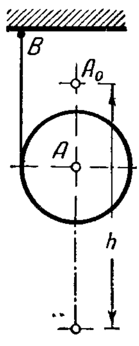
Ответ: Давление на опору A получит приращение, равное

$$\frac{l^2 - 3a^2}{2(l^2 + 3a^2)} P.$$

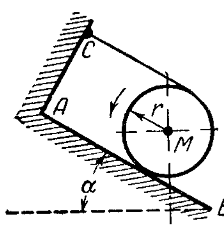
39.20 (1095). Тяжелый круглый цилиндр A с массой m обмотан посредине тонкой нитью, конец которой B закреплен неподвижно. Цилиндр падает без начальной скорости, разматывая нить.

Определить скорость оси цилиндра, после того как эта ось опустится на высоту h, и найти натяжение T нити.

Ответ: $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$; $T = \frac{1}{3} mg$.



К задаче 39.20.



К задаче 39.21.

39.21 (1096). Две гибкие нити обмотаны вокруг однородного круглого цилиндра M весом P и радиуса r так, что завитки их расположены симметрично относительно средней плоскости, параллельной основаниям. Цилиндр помещен на наклонной плоскости AB так, что его образующие перпендикулярны к линии наибольшего ската, а концы C нитей закреплены симметрично относительно вышеуказанной средней плоскости на расстоянии $2r$ от плоскости AB. Цилиндр начинает двигаться без начальной скорости под действием силы тяжести, преодолевая трение о наклонную плоскость, причем коэффициент трения равен f.

Определить путь s, пройденный центром тяжести цилиндра за время t, и натяжение T нитей, предполагая, что в течение рассматриваемого промежутка времени ни одна из нитей не сматывается до конца.

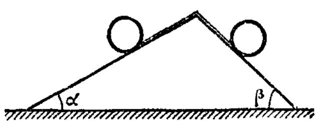
Ответ: $s = \frac{1}{3} g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2$; $T = \frac{1}{6} P(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Цилиндр остается в покое, если $\operatorname{tg}\alpha < 2f$.

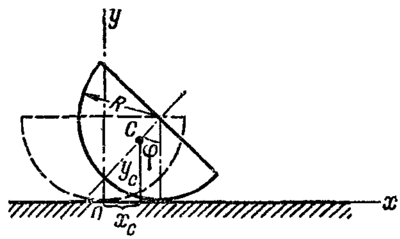
39.22 (1097). Два цилиндрических вала весом P_1 и P_2 скатываются по двум наклонным плоскостям, образующим соответственно углы α и β с горизонтом. Валы соединены нерастяжимой нитью, концы которой намотаны на валы и к ним прикреплены.

Определить натяжение нити и ее ускорение при движении по наклонным плоскостям. Валы считать однородными круглыми цилиндрами. Весом нити пренебречь.

Ответ: $T = \dfrac{P_1 P_2 (\sin\alpha + \sin\beta)}{3(P_1 + P_2)}$; $w = g\dfrac{P_1 \sin\alpha - P_2 \sin\beta}{P_1 + P_2}$.



К задаче 39.22.



К задаче 39.23

39.23 (1098). Определить период малых колебаний однородного полукруглого диска радиуса R, находящегося на негладкой горизонтальной плоскости, по которой он может катиться без скольжения.

Ответ: $T = \dfrac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi - 16)R}$.

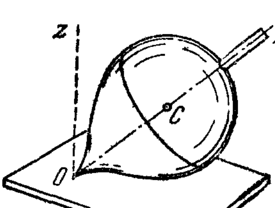
§ 40. Приближенная теория гироскопов

40.1 (1027). Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси OA с постоянной угловой скоростью $w = 600$ *сек*$^{-1}$; ось OA наклонена к вертикали; нижний конец оси O остается неподвижным; центр тяжести C волчка находится на оси OA на расстоянии $OC = 30$ *см* от точки O; радиус инерции волчка относительно оси равен 10 *см*.

Определить движение оси волчка OA, считая, что главный момент количеств движения волчка равен $J\omega$.

Ответ: Ось OA вращается вокруг вертикали Oz по часовой стрелке, описывая круговой конус, с постоянной угловой скоростью

$$\omega_1 = 0{,}49 \text{ сек}^{-1}.$$



К задаче 40.1.

40.2 (1028). Волчок, имея форму диска диаметром 30 *см*, вращается с угловой скоростью 80 *сек*$^{-1}$ вокруг своей оси симметрии. Диск насажен на ось длиной 20 *см*, расположенную вдоль оси симметрии волчка.

Определить угловую скорость регулярной прецессии волчка, полагая, что его главный момент количеств движения равен $J\omega$.

Ответ: 2,18 *сек*$^{-1}$.

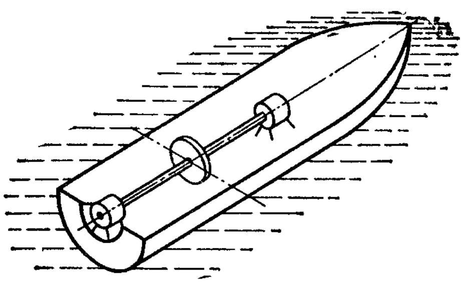
40.3 (1029). Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 1500 *об/мин.* Вес вращающихся частей 6 *т*, радиус инерции $\rho = 0{,}7$ *м*.

Определить гироскопические давления на подшипники, если судно описывает циркуляцию вокруг вертикальной оси, поворачиваясь на 10° в секунду. Расстояние между подшипниками $l = 2{,}7$ *м*.

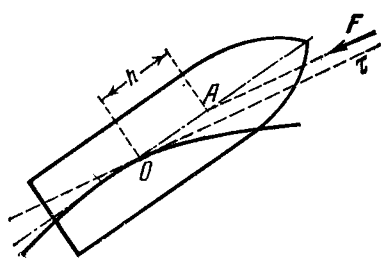
Ответ: 3090 *кГ*.

40.4 (1030). Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 *сек* вокруг оси, перпендикулярной к оси ротора. Ротор турбины весом 3500 *кГ* с радиусом инерции 0,6 *м* делает 3000 *об/мин.* Расстояние между подшипниками 2 *м*.

Ответ: 1320 *кГ*.



К задаче 40.4.



К задаче 40.5.

40.5 (1032). Определить время T полного оборота оси симметрии артиллерийского снаряда вокруг касательной к траектории центра тяжести снаряда. Это движение происходит в связи с действием силы сопротивления воздуха $F = 2140$ *кГ*, приближенно направленной параллельно касательной и приложенной к оси снаряда на расстоянии $h = 0{,}2$ *м* от центра тяжести снаряда. Момент количества движения снаряда относительно его оси симметрии равен 590 *кГмсек*.

Ответ: 8,66 *сек*.

40.6 (1033). Газотурбовоз приводится в движение турбиной, ось которой параллельна оси колес и вращается в ту же сторону, что и колеса, делая 1500 *об/мин.* Момент инерции вращающихся частей турбины относительно оси вращения $J = 20$ *кГмсек*^{2}.

Как велико добавочное давление на рельсы, если газотурбовоз идет по закруглению радиуса 250 *м* со скоростью 15 *м/сек*? Ширина колеи 1,5 *м*.

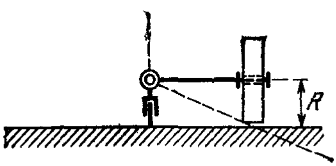
Ответ: На один рельс 126 *кГ* вниз, на другой рельс 126 *кГ* вверх.

40.7 (1034). В дробилке с бегунами каждый бегун имеет вес $P = 1200$ *кГ*, радиус инерции относительно его оси $\rho = 0{,}4$ *м*, радиус $R = 0{,}5$ *м*, мгновенная ось вращения бегуна проходит через середину линии касания бегуна с дном чаши.

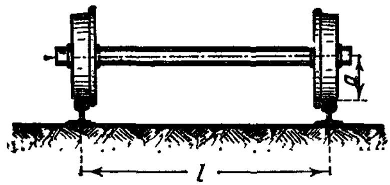
Определить давление бегуна на горизонтальное дно чаши, если переносная угловая скорость вращения бегуна вокруг вертикальной оси соответствует $n=60$ *об/мин.*

Ответ: $N=2740$ *кГ.*

40.8 (1035). Колесный скат весом $P=1400$ *кГ*, радиуса $a=75$ *см* и с радиусом инерции относительно своей оси $\rho=\sqrt{0{,}55}\,a$ движется равномерно со скоростью $v=20$ *м/сек* по закруглению радиуса $R=200$ *м*, лежащему в горизонтальной плоскости.



К задаче 40.7.

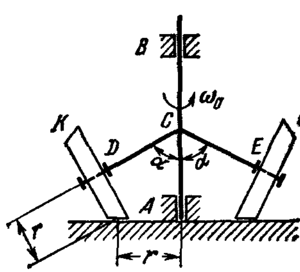


К задаче 40.8.

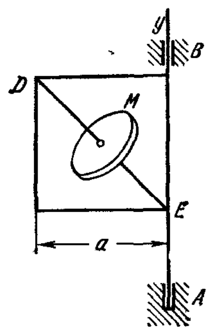
Определить давление ската на рельсы, если расстояние между рельсами $l=1{,}5$ *м*,

Ответ: $N=(700\pm79)$ *кГ.*

40.9. На чертеже изображен узел поворотной части разводного моста. Вал AB с жестко прикрепленными к нему под углом α стержнями CD и CE вращается с угловой скоростью ω_0. При этом конические шестерни K и L, свободно насаженные на стержни CD и CE, катятся без скольжения по неподвижной плоской горизонтальной шестерне.



К задаче 40.9.



К задаче 40 10.

Определить дополнительные динамические давления шестерен K и L весом P каждая на неподвижную горизонтальную шестерню, если радиусы всех шестерен равны r. Подвижные шестерни считать сплошными однородными дисками.

Ответ: $\dfrac{Pr\omega_0^2 \sin\alpha}{2g}$.

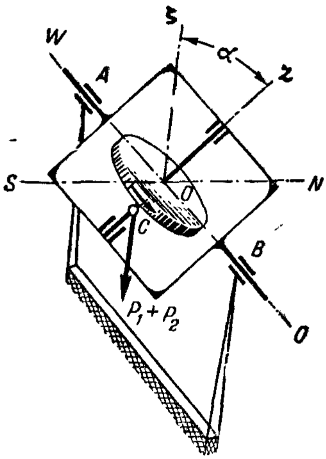
40.10. Квадратная рама со стороной $a=20$ *см* вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью $\omega_1=2$ *сек*$^{-1}$. Вокруг оси

ED, совмещенной с диагональю рамы, вращается диск M радиуса $r = 10$ *см* с угловой скоростью $\omega = 300$ *сек*$^{-1}$.

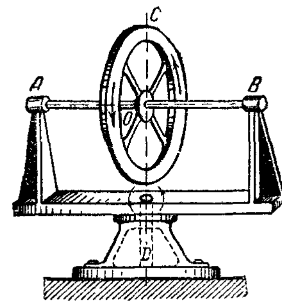
Определить отношение дополнительных боковых давлений на опоры A и B к соответствующим статическим давлениям. Массой рамы пренебречь. Массу диска считать равномерно распределенной по ободу.

Ответ: 4,32.

40.11 (1038). Ось AB рамки гироскопа установлена на широте $\varphi = 30^\circ$ горизонтально по линии $O - W$. Ротор гироскопа весом $p_1 = 2$ *кГ*, радиуса $r = 4$ *см* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 3000$ *сек*$^{-1}$. Общий центр тяжести C ротора и рамки располагается на оси Oz ротора на расстоянии $OC = h$ от оси AB. Статический момент гироскопа $H = (p_1 + p_2) h = 1{,}3$ *Гсм*.



К задаче 40.11.



К задаче 40.12.

Определить положение равновесия рамки, т. е. угол α отклонения оси ротора Oz в плоскости меридиана от вертикали $O\zeta$ места.

Ротор считать однородным диском.

Ответ: $\alpha = 45^\circ$.

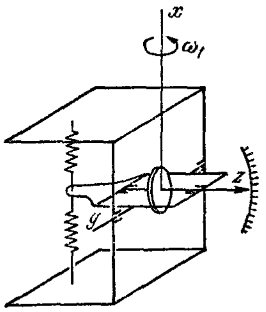
40.12 (1039). Колесо радиуса a и весом $2p$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью ω_1; ось AB вращается вокруг вертикальной оси CD, проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью ω_2; направления вращений показаны стрелками.

Найти давления N_A и N_B на подшипники A и B, если длина $AO = OB = h$; масса колеса равномерно распределена по его ободу.

Ответ: $N_A = p\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$; $N_B = p\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$.

40.13. Простейший гиротахометр состоит из гироскопа, рамка которого удерживается двумя пружинами, прикрепленными к корпусу прибора. Момент инерции гироскопа относительно оси собственного вращения равен J, угловая скорость гироскопа равна ω.

Определить угол α, на который повернется ось гироскопа вместе с его рамкой, если прибор установлен на платформе, вращающейся с угловой скоростью ω_1 вокруг оси x, перпендикулярной к оси y вращения рамки. Коэффициенты жесткости пружин равны c; угол α считать малым; расстояние от оси вращения рамки до пружин равно a.



К задаче 40.13.

Ответ: $\alpha = \frac{J\omega}{2ca}\omega_1$.

§ 41. Метод кинетостатики

41.1 (896). Определить вес круглого однородного диска радиуса 20 *см*, вращающегося вокруг оси по закону $\varphi = 3t^2$. Ось проходит через центр диска перпендикулярно к его плоскости; главный момент сил инерции диска относительно оси вращения равен 4 *нсм*.

Ответ: 3,27 *н*.

41.2 (897). Тонкий прямолинейный однородный стержень длиной l и весом P вращается вокруг оси, проходящей перпендикулярно к стержню через его конец, по закону $\varphi = at^2$.

Найти величины, направления и точки приложения равнодействующих J_n и J_τ центробежных и вращательных сил инерции частиц стержня.

Ответ: Равнодействующая вращательных сил инерции $J_\tau = \frac{Pal}{g}$ направлена перпендикулярно к стержню и приложена в точке, удаленной от оси вращения на расстояние $\frac{2}{3}l$; равнодействующая центробежных сил инерции $J_n = \frac{2Pa^2lt^2}{g}$ направлена вдоль стержня от оси вращения.

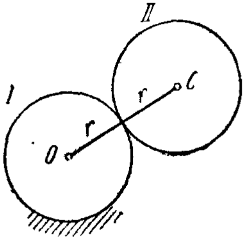
41.3. Колесо весом P и радиуса r катится без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу.

Определить главный вектор и главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести колеса перпендикулярно к плоскости движения. Колесо считать сплошным однородным диском. Центр тяжести C движется по закону $x_C = \frac{at^2}{2}$, где a — постоянная положительная величина. Ось x направлена вдоль рельса.

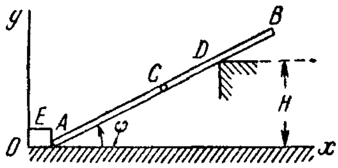
Ответ: Главный вектор сил инерции равен по модулю $\frac{P}{g}a$ и направлен параллельно оси x; главный момент сил инерции равен по абсолютной величине $\frac{Par}{2g}$.

41.4. Определить главный вектор и главный момент сил инерции подвижного колеса II планетарного механизма относительно оси, проходящей через его центр тяжести C перпендикулярно к плоскости движения. Кривошип OC вращается с постоянной угловой скоростью ω. Вес колеса II равен P. Радиусы колес равны r.

Ответ: Главный вектор сил инерции параллелен кривошипу OC и равен $\frac{2Pr\omega^2}{g}$; главный момент сил инерции равен нулю.



К задаче 41.4.



К задаче 41.5.

41.5. Конец A однородного тонкого стержня AB длиной $2l$ и весом G перемещается по горизонтальной направляющей с помощью упора E с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, причем стержень все время опирается на угол D.

Определить главный вектор и главный момент сил инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести C стержня перпендикулярно к плоскости движения, в зависимости от угла φ.

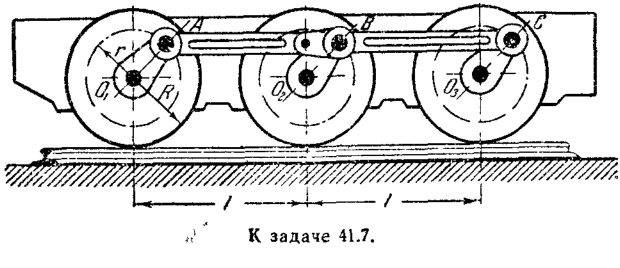
Ответ: $V_x^{(J)}=3\,\frac{G}{g}\,\frac{v^2}{H^2}\,l\sin^4\varphi\cos\varphi$; $V_y^{(J)}=\frac{G}{g}\,\frac{v^2}{H^2}\,l\,(1-3\cos^2\varphi)\sin^3\varphi$;

$$m_{Cz}^{(J)}=-\frac{2}{3}\,\frac{G}{g}\,l^2\,\frac{v^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi.$$

41.6. По данным условиям предыдущей задачи определить динамическое давление N_D стержня на угол D.

Ответ: $N_D=\frac{8}{3}\,\frac{v^2l^2}{H^3g}\,G\sin^4\varphi\cos\varphi$.

41.7 (878). Паровоз движется по прямолинейному участку пути со скоростью $v=72$ *км/час*.



К задаче 41.7.

Определить добавочное давление на рельс от силы инерции спарника ABC в наинизшем его положении, которое возникло бы в предположении отсутствия противовесов. Спарник весит 200 *кГ*, и массу его считать равномерно распределенной по длине. Длина кривошипа $r=0,3$ *м*, радиус колес $R=1$ *м*; колеса катятся без скольжения.

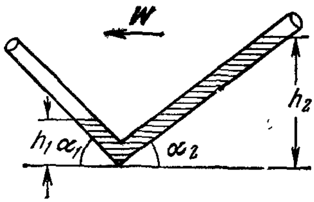
Ответ: 2,45 *т*.

41.8 (879). Паровоз движется равноускоренно по прямолинейному горизонтальному участку пути, достигая через 20 *сек* после начала движения скорости 72 *км/час*.

Определить положение свободной поверхности воды в тендере.

Ответ: Плоскость, наклоненная к горизонту под углом

$$\alpha=\operatorname{arctg} 0,102=5°50'.$$



К задаче 41.9.

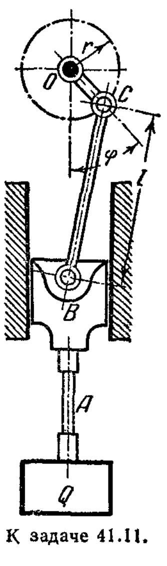
41.9. Для экспериментального определения замедления троллейбуса применяется жидкостный акселерометр, состоящий из изогнутой трубки, наполненной маслом и расположенной в вертикальной плоскости.

Определить величину замедления троллейбуса при торможении, если при этом уровень жидкости в конце трубки, расположенном в направлении движения, повышается до величины h_2, а в противоположном конце понижается до h_1. Положение акселерометра указано на чертеже: $\alpha_1=\alpha_2=45°$, $h_1=25$ *мм*, $h_2=75$ *мм*.

Ответ: $w=g\dfrac{(h_2-h_1)\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{h_1\operatorname{tg}\alpha_2+h_2\operatorname{tg}\alpha_1}=0,5\,g.$

41.10 (881). С каким ускорением должна двигаться по горизонтальной плоскости призма, боковая грань которой образует угол α с горизонтом, чтобы груз, лежащий на боковой грани, не перемещался относительно призмы?

Ответ: $w=g\operatorname{tg}\alpha$.



К задаче 41.11.

41.11 (883). Для исследования влияния быстро чередующихся растягивающих и сжимающих сил на металлический брусок (испытание на усталость) испытуемый брусок A прикрепляют за верхний конец к ползуну B кривошипного механизма BCO, а к нижнему концу подвешивают груз весом Q.

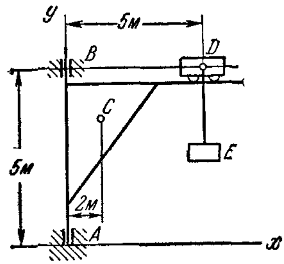
Найти силу, растягивающую брусок, в том случае, когда кривошип OC вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω.

Указание. Выражение $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}$ следует разложить в ряд и отбросить все члены ряда, содержащие отношение $\frac{r}{l}$ в степени выше второй.

Ответ: $Q+\dfrac{Q}{g}r\omega^2\left(\cos\omega t+\dfrac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

41.12. Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана при поднимании груза E весом 3 *т* с ускорением $\frac{1}{3}g$. Вес крана равен 2 *т* и приложен в его центре тяжести C. Вес тележки D равен 0,5 *т*. Кран и тележка неподвижны. Размеры указаны на чертеже.

Ответ: $X_A = -X_B = 5{,}3$ *т*; $Y_A = 6{,}5$ *т*.



К задаче 41.12.

41.13. Определить опорные реакции подпятника A и подшипника B поворотного крана, рассмотренного в предыдущей задаче, при перемещении влево с ускорением $0{,}5\,g$ тележки для случая отсутствия груза E. Центр тяжести тележки находится на уровне опоры B.

Ответ: $X_A = 1{,}3$ *т*; $X_B = -1{,}55$ *т*; $Y_A = 2{,}5$ *т*.

41.14 (885). На паром, привязанный к берегу двумя параллельными канатами, въезжает грузовик весом 7 *т* со скоростью 12 *км/час*; тормоза останавливают грузовик на протяжении 3 *м*.

Предполагая, что сила трения колес о настил парома постоянна, определить натяжение канатов. Массой и ускорением парома пренебречь.

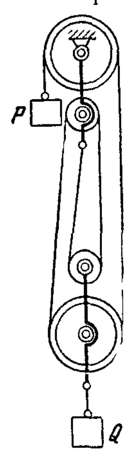
Ответ: $T = 0{,}66$ *т*.

41.15 (886). Автомобиль весом P движется прямолинейно с ускорением w.

Определить вертикальное давление передних и задних колес автомобиля, если его центр тяжести C находится на высоте h от поверхности грунта. Расстояния передней и задней осей автомобиля от вертикали, проходящей через центр тяжести, соответственно равны a и b. Массами колес пренебречь.

Как должен двигаться автомобиль, чтобы давления передних и задних колес оказались равными?

Ответ: $N_1 = \frac{P(gb - wh)}{g(a+b)}$; $N_2 = \frac{P(ga + wh)}{g(a+b)}$; при торможении автомобиля с замедлением $w = g\frac{a-b}{2h}$.



К задаче 41 16.

41.16 (887). С каким ускорением w опускается груз весом P, поднимая груз весом Q с помощью полиспаста, изображенного на чертеже? Каково условие равномерного движения груза P? Массами блоков и троса пренебречь.

Указание. Ускорение груза Q в четыре раза меньше ускорения груза P.

Ответ: $w = 4g\frac{4P - Q}{16P + Q}$; $\frac{P}{Q} = \frac{1}{4}$.

41.17 (888). Гладкий клин весом P и с углом 2α при вершине раздвигает две пластины веса P_1 каждая, лежавшие в покое на гладком горизонтальном столе.

Написать уравнения движения клина и пластин и определить давление клина на каждую из пластин.

Ответ: Уравнение движения клина:

$$s=\frac{wt^2}{2}, \text{ где } w=g\frac{P\operatorname{ctg}\alpha}{P\operatorname{ctg}\alpha+2P_1\operatorname{tg}\alpha};$$

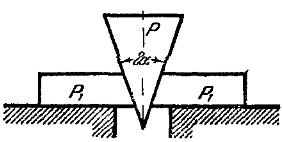
уравнение движения пластин:

$$s_1=\frac{w_1t^2}{2}, \text{ где } w_1=w\operatorname{tg}\alpha;$$

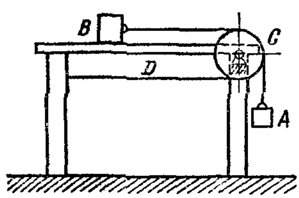
давление

$$N=\frac{P_1w_1}{g\cos\alpha}.$$

41.18 (889). Груз A весом P_1, опускаясь вниз, приводит в движение посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B весом P_2.



К задаче 41.17.

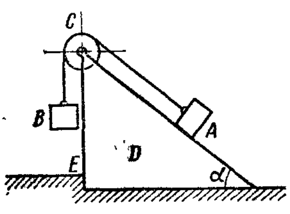


К задаче 41.18.

Определить давление стола D на пол, если вес стола равен P_3.

Ответ: $N=P_1+P_2+P_3-\frac{P_1^2}{P_1+P_2}$.

41.19 (890). Груз A весом P_1, опускаясь вниз по наклонной плоскости D, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок C, груз B весом P_2.



К задаче 41.19

Определить горизонтальную составляющую давления наклонной плоскости D на выступ пола E.

Ответ: $N=P_1\frac{P_1\sin\alpha-P_2}{P_1+P_2}\cos\alpha$.

41.20 (892). На пароходе для успокоения качки были установлены три стабилизатора, основной частью каждого из которых является маховик весом 110 *т*. Во время работы стабилизаторов маховики делают 910 *об/мин*.

Вычислить величину дополнительного бокового давления на направляющие подшипники вала маховика, вызываемого смещением на 1,08 *мм* центра тяжести маховика относительно оси вращения вследствие неоднородности металла и неточности обработки маховика.

Ответ: Давление $N = 109{,}7$ *т* и направлено по прямой, проходящей через ось вращения и центр тяжести.

41.21 (893). Однородный стержень весом P и длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец.

Определить растягивающую силу в поперечном сечении стержня, отстоящем от оси вращения на расстоянии a.

Ответ: $F = \dfrac{P(l^2 - a^2)\,\omega^2}{2gl}$.

41.22 (894). Однородная прямоугольная пластинка весом P равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω.

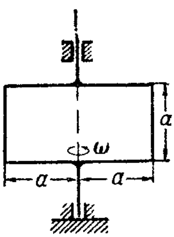
Определить силу, разрывающую пластину в направлении, перпендикулярном к оси вращения, в сечении, проходящем через ось вращения.

Ответ: $\dfrac{Pa\omega^2}{4g}$.

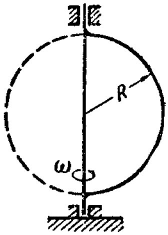
41.23 (895). Однородный круглый диск радиуса R и весом P вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра.

Определить силу, разрывающую диск по диаметру.

Ответ: $\dfrac{2PR\omega^2}{3\pi g}$.



К задаче 41.22.

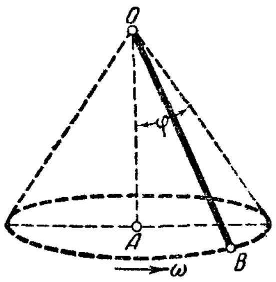


К задаче 41.23.

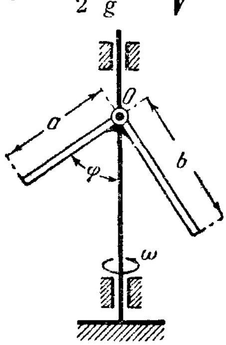
41.24 (899). Тонкий прямолинейный однородный стержень длиной l и весом P вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью OA и вершиной в точке O.

Вычислить угол отклонения стержня от вертикального направления, а также величину N давления стержня на шарнир O.

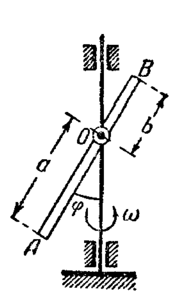
Ответ: $\varphi = \arccos \dfrac{3g}{2l\omega^2}$; $\quad N = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{P}{g}\,l\omega^2 \sqrt{1 + \dfrac{7g^2}{4l^2\omega^4}}$.



К задаче 41.24.



К задаче 41.25.



К задаче 41.26.

41.25 (900). В центробежном тахометре два тонких однородных прямолинейных стержня длиной a и b жестко соединены под прямым углом, вершина которого O шарнирно соединена с вертикальным валом; вал вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Найти зависимость между ω и углом отклонения φ, образованным направлением стержня длиной a и вертикалью.

Ответ: $\omega^2 = 3g\dfrac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin 2\varphi}$.

41.26 (901). Тонкий однородный прямолинейный стержень AB шарнирно соединен с вертикальным валом в точке O. Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω (см. чертеж на стр. 325).

Определить угол отклонения φ стержня от вертикали, если $OA = a$ и $OB = b$.

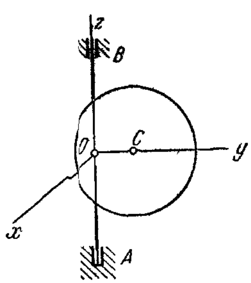
Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{\omega^2}\dfrac{a-b}{a^2 - ab + b^2}$.

§ 42. Давление вращающегося твердого тела на ось вращения

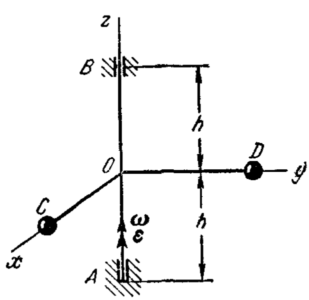
42.1 (1099). Центр тяжести махового колеса, весом 3000 *кГ*, находится на расстоянии 1 *мм* от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой.

Найти давления на подшипники, когда вал делает 1200 *об/мин*. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную к оси вращения.

Ответ: Давление на каждый из подшипников есть равнодействующая двух сил, из которых одна равна 1500 *кГ* и направлена по вертикали, а другая равна 2400 *кГ* и направлена параллельно прямой, соединяющей геометрический центр колеса, находящийся на оси вала, с центром тяжести колеса.



К задаче 42.2.



К задаче 42.3.

42.2. Однородный круглый диск массы M равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости диска и отстоящей от его центра тяжести C на расстоянии $OC = a$.

Определить динамические давления оси на подпятник A и подшипник B, если $OB = OA$. Оси x и y неизменно связаны с диском.

Ответ: $X_A = X_B = 0$; $Y_A = Y_B = \dfrac{Ma\omega^2}{2}$.

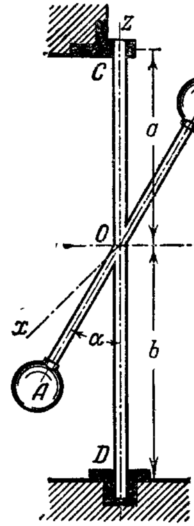
42.3. К вертикальной оси AB, вращающейся равноускоренно с угловым ускорением ε, прикреплены два груза C и D посредством двух перпендикулярных к оси AB и притом взаимно перпендикулярных стержней $OC=OD=r$.

Определить динамические давления оси AB на подпятник A и подшипник B. Грузы C и D считать точечными массами весом P каждый. Массами стержней пренебречь. В начальный момент системы находилась в покое. Оси x и y неизменно связаны со стержнями.

Ответ: $X_A=X_B=\frac{P}{2g}r\varepsilon(\varepsilon t^2+1)$;

$Y_A=Y_B=\frac{P}{2g}r\varepsilon(\varepsilon t^2-1)$.

42.4 (1101). Стержень AB длиной $2l$, на концах которого находятся грузы равного веса P, вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через середину O длины стержня. Расстояние точки O от подшипника C равно a, от подпятника D равно b. Угол между стержнем AB и осью Oz сохраняет постоянную величину α.



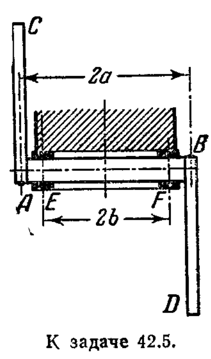
К задаче 42.4.

Пренебрегая весом стержня и размерами грузов, определить проекции давлений на подшипник C и подпятник D в тот момент, когда стержень находится в плоскости Oyz.

Ответ: $X_C=X_D=0$; $\quad Y_C=-Y_D=\frac{Pl^2\omega^2\sin 2\alpha}{g(a+b)}$; $\quad Z_D=-2P$.

42.5 (1102). На концы оси AB надеты два одинаковых кривошипа AC и BD длиной l и весом Q каждый, заклиненные под углом 180° относительно друг друга. Ось AB длиной $2a$ и весом P вращается с постоянной угловой скоростью ω в подшипниках E и F, расположенных симметрично на расстоянии $2b$ друг от друга.

Определить давления N_E и N_F на подшипники в тот момент, когда кривошип AC направлен вертикально вверх. Массу каждого кривошипа можно считать равномерно распределенной вдоль его оси.



К задаче 42.5.

Ответ: Давление $N_E=\frac{1}{2}P+Q-\frac{al\omega^2}{2bg}Q$, при $N_E>0$ направлено по вертикали вниз, при $N_E<0$ — вверх.

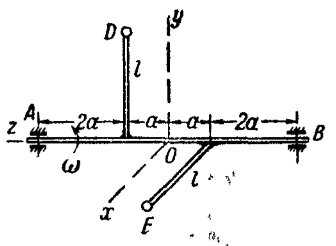
Давление $N_F=\frac{1}{2}P+Q+\frac{al\omega^2}{2bg}Q$ направлено по вертикали вниз.

42.6 (1103). К горизонтальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, прикреплены два равных, перпендикулярных к нему стержня длиной l, лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. чертеж). На концах стержней расположены шары D и E массой m каждый.

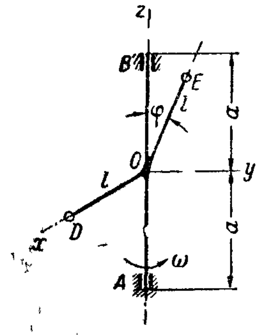
Определить динамическое давление вала на опоры A и B. Шары считать материальными точками; массами стержней пренебречь.

Ответ: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$.

42.7 (1104). К вертикальному валу AB, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω, жестко прикреплены два стержня. Стержень OE образует с валом угол φ, стержень OD перпендикулярен к плоскости, содержащей вал AB и стержень OE. Даны размеры: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. К концам стержней прикреплены два шара E и D массой m каждый.



К задаче 42.6.



К задаче 42.7.

Определить динамические давления вала на опоры A и B. Шары D и E считать точечными массами; массами стержней пренебречь.

Ответ: $X_A = X_B = \frac{ml\omega^2}{2}$; $Y_A = \frac{ml\omega^2 (a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$;

$Y_B = \frac{ml\omega^2 (a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$.

42.8. Использовав условие задачи 34.1, определить динамические давления коленчатого вала на подшипники K и L. Вал вращается равномерно с угловой скоростью ω. При решении можно воспользоваться ответами к задачам 34.1 и 34.24.

Ответ: $X_K = -X_L = \frac{3}{2} md \frac{a+b}{4a+3b}\omega^2$;

$Y_K = -Y_L = \frac{\sqrt{3}}{2} md \frac{a+b}{4a+3b}\omega^2$.

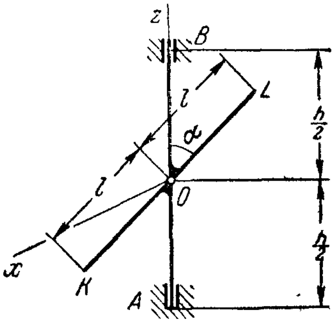
42.9. Однородный стержень KL, прикрепленный в центре под углом α к вертикальной оси AB, вращается равноускоренно вокруг этой оси с угловым ускорением ε.

Определить динамические давления оси AB на подпятник A и подшипник B, если: P — вес стержня, $2l$ — его длина, $OA = OB = h/2$; $OK = OL = l$. В начальный момент система находилась в покое.

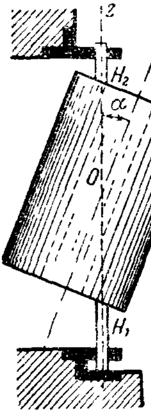
Ответ: $X_B = -X_A = \frac{Pl^2}{6gh}\varepsilon\sin 2\alpha$; $Y_B = -Y_A = \frac{Pl^2}{6gh}\varepsilon^2 t^2 \sin 2\alpha$.

42.10 (1105). Прямой однородный круглый цилиндр весом P, длиной $2l$ и радиуса r вращается с постоянной угловой скоростью ω

вокруг вертикальной оси Oz, проходящей через центр тяжести O цилиндра; угол между осью цилиндра $O\zeta$ и осью Oz сохраняет при этом постоянную величину α. Расстояние H_1H_2 между подпятником и подшипником равно h.



К задаче 42.9.



К задаче 42 10.

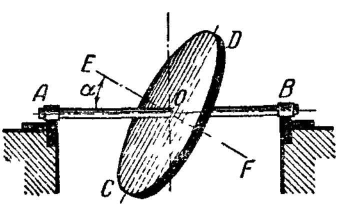
Определить боковые давления: N_1 на подпятник и N_2 на подшипник.

Ответ: Давления N_1 и N_2 имеют одинаковую величину

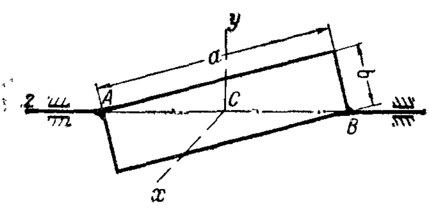
$$P\frac{\omega^2 \sin 2\alpha}{2gh}\left(\frac{1}{3}l^2-\frac{1}{4}r^2\right)$$

и противоположны по направлению.

42.11 (1106). Вычислить давления в подшипниках A и B при вращении вокруг оси AB однородного тонкого круглого диска CD паровой турбины, предполагая, что ось AB проходит через центр O диска, но вследствие неправильного рассверливания втулки составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол $AOE=\alpha=0{,}02$ *рад.* Дано: вес диска 3,27 *кГ*, радиус его 20 *см*, угловая скорость соответствует 30 000 *об/мин*, расстояние $AO=50$ *см*, $OB=30$ *см*; ось AB считать абсолютно твердой и принять $\sin 2\alpha=2\alpha$.



К задаче 42.11.



К задаче 42.12.

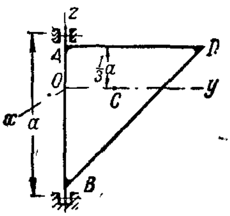
Ответ: Давления от веса диска: 1,23 *кГ* на подшипник A и 2,04 *кГ* на подшипник B; давления на подшипники, вызываемые вращением диска, имеют одинаковую величину 822 *кГ* и противоположные направления.

42.12 (1108). Однородная прямоугольная пластинка весом P равномерно вращается вокруг своей диагонали AB с угловой скоростью ω (см. чертеж на стр. 329). Определить динамические давления пластинки на опоры A и B, если длины сторон равны a и b.

Ответ: $X_A = 0$; $Y_A = \frac{-Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}$;

$X_B = 0$; $Y_B = \frac{Pab\omega^2(a^2 - b^2)}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}$.

42.13 (1109). С какой угловой скоростью должна вращаться вокруг катета $AB = a$ однородная пластинка, имеющая форму равнобедренного прямоугольного треугольника ABD, чтобы боковое давление на нижнюю опору B равнялось нулю? Расстояние между опорами считать равным длине катета AB.



К задаче 42.13.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}$.

42.14. Вращающаяся часть подъемного крана состоит из стрелы CD длиной L и весом G, противовеса E и груза K весом P каждый. (См. чертеж к задаче 34.34.) При включении постоянного тормозящего момента кран, вращаясь до этого с угловой скоростью, соответствующей $n = 1{,}5$ *об/мин*, останавливается через 2 *сек*.

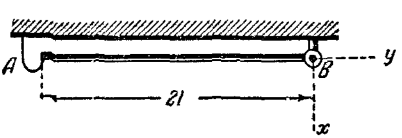
Рассматривая стрелу как однородную тонкую балку, а противовес с грузом как точечные массы, определить динамические реакции опор A и B крана в конце его торможения. Расстояние между опорами крана $AB = 3$ *м*, $P = 5$ *т*, $G = 8$ *т*, $\alpha = 45°$, $L = 30$ *м*, $l = 10$ *м*, центр тяжести всей системы находится на оси вращения; отклонением груза от плоскости крана пренебречь. Оси x, y связаны с краном. Стрела CD находится в плоскости yz.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 34.34 (положив $Q = P$).

Ответ: $Y_A = -Y_B = 0$; $X_B = -X_A \cong 6{,}2$ *т*.

§ 43. Смешанные задачи

43.1 (1111). Однородная тяжелая балка AB длиной $2l$ и весом Q при закрепленных концах находится в горизонтальном положении. В некоторый момент конец A освобождается, и балка начинает падать, вращаясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец B; в момент, когда балка становится вертикальной, освобождается и конец B.



К задаче 43.1.

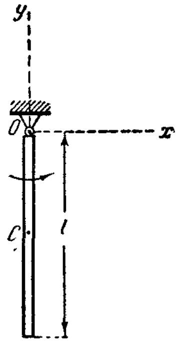
Определить в последующем движении балки траекторию ее центра тяжести и угловую скорость ω.

Ответ: 1) Парабола $y^2 = 3lx - 3l^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

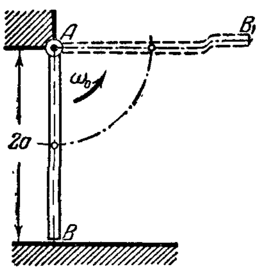
43.2 (1112). Тяжелый однородный стержень длиной l подвешен своим верхним концом на горизонтальной оси O. Стержню, находившемуся в вертикальном положении, была сообщена угловая скорость $\omega_0 = 3\sqrt{\frac{g}{l}}$. Совершив пол-оборота, он отделяется от оси O.

Определить в последующем движении стержня траекторию его центра тяжести и угловую скорость вращения ω.

Ответ: 1) Парабола $y_C = \frac{l}{2} - \frac{2}{3l} x_C^2$; 2) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.



К задаче 43.2.

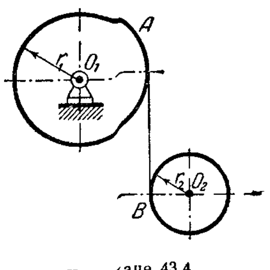


К задаче 43.3.

43.3 (1113). Однородный стержень AB длиной $2a$ подвешен за конец A; другой конец B находится у самого пола. Сообщив стержню некоторую начальную угловую скорость ω_0, освобождают конец A в тот момент, когда стержень окажется в горизонтальном положении. Дальнейшее движение свободного стержня происходит под влиянием одной силы тяжести.

Найти, при какой начальной скорости ω_0 стержень, падая на пол, в момент прикосновения к полу будет вертикален.

Ответ: $\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2 (2k+1)^2}{\pi(2k+1)+2}\right]$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$



К задаче 43.4.

43.4 (1114). Два однородных круглых цилиндра A и B, веса которых соответственно равны P_1 и P_2, а радиусы оснований r_1 и r_2, обмотаны двумя гибкими нитями, завитки которых расположены симметрично относительно средних плоскостей, параллельных основаниям цилиндров; оси цилиндров горизонтальны, причем образующие их перпендикулярны к линиям наибольших скатов. Ось цилиндра A неподвижна; цилиндр B падает из состояния покоя под действием силы тяжести.

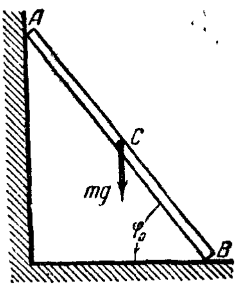
Определить в момент t после начала движения, предполагая, что в этот момент нити еще остаются намотанными на оба цилиндра:

1) угловые скорости ω_1 и ω_2 цилиндров, 2) пройденный центром тяжести цилиндра B путь s и 3) натяжение T нитей.

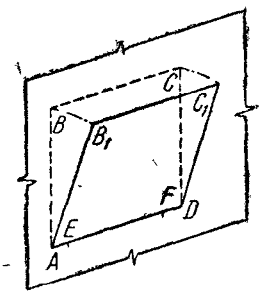
Ответ: 1) $\omega_1 = \frac{2gP_2}{r_1(3P_1+2P_2)}t$, $\omega_2 = \frac{2gP_1}{r_2(3P_1+2P_2)}t$;

2) $s = \frac{g(P_1+P_2)}{3P_1+2P_2}t^2$; 3) $T = \frac{P_1P_2}{2(3P_1+2P_2)}$.

43.5 (1115). Однородный стержень AB длиной a поставлен в вертикальной плоскости под углом φ_0 к горизонту так, что концом A он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом B — на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости.



К задаче 43.5.



К задаче 43.7.

1) Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.

2) Найти, какой угол φ_1 будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены.

Ответ: 1) $\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$, $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a}\cos\varphi$;

2) $\sin\varphi_1 = \frac{2}{3}\sin\varphi_0$.

43.6. Использовав условие предыдущей задачи, определить угловую скорость $\dot{\varphi}$ стержня и скорость нижнего его конца в момент падения стержня на пол.

Ответ: $\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\varphi_0\right)\sin\varphi_0}$; $v_A = \frac{1}{3}\sin\varphi_0\sqrt{ga\sin\varphi_0}$.

43.7 (1116). Тонкая однородная доска $ABCD$ прямоугольной формы, высота которой $AB = 2l$, прислонена к вертикальной стене и опирается на два гладких гвоздя E и F без головок; расстояние AE равно FD. В некоторый момент доска начинает падать с ничтожно малой начальной угловой скоростью, вращаясь вокруг прямой AD.

Определить, какой угол α будет составлять со стеной доска в тот момент, когда она соскочит с гвоздей. Случай скольжения доски вдоль гвоздей, без отрыва от них, исключается.

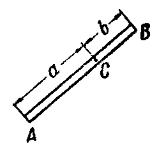
Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{3} = 70°32'$.

43.8 (1117). Два диска вращаются вокруг одной и той же оси с угловыми скоростями ω_1 и ω_2; моменты инерции дисков относительно этой оси равны J_1 и J_2.

Определить потерю кинетической энергии в случае, когда оба диска будут внезапно соединены фрикционной муфтой. Массой ее пренебречь.

Ответ: $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}(\omega_1 - \omega_2)^2$.

43.9 (1119). Стержень AB массы m, совершая плоское движение, имеет в данный момент угловое ускорение ε. Радиус инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости движения стержня, равен ρ; расстояния от центра тяжести C до концов A и B стержня соответственно равны a и b. Масса стержня заменена двумя точечными массами, сосредоточенными в концах стержня A и B так, что сумма приведенных масс равна массе стержня, а центр инерции приведенных масс совпадает с центром тяжести стержня.

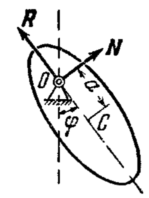


К задаче 43 9.

Определить, равны ли соответственно главный вектор и главный момент сил инерции приведенных масс главному вектору и главному моменту сил инерции стержня?

Ответ: Главные векторы сил инерции приведенных масс и стержня геометрически равны, а главные моменты отличаются на величину

$$m(ab - \rho^2)\varepsilon.$$



К задаче 43 10.

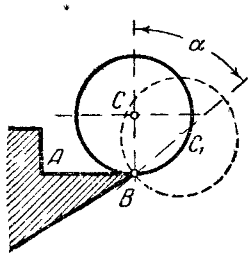
43.10 (1122). Твердое тело весом P качается вокруг горизонтальной оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Расстояние от оси подвеса до центра тяжести C равно a; радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к плоскости чертежа, равен ρ. В начальный момент тело было отклонено из положения равновесия на угол φ_0 и отпущено без начальной скорости.

Определить две составляющие реакции оси R и N, расположенные вдоль направления, проходящего через точку привеса и центр тяжести тела, и перпендикулярно к нему. Выразить их в зависимости от угла φ отклонения тела от вертикали.

Ответ:

$$R = P\cos\varphi + \frac{2Pa^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0);$$

$$N = P\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi.$$



К задаче 43 11.

43.11 (1070). Тяжелый однородный цилиндр, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки AB, край которой B заострен и параллелен образующей цилиндра. Радиус основания цилиндра r. В момент отделения цилиндра от площадки плоскость, проходящая через ось цилиндра и край B, отклонена от вертикального положения на некоторый угол $CBC_1 = \alpha$.

Определить угловую скорость цилиндра в момент отделения его от площадки, а также угол α. Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Указание. В момент отделения цилиндра от площадки составляющая веса по прямой C_1B равна величине центробежной силы цилиндра вокруг ребра площадки $\frac{Q}{g} r\omega^2$, где Q — вес цилиндра.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7r}}$; $\alpha = \arccos\frac{4}{7} = 55{,}1°$.

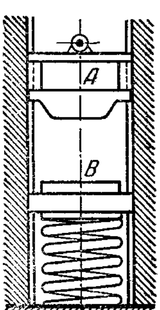
43.12 (1121). На боковой поверхности круглого цилиндра с вертикальной осью, вокруг которой он может вращаться без трения, вырезан гладкий винтовой желоб с углом подъема α. В начальный момент цилиндр находится в покое; в желоб опускают тяжелый шарик; он падает по желобу без начальной скорости и заставляет цилиндр вращаться. Дано: масса цилиндра M, радиус его R, масса шарика m; расстояние от шарика до оси считаем равным R и моменг инерции цилиндра равным $\frac{1}{2}MR^2$.

Определить угловую скорость ω, которую цилиндр будет иметь в тот момент, когда шарик опустится на высоту h.

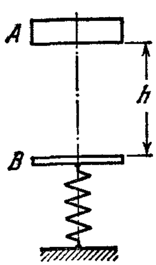
Ответ: $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.

§ 44. Удар

44.1 (1123). Баба A ударного копра падает с высоты 4,905 *м* и ударяет наковальню B, укрепленную на пружине. Вес бабы 10 *кГ*, вес наковальни 5 *кГ*.



К задаче 44.1.



К задаче 44.2.

Определить, с какой скоростью начнется движение наковальни после удара, если баба будет двигаться вместе с ней.

Ответ: 6,54 *м/сек*.

44.2 (1128). Груз A весом P падает без начальной скорости с высоты h на плиту B весом p, укрепленную на пружине, которая имеет коэффициент жесткости c.

Найти величину s сжатия пружины после удара в предположении, что коэффициент восстановления равен нулю.

Ответ: $s = \frac{P}{c} + \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h\frac{P^2}{c(P+p)}}$.

44.3 (1129). В приборе для опытного определения коэффициента восстановления шарик из испытуемого материала падает без начальной скорости внутри вертикальной стеклянной трубки с заданной высоты $h_1 = 50$ *см* на неподвижно закрепленную горизонтальную пластинку из соответствующего материала.

Найти коэффициент восстановления, если высота, на которую подскочил шарик после удара, оказалась равной $h_2 = 45$ *см.*

Ответ: $k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 0{,}95.$

44.4 (1130). Упругий шарик падает по вертикали с высоты h на горизонтальную плиту, отскакивает от нее вверх, вновь падает на плиту и т. д., продолжая эти движения.

Найти путь, пройденный шариком до остановки, если коэффициент восстановления при ударе равен k.

Ответ: $s = \frac{1+k^2}{1-k^2}h.$

44.5 (1131). Паровой молот весом 12 *т* падает со скоростью 5 *м/сек* на наковальню, вес которой вместе с отковываемой деталью равен 250 *т*.

Найти работу A_1, поглощаемую отковываемой деталью, и работу A_2, потерянную на сотрясение фундамента, а также вычислить коэффициент η полезного действия молота; удар неупругий.

Ответ: $A_1 = 14\,600$ *кГм*; $A_2 = 700$ *кГм*; $\eta = 0{,}95$.

44.6 (1124). Найти скорости после абсолютного упругого удара двух одинаковых шаров, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2.

Ответ: Шары после удара обмениваются скоростями.

44.7 (1125). Два одинаковых упругих шара A и B движутся навстречу друг другу.

При каком соотношении между скоростями до удара шар A после удара остановится? Коэффициент восстановления при ударе равен k.

Ответ: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1-k}.$

44.8 (1126). Определить отношение масс m_1 и m_2 двух шаров в следующих двух случаях: 1) первый шар находится в покое; происходит центральный удар, после которого второй шар остается в покое; 2) шары встречаются с равными и противоположными скоростями; после центрального удара второй шар остается в покое. Коэффициент восстановления равен k.

Ответ: 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$; 2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k.$

44.9 (1127). Три абсолютно упругих шара с массами m_1, m_2 и m_3 лежат в гладком желобе на некотором расстоянии друг от друга. Первый шар, пущенный с некоторой начальной скоростью, ударяет во второй, покоящийся шар, который, начав двигаться, в свою очередь ударяет в третий, покоящийся шар.

При какой величине массы m_2 второго шара третий шар получит наибольшую скорость?

Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$.

44.10 (1132). Шар массой m_1, движущийся поступательно со скоростью v_1, встречает покоящийся шар массой m_2, так что скорость его образует при ударе угол α с линией, соединяющей центры шаров.

Определить: 1) скорость первого шара после удара, считая удар абсолютно неупругим; 2) скорость каждого из шаров после удара в предположении, что удар упругий с коэффициентом восстановления k.

Ответ: 1) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$;

2) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cos^2\alpha}$,

$u_2 = v_1 \frac{m_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}$.

44.11 (1133). Абсолютно упругий шар, центр которого движется прямолинейно со скоростью v, встречает под углом α гладкую вертикальную плоскость.

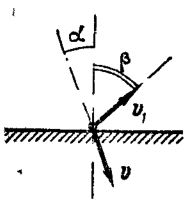
Определить скорость шара после удара.

Ответ: Угол отражения равен углу падения, скорости до и после удара по модулю равны.

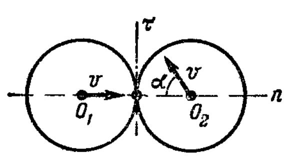
44.12 (1134). Стальной шарик падает на горизонтальную стальную плиту под углом 45° и отскакивает под углом 60° к вертикали.

Определить коэффициент восстановления при ударе.

Ответ: $k = 0{,}58$.



К задаче 44.13.



К задаче 44 14.

44.13 (1135). Шарик падает наклонно со скоростью v на неподвижную горизонтальную плоскость и отскакивает от плоскости со скоростью $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$.

Определить угол падения α и угол отражения β, если коэффициент восстановления при ударе $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.

44.14 (1136). Два одинаковых абсолютно упругих шара, двигаясь поступательно, соударяются с равными по модулю скоростями v. Скорость левого шара до удара направлена по линии центров направо, а скорость правого шара до удара образует с линией центров угол α (см. чертеж).

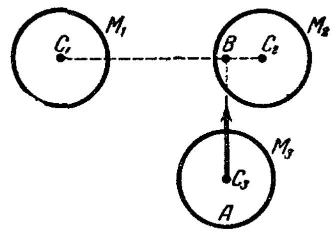
Найти скорости шаров после удара.

Ответ: $u_{1n} = -v\cos\alpha$; $u_{1\tau} = 0$; $u_{2n} = v$; $u_{2\tau} = v\sin\alpha$.

Ось n направлена по линии центров вправо, ось τ — вверх.

44.15 (1137). Имеются три одинаковых шара: M_1, M_2, M_3 радиусов R, расстояние центров $C_1C_2 = a$.

Определить, на какой прямой AB, перпендикулярной к линии C_1C_2, должен находиться центр C_3 третьего шара для того, чтобы, получив некоторую скорость по направлению AB, этот шар после удара о шар M_2 нанес центральный удар шару M_1; шары абсолютно упруги и движутся поступательно.



К задаче 44.15

Ответ: Расстояние прямой AB от центра C_2 равно $BC_2 = \dfrac{4R^2}{a}$.

44.16 (1138). Для укрепления грунта под фундаментом здания сваи весом $P = 50$ *кГ* вбивались копром, боек которого весом $P_1 = 450$ *кГ* падал без начальной скорости с высоты $h = 2$ *м*; при последних десяти ударах свая углубилась на $\delta = 5$ *см*.

Определить среднее сопротивление грунта при вбивании свай. Удар считать неупругим.

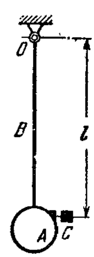
Ответ: $S = 16{,}2$ *т*.

44.17 (1139). Два шара с массами m_1 и m_2 висят на параллельных нитях длиной l_1 и l_2 так, что центры их находятся на одной высоте. Первый шар был отклонен от вертикали на угол α_1 и затем отпущен без начальной скорости.

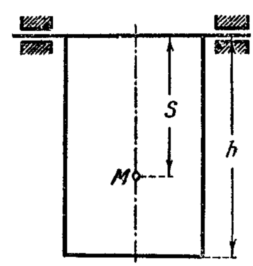
Определить угол предельного отклонения α_2 второго шара, если коэффициент восстановления равен k.

Ответ:

$$\sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\alpha_1}{2}.$$



К задаче 44.18.



К задаче 44.19.

44.18 (1141). Маятник ударной машины состоит из стального диска A радиуса 10 *см* и толщиной 5 *см* и из стального круглого стержня B диаметром 2 *см* и длиной 90 *см*.

На каком расстоянии l от горизонтальной плоскости, в которой лежит ось вращения O, должен быть помещен разбиваемый машиной брусок C, чтобы ось не испытывала удара? Ударный импульс лежит в плоскости чертежа и направлен горизонтально.

Ответ: $l = 97{,}5$ *см*.

44.19 (1142). Определить положение центра удара прямоугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h.

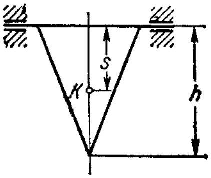
Ответ: $s = \dfrac{2}{3}h$.

44.20. Определить положение центра удара K треугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h.

Ответ: $s=\frac{1}{2}h$.

44.21 (1143). Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловыми скоростями ω_{10} и ω_{20}.

Определить угловые скорости шкивов ω_1 и ω_2 после того, как на них будет накинут ремень, считая шкивы круглыми дисками одинаковой плотности с радиусами R_1 и R_2 и пренебрегая скольжением и массой ремня.



К задаче 44.20.

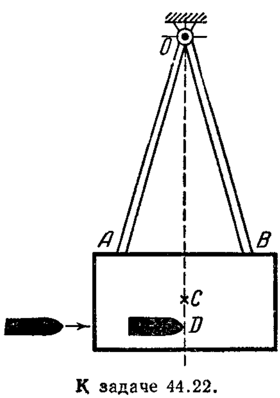
Ответ: $\omega_1=\frac{R_1^3\omega_{10}+R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2+R_2^2)}$;

$\omega_2=\frac{R_1^3\omega_{10}+R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2+R_2^2)}$.

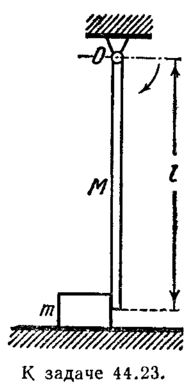
44.22 (1145). Баллистический маятник, употребляющийся для определения скорости снаряда, состоит из цилиндра AB, подвешенного к горизонтальной оси O; цилиндр открыт с одного конца A и наполнен песком; снаряд, влетающий в цилиндр, производит вращение маятника вокруг оси O на некоторый угол. Дано: M — масса маятника; $OC=h$ — расстояние от его центра тяжести C до оси O; ρ — радиус инерции относительно оси O; m — масса снаряда; $OD=a$ — расстояние от линии действия ударного импульса до оси; α — угол отклонения маятника.

Определить скорость снаряда, предполагая, что ось маятника O не испытывает удара, причем $ah=\rho^2$.

Ответ: $v=\frac{2(Mh+ma)}{m}\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\alpha}{2}$.



К задаче 44.22.



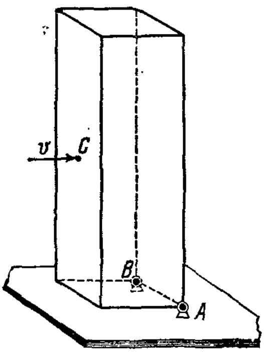
К задаче 44.23.

44.23 (1146). Однородный стержень с массой M и длиной l, прикрепленный своим верхним концом к цилиндрическому шарниру O, падает без начальной скорости из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет груз массы m, сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения скольжения f.

Определить путь, пройденный грузом, считая удар неупругим.

Ответ: $s = \frac{3l}{2f}\frac{M^2}{(M+3m)^2}$.

44.24 (1147). Однородная прямая призма с квадратным основанием стоит на горизонтальной плоскости и может вращаться вокруг ребра AB, лежащего в этой плоскости. Ребро основания призмы равно a, высота ее $3a$, масса $3m$. В середину C боковой грани, противолежащей ребру AB, ударяет шар массой m с горизонтальной скоростью v.



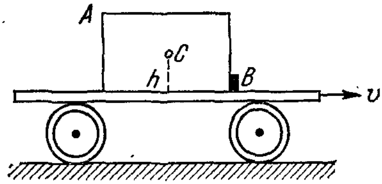
К задаче 44.24.

Предполагая, что удар неупругий и что масса шара сосредоточена в его центре, который после удара остается в точке C, определить наименьшую величину скорости v, при которой призма опрокинется.

Ответ: $v = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}$.

44.25 (1148). Платформа с помещенным на ней призматическим грузом AB катится по горизонтальным рельсам со скоростью v. На платформе имеется выступ, в который упирается ребро B груза, препятствуя последнему скользить по платформе вперед, но не препятствуя вращению его около ребра B. Дано: h — высота центра тяжести груза над платформой, ρ — радиус инерции груза относительно ребра B.

Определить угловую скорость ω вращения груза около ребра B в момент мгновенной остановки платформы.



К задаче 44.25.

Ответ: $\omega = \frac{hv}{\rho^2}$.

44.26 (1149). Полагая при условиях предыдущей задачи, что груз представляет собой однородный прямоугольный параллелепипед, длина ребра которого вдоль платформы равна 4 *м*, а высота 3 *м*, найти, при какой скорости произойдет опрокидывание груза.

Ответ: $v = 30{,}7$ *км/час*.

§ 45. Динамика точки и системы переменной массы (переменного состава)

45.1 (1150). Составить уравнение движения маятника переменной массы в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Масса маятника изменяется по заданному закону $m = m(t)$ путем отделения частиц с относительной скоростью, равной нулю. Длина нити маятника l. На маятник действует также сила сопротивления, пропорциональная его угловой скорости: $R = -\beta\dot{\varphi}$.

Ответ: $\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m(t)\,l}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$

45.2. Составить дифференциальное уравнение восходящего движения ракеты. Эффективную скорость v_e истечения газов *) считать постоянной. Масса ракеты изменяется по закону $m = m_0 f(t)$ (закон сгорания). Сила сопротивления воздуха является заданной функцией скорости и положения ракеты: $R(x, \dot{x})$.

Ответ: $\ddot{x} = -g - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}v_e - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}.$

45.3 (1152). Проинтегрировать уравнение движения предыдущей задачи при $m = m_0(1 - \alpha t)$ и $R = 0$. Начальная скорость ракеты у поверхности земли равна нулю. На какой высоте будет находиться ракета в моменты $t = 10;\ 30;\ 50$ *сек* при $v_e = 2000$ *м/сек* и $\alpha = \frac{1}{100}$ *сек*$^{-1}$?

Ответ: $x(t) = \frac{v_e}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] - \frac{gt^2}{2};$

$x(10) = 0{,}54$ *км*; $x(30) = 5{,}65$ *км*; $x(50) = 18{,}4$ *км*.

45.4. Ракета с начальной массой m_0 поднимается вертикально вверх в однородном поле силы тяжести с постоянным ускорением ng (g — ускорение земного тяготения).

Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость v_e истечения газов постоянной, определить: 1) закон изменения массы ракет, 2) закон изменения массы ракеты при отсутствии поля тяготения.

Ответ: 1) $m = m_0 e^{-\frac{n+1}{v_e}gt}$; 2) $m = m_0 e^{-\frac{ng}{v_e}t}$.

45.5. Масса ракеты, описанной в задаче 45.2, изменяется до $t = t_0$ по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$.

Пренебрегая силой сопротивления, найти движение ракеты и, считая, что к моменту времени t_0 весь заряд практически сгорел, определить максимальную высоту подъема ракеты. В начальный момент ракета имела скорость, равную нулю, и находилась на земле.

Ответ: $H = \frac{\alpha v_e}{2g}[\alpha v_e - g]\,t_0^2$, где v_e — эффективная скорость истечения газов из ракеты.

45.6. При условиях предыдущей задачи определить значение α, отвечающее максимальной возможной высоте подъема ракеты H_{max}, и вычислить H_{max} (величину $\mu = \alpha t_0 = \ln\frac{m_0}{m_1}$ необходимо считать постоянной; m_1 — масса ракеты в момент t_0).

Ответ: $\alpha = \infty$ (мгновенное сгорание);

$$H_{max} = \frac{\mu^2}{2g}v_e^2.$$

---

*) Тяга реактивного двигателя определяется формулой $P_д = -\frac{dm}{dt}v_e$, где v_e — эффективная скорость истечения.

45.7. При условиях задач 45.5 и 45.6, задавшись коэффициентом перегрузки $k=\frac{av_e}{g}$, определить высоту подъема H ракеты в зависимости от $H_{\max}$.

Ответ: $H=H_{\max}\frac{k-1}{k}$.

45.8. Ракета стартует с Луны вертикально к ее поверхности. Эффективная скорость истечения $v_e=2000$ *м/сек*. Число Циолковского $z=5$ *).

Определить, какое должно быть время сгорания топлива, чтобы ракета достигла скорости $v=3000$ *м/сек* (принять, что ускорение силы тяжести вблизи Луны постоянно и равно 1,62 *м/сек*^{2}).

Ответ: ≈ 2 *мин* 4 *сек*.

45.9. Ракета движется в однородном поле силы тяжести вверх с постоянным ускорением w.

Пренебрегая сопротивлением атмосферы и считая эффективную скорость v_e истечения газов постоянной, определить время T, за которое масса ракеты уменьшится в два раза.

Ответ: $T=\frac{v_e}{w+g}\ln 2$.

45.10. Эффективная скорость истечения газов из ракеты $v_e=2,4$ *км/сек*.

Каково должно быть отношение запаса топлива к весу ракеты без топлива, чтобы после сгорания топлива ракета, движущаяся вне поля тяготения и вне атмосферы, приобрела скорость 9 *км/сек*?

Ответ: Вес топлива должен составлять примерно 98% от стартового веса ракеты.

45.11. Ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления среды. Эффективная скорость истечения газов $v_e=2400$ *м/сек*.

Определить число Циолковского, если в момент полного сгорания топлива скорость ракеты будет равна 4300 *м/сек*.

Ответ: $z\approx 6$.

45.12. Тело переменной массы, имея начальную скорость, равную нулю, движется с постоянным ускорением w по горизонтальным направляющим. Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна.

Определить, пренебрегая сопротивлением, путь, пройденный телом до того момента, когда его масса уменьшится в k раз.

Ответ: $s=\frac{v_e^2}{2w}(\ln k)^2$.

45.13. Решить предыдущую задачу, предположив, что на тело действует сила трения скольжения.

Ответ: $s=\frac{wv_e^2}{2(w+fg)^2}(\ln k)^2$, где f — коэффициент трения скольжения.

---

*) Числом Циолковского называется отношение стартовой массы ракеты к массе ракеты без топлива.

45.14. Тело переменной массы движется по специальным направляющим, проложенным вдоль экватора. Касательное ускорение $w_\tau = a$ постоянно.

Не учитывая сопротивление движению, определить, во сколько раз уменьшится масса тела, когда оно сделает один оборот вокруг Земли, если эффективная скорость истечения газов $v_e = \text{const}$. Каково должно быть ускорение a, чтобы после одного оборота тело приобрело первую космическую скорость?

Ответ: В $e^{\frac{2}{v_e}\sqrt{\pi R a}}$ раз; $a = \frac{g}{4\pi}$.

45.15. Определить в предыдущей задаче массу топлива, сгоревшую к моменту, когда давление тела на направляющие будет равно нулю.

Ответ: $m_\tau = m_0\left(1 - e^{-\frac{\sqrt{gR}}{v_e}}\right)$.

45.16. Тело скользит по горизонтальным рельсам. Истечение газа происходит вертикально вниз с постоянной эффективной скоростью v_e. Начальная скорость тела равна v_0.

Найти закон изменения скорости тела и закон его движения, если изменение массы происходит по закону $m = m_0 - at$. Коэффициент трения скольжения равен f.

Ответ: $v = v_0 - f\left[gt - v_e \ln\frac{m_0}{m_0 - at}\right]$;

$$s = v_0 t - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_e\left[t \ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1\right)\right]\right\}.$$

45.17. Решить предыдущую задачу, если изменение топлива будет происходить по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Определить, при каком α тело будет двигаться с постоянной скоростью v_0.

Ответ: $v = v_0 - f(g - \alpha v_e)t$; $s = v_0 t - f(g - \alpha v_e)\frac{t^2}{2}$; $\alpha = \frac{g}{v_e}$.

45.18. Какой путь пройдет ракета на прямолинейном активном участке в пустоте и при отсутствии сил тяготения за время разгона от нулевой начальной скорости до скорости, равной эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e, если известна начальная масса ракеты m_0 и секундный расход β?

Ответ: $s = \frac{v_e m_0}{\beta} \cdot \frac{e - 2}{e}$, где e — неперово число.

45.19. Ракета движется прямолинейно вне поля тяготения и при отсутствии сопротивления. Найти работу силы тяги к моменту, когда сгорит все топливо. Начальная масса ракеты m_0, конечная — m_1. Эффективная скорость истечения v_e постоянна.

Ответ: $A = m_1 v_e^2[\ln z - (z - 1)]$; $z = \frac{m_0}{m_1}$.

45.20. При каком отношении z начальной m_0 и конечной m_1 масс ракеты, движущейся прямолинейно в пустоте и при отсутствии сил тяготения, ее механический к. п. д., определяемый как отношение кинетической энергии ракеты после выгорания топлива к затраченной энергии, имеет наибольшее значение?

Ответ: z — корень уравнения $\ln z = \frac{2(z-1)}{1+z}$.

45.21. Самолет, имеющий массу m_0, приземляется со скоростью v_0 на полярный аэродром. Вследствие обледенения масса самолета при движении после посадки увеличивается согласно формуле $m = m_0 + at$, где $a = \text{const}$. Сопротивление движению самолета по аэродрому пропорционально его весу (коэффициент пропорциональности f). Определить промежуток времени до остановки самолета с учетом (T) и без учета (T_1) изменения его массы. Найти закон изменения скорости с течением времени.

Ответ: $T = \frac{m_0}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{2av_0}{fgm_0}} - 1\right)$; $T_1 = \frac{v_0}{fg}$;

$$v = \frac{m_0 v_0 - fg/2\,(2m_0 + at)\,t}{m_0 + at}.$$

45.22. Эффективные скорости истечения первой и второй ступени у двухступенчатой ракеты соответственно равны

$$v_e^{(1)} = 2400\ \textit{м/сек} \text{ и } v_e^{(2)} = 2600\ \textit{м/сек}.$$

Определить, считая, что движение происходит вне поля тяготения и атмосферы, числа Циолковского для обеспечения конечной скорости $v_1 = 2400$ *м/сек* первой ступени и конечной скорости $v_2 = 5400$ *м/сек* второй ступени.

Ответ: $z_1 = 2{,}72$; $z_2 = 3{,}17$.

45.23. Считая, что у трехступенчатой ракеты числа Циолковского и эффективные скорости v_e истечения у всех трех ступеней одинаковы, найти число Циолковского при $v_e = 2{,}4$ *км/сек*, если после сгорания всего топлива скорость ракеты равна 9 *км/сек* (влиянием поля тяготения и сопротивлением атмосферы пренебречь).

Ответ: $z = 3{,}49$.

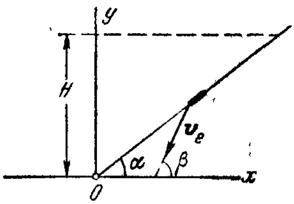
45.24. Трехступенчатая ракета движется поступательно при отсутствии тяготения и сопротивления атмосферы. Эффективные скорости истечения и числа Циолковского для всех ступеней одинаковы и соответственно равны $v_e = 2500$ *м/сек*, $z = 4$. Определить скорости ракеты после сгорания горючего в первой ступени, во второй и в третьей.

Ответ: $v_1 = 3465$ *м/сек*; $v_2 = 6930$ *м/сек*; $v_3 = 10\,395$ *м/сек*.

45.25. В момент, когда приближающийся к Луне космический корабль находится на расстоянии H от ее поверхности и имеет скорость v_0, направленную к центру Луны, включается тормозной двигатель. Учитывая, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от корабля до центра Луны, и принимая, что масса корабля изменяется по закону $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (m_0 — масса ракеты в момент включения тормозного двигателя, α — постоянное число), найти α, при котором корабль совершит мягкую посадку (т. е. будет иметь скорость прилунения, равную нулю). Эффективная скорость истечения газов v_e постоянна. Радиус Луны R.

Ответ: $\alpha = \frac{v_0^2}{2v_e H} + \frac{gR}{v_e(R+H)}$.

45.26. Найти закон изменения массы ракеты, начавшей движение вертикально вверх с нулевой начальной скоростью, если ее ускорение w постоянно, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости (b — коэффициент пропорциональности). Поле силы тяжести считать однородным. Эффективная скорость истечения газа v_e постоянна.



К задаче 45.27.

Ответ:

$$m = \left(m_0 + \frac{2bv_e^2 w^2}{(w+g)^2}\right) e^{-\frac{w+g}{v_e}t} - \frac{bw^2}{w+g}t^2 + \frac{2v_e bw^2}{(w+g)^2}t - \frac{2v_e^2 bw^2}{(w+g)^3}.$$

45.27. Ракета перемещается в однородном поле силы тяжести по прямой с постоянным ускорением w. Эта прямая образует угол α с горизонтальной плоскостью, проведенной к поверхности Земли в точке запуска ракеты. Предполагая, что эффективная скорость истечения газов v_e постоянна по величине и направлению, определить, каково должно быть отношение начальной массы ракеты к массе ракеты без топлива (число Циолковского), если к моменту сгорания топлива ракета оказалась на расстоянии H от указанной выше касательной плоскости.

Ответ: $z = e^{\frac{\cos\alpha}{v_e\cos\beta}\sqrt{\frac{2wH}{\sin\alpha}}}$, где β — угол, образуемый скоростью v_e с касательной плоскостью, равный

$$\beta = \arccos\frac{w\cos\alpha}{\sqrt{w^2+g^2+2gw\sin\alpha}}.$$

45.28. Тело переменной массы движется с постоянным ускорением w по шероховатым прямолинейным направляющим, составляющим угол α с горизонтом. Считая, что поле силы тяжести является однородным, а сопротивление атмосферы движению тела пропорционально первой степени скорости (b — коэффициент сопротивления), найти закон изменения массы тела. Эффективная скорость истечения газа v_e постоянна; коэффициент трения скольжения между телом и направляющими равен f.

Ответ: $m = \left(m_0 - \frac{bwv_e}{w_1^2}\right) e^{-\frac{w_1}{v_e}t} - \frac{bw}{w_1}\left(t - \frac{v_e}{w_1}\right)$, где $w_1 = w + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$, m_0 — начальная масса тела.

45.29 (1155). Аэростат весом Q поднимается вертикально и увлекает за собой сложенный на земле канат. На аэростат действуют подъемная сила P, сила тяжести и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости: $R = -\beta\dot{x}^2$. Вес единицы длины каната γ. Составить уравнение движения аэростата.

Ответ: $\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q+\gamma x} - \frac{\beta g + \gamma}{Q+\gamma x}\dot{x}^2$.

45.30 (1156). При условиях предыдущей задачи определить скорость подъема аэростата. В начальный момент аэростат неподвижен и находится на высоте H_0.

Ответ: $$\dot{x}^2 = \frac{Pg}{(\beta g+\gamma)}\left[1 - \left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2\left(1+\beta\frac{g}{\gamma}\right)}\right] - \frac{2g}{2\beta g + 3\gamma}\left[1 - \left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{3+2\beta\frac{g}{\gamma}}\right](Q+\gamma x).$$

45.31 (1157). Шарообразная водяная капля падает вертикально в атмосфере, насыщенной водяными парами. Вследствие конденсации масса капли возрастает пропорционально площади ее поверхности (коэффициент пропорциональности α). Начальный радиус капли r_0, ее начальная скорость v_0, начальная высота h_0. Определить скорость капли и закон изменения ее высоты со временем (сопротивлением движению пренебречь).

Указание. Показать, что $dr = \alpha\, dt$, и перейти к новой независимой переменной r.

Ответ: $$x = h_0 + \frac{v_0 r_0}{2\alpha}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right] - \frac{g}{8\alpha^2}\left[r^2 - 2r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\right],$$
$$v = v_0\frac{r_0^3}{r^3} - \frac{g}{4\alpha}\left[r - \frac{r_0^4}{r^3}\right], \text{ где } r = r_0 + \alpha t.$$

45.32 (1158). Решить предыдущую задачу в предположении, что на каплю кроме силы тяжести действует еще и сила сопротивления, пропорциональная площади максимального поперечного сечения и скорости капли: $R = -4\beta\pi r^2 v$ (β — постоянный коэффициент).

Ответ: $$x = h_0 - \frac{1}{3\beta+2\alpha}\left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\beta+\alpha)}\right]\times$$
$$\times\left[r^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)} - r_0^{-\frac{1}{\alpha}(3\beta+2\alpha)}\right] - \frac{g(r^2 - r_0^2)}{2\alpha(4\alpha+3\beta)},$$
$$v = \frac{gr}{4\alpha+3\beta} + \left[\frac{g r_0^{\frac{1}{\alpha}(4\alpha+3\beta)}}{4\alpha+3\beta} + v_0 r_0^{\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)}\right] r^{-\frac{3}{\alpha}(\alpha+\beta)},$$
где $r = r_0 + \alpha t$.

45.33 (1159). Свернутая в клубок тяжелая однородная цепь лежит на краю горизонтального стола, причем вначале одно звено цепи неподвижно свешивается со стола. Направляя ось x вертикально вниз и принимая, что в начальный момент $x = 0$, $\dot{x} = 0$, определить движение цепи.

Ответ: $x = \frac{1}{6}gt^2$.

45.34 (1160). Цепь сложена на земле и одним концом прикреплена к вагонетке, стоящей на наклонном участке пути, образующем угол α с горизонтом. Коэффициент трения цепи о землю f. Вес единицы длины цепи γ, вес вагонетки P. Скорость вагонетки в начальный момент v_0. Определить скорость вагонетки в любой момент времени и выяснить необходимое условие, при котором вагонетка может остановиться.

$$\text{Ответ: } \frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{P^2v_0^2}{2(P+\gamma x)^2}+\frac{Pg}{3\gamma}\sin\alpha\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+$$
$$+\frac{1}{3}gx\sin\alpha+\frac{fPg}{6\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha-\frac{1}{3}fgx\cos\alpha.$$

Остановка может иметь место при выполнении неравенства $f>\operatorname{tg}\alpha$.

45.35 (1161). Материальная точка массы m притягивается по закону всемирного тяготения Ньютона к неподвижному центру. Масса центра со временем меняется по закону $M=\frac{M_0}{1+\alpha t}$. Определить движение точки.

Указание. Перейти к новым координатам с помощью соотношений $\xi=\frac{x}{1+\alpha t}$, $\eta=\frac{y}{1+\alpha t}$ и к приведенному времени $\tau=\frac{1}{\alpha(1+\alpha t)}$.

Ответ: Уравнения движения в координатах ξ, η имеют вид (f — постоянная тяготения)

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2}+f\frac{M_0\xi}{\rho^2}=0;\quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2}+f\frac{M_0\eta}{\rho^2}=0;\quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

т. е. отвечают обычным уравнениям в случае постоянных масс. Поэтому в зависимости от начальных условий в переменных ξ и η имеют место эллиптические, параболические или гиперболические орбиты.

45.36. Для быстрого сообщения ротору гироскопа необходимого числа оборотов применяется реактивный запуск. В тело ротора вделываются пороховые шашки общей массой m_0, продукты сгорания которых выбрасываются через специальные сопла. Принять пороховые шашки за точки, расположенные на расстоянии r от оси вращения ротора. Касательная составляющая эффективной скорости истечения продуктов сгорания v_e постоянна.

Считая, что общий расход массы пороха в одну секунду равен q, определить угловую скорость ω ротора к моменту сгорания пороха, если на ротор действует постоянный момент сопротивления, равный M. Радиус ротора R. В начальный момент ротор находится в покое.

Ответ: $\omega=\frac{Rqv_e-M}{r^2q}\ln\frac{J_0}{J_p}$, где $J_0=J_p+m_0r^2$, J_p — момент инерции ротора относительно оси вращения.

45.37. По данным предыдущей задачи найти угловую скорость ротора после сгорания пороха, если на ротор действует момент сопротивления, пропорциональный его угловой скорости (b — коэффициент пропорциональности).

Ответ: $\omega=\frac{Rv_eq}{b}\left[1-\left(\frac{J_p}{J_0}\right)^{\frac{b}{r^2q}}\right]$.

45.38. Многоступенчатая ракета состоит из полезного груза и ступеней. Каждая ступень после израсходования топлива отделяется от остальной конструкции. Под субракетой понимается сочетание работающей ступени, всех неработающих ступеней и полезного груза, причем для данной субракеты все неработающие ступени и полезный груз являются «полезным грузом», т. е. каждая ракета рассматривается как одноступенчатая ракета. На рисунке указана нумерация ступеней и субракеты.

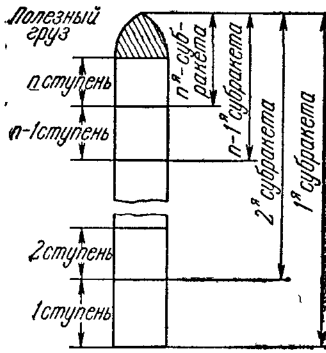
Пусть q — вес полезного груза, P_i — вес топлива в i-й ступени, Q_i — сухой (без топлива) вес i-й ступени, G_i — полный вес i-й субракеты.

Вводя в рассмотрение число Циолковского для каждой субракеты

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

и конструктивную характеристику (отношение полного веса ступени к ее сухому весу) для каждой ступени

$$s_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i},$$



К задаче 45.38.

определить полный стартовый вес всей ракеты, вес k-й субракеты, вес топлива k-й ступени, сухой вес k-й ступени.

Указание. При решении задачи ввести α_i — «относительный вес» i-й субракеты, т. е. отношение начального веса субракеты к весу ее полезного груза:

$$\alpha_1 = \frac{G_1}{G_2}, \quad \alpha_2 = \frac{G_2}{G_3}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{G_n}{q}.$$

Ответ: $G_1 = q \prod_{i=1}^{n} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i}$;

$$G_k = q \prod_{i=k}^{n} z_i \prod_{i=k}^{n} \frac{s_i - 1}{s_i - z_i};$$

$$P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} G_k;$$

$$Q_k = \frac{P_k}{s_k - 1}$$ (формулы Фертрегта).

45.39. Двухступенчатая ракета предназначена сообщить полезному грузу $q = 100$ *кГ* скорость $v = 6000$ *м/сек*. Эффективные скорости истечения газов у ступеней одинаковы и равны $v_e = 2400$ *м/сек*. Конструктивные характеристики первой и второй ступеней соответственно равны $s_1 = 4$, $s_2 = 5$ (см. задачу 45.38). Пренебрегая силой тяготения Земли и сопротивлением атмосферы, определить числа Циолковского для первой и второй субракет, при которых стартовый вес G_1 ракеты будет минимальный.

Ответ: $z_1 = 3{,}2$; $z_2 = 4$; $G_1 = 19{,}2$ *т*.

45.40. Используя данные предыдущей задачи, определить для каждой ступени вес топлива и сухой вес.

Указание. Использовать формулы ответа к задаче 45.38.

Ответ: $P_1 = 13{,}2$ *т*, $P_2 = 1{,}2$ *т*, $Q_1 = 4{,}4$ *т*, $Q_2 = 0{,}3$ *т*.

45.41. Четырехступенчатая ракета состоит из четырех ракет. Конструктивная характеристика s и эффективная скорость v_e у всех ракет одинаковы и равны $s = 4{,}7$, $v_e = 2{,}4$ *км/сек*. Каков должен быть стартовый вес ракеты, чтобы она грузу в 1 *т* сообщила скорость $v = 9000$ *м/сек*? (Воспользоваться формулами ответа к задаче 45.38.)

Ответ: 372 *т*.

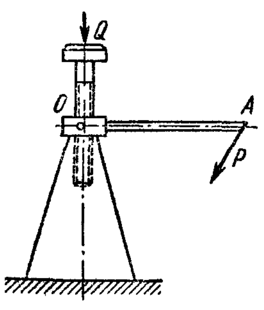
ГЛАВА XI
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

§ 46. Принцип возможных перемещений

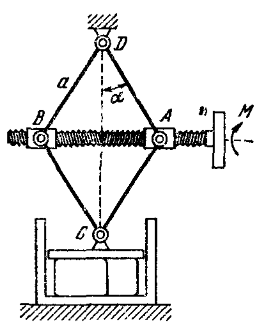
46.1 (903). Груз Q поднимается с помощью домкрата, который приводится в движение рукояткой $OA = 0{,}6$ *м*. К концу рукоятки, перпендикулярно к ней, приложена сила $P = 16$ *кГ*.

Определить величину груза Q, если шаг винта домкрата $h = 12$ *мм*.

Ответ: $Q = 5020$ *кГ*.



К задаче 46.1.



К задаче 46.2.

46.2 (904). На маховичок коленчатого пресса действует вращающий момент M; ось маховичка имеет на концах винтовые нарезки шага h противоположного направления и проходит через две гайки, шарнирно прикрепленные к двум вершинам стержневого ромба со стороною a; верхняя вершина ромба закреплена неподвижно, нижняя прикреплена к горизонтальной плите пресса.

Определить силу давления пресса на сжимаемый предмет в момент, когда угол при вершине ромба равен 2α.

Ответ: $P = \pi \frac{M}{h} \operatorname{ctg} \alpha$.

46.3 (905). Определить зависимость между модулями сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ в клиновом прессе, если сила $\boldsymbol{P}$ приложена к концу рукоятки длиною a

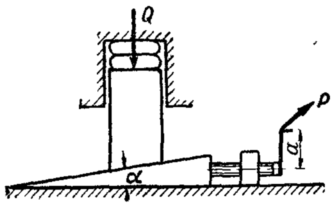
перпендикулярно к оси винта и рукоятки. Ход винта равен h. Угол при вершине клина равен α.

Ответ: $Q = P\frac{2\pi a}{h \operatorname{tg} \alpha}$.

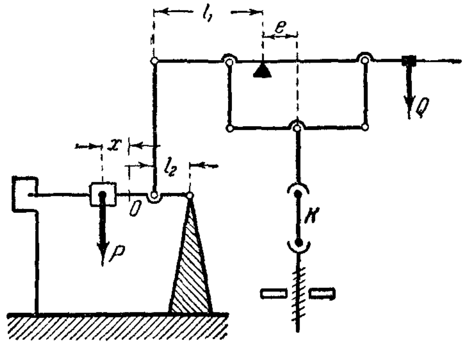
46.4 (907). Чертеж представляет схему машины для испытания образцов на растяжение.

Определить зависимость между усилием X в образце K и расстоянием x от груза P до его нулевого положения O, если при помощи груза Q машина уравновешена так, что при нулевом положении груза P и при отсутствии усилия в K все рычаги горизонтальны. Даны расстояния l_1, l_2 и e.

Ответ: $X = P\frac{xl_1}{el_2}$.



К задаче 46.3.

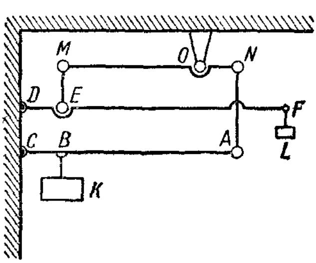


К задаче 46.4.

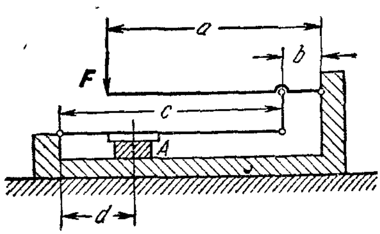
46.5 (908). Грузы K и L, соединенные системой рычагов, изображенных на чертеже, находятся в равновесии.

Определить зависимость между весами грузов, если дано: $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}$, $\frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}$, $\frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}$.

Ответ: $P_L = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{ON}{OM} \cdot \frac{DE}{DF} P_K = \frac{1}{300} P_K$.



К задаче 46.5.



К задаче 46.6.

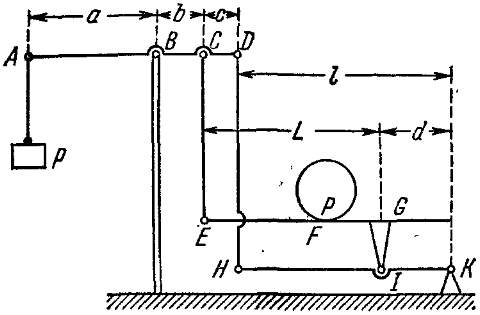
46.6. Определить модуль силы Q, сжимающей образец A, в рычажном прессе, изображенном на чертеже. Дано: $F = 100$ *н*, $a = 60$ *см*, $b = 10$ *см*, $c = 60$ *см*, $d = 20$ *см*.

Ответ: $Q = 1800$ *н*.

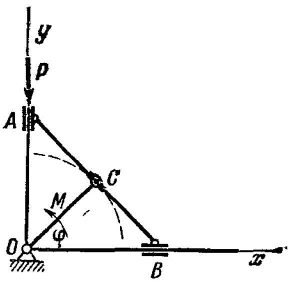
46.7 (909). На платформе в точке F находится груз весом P. Длина $AB=a$; $BC=b$; $CD=c$; $IK=d$; длина платформы $EG=L$.

Определить соотношение между длинами b, c, d и l, при котором вес p гири, уравновешивающий груз P, не зависит от положения его на платформе, и найти вес гири p в этом случае.

Ответ: $\frac{b+c}{b}=\frac{l}{d}$; $p=\frac{b}{a}P$.



К задаче 46.7.



К задаче 46.8.

46.8 (911). К ползуну A механизма эллипсографа приложена сила P, направленная вдоль направляющей ползуна к оси вращения O кривошипа OC.

Какой вращающий момент надо приложить к кривошипу OC для того, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип OC образует с направляющей ползуна угол φ?

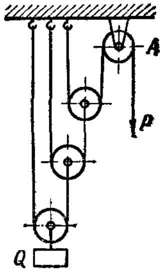
Механизм расположен в горизонтальной плоскости, причем $OC=AC=CB=l$.

Ответ: $M=2Pl\cos\varphi$.

46.9 (913). Полиспаст состоит из неподвижного блока A и из n подвижных блоков.

Определить в случае равновесия отношение поднимаемого груза Q к усилию P, прилагаемому к концу каната, сходящего с неподвижного блока A.

Ответ: $\frac{Q}{P}=2^n$.



К задаче 46.9.

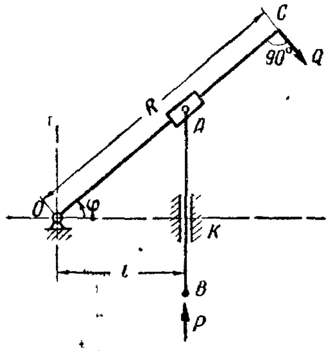
46.10 (915). В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг горизонтальной оси O ползун A, перемещаясь вдоль рычага OC, приводит в движение стержень AB, движущийся в вертикальных направляющих K. Даны размеры: $OC=R$, $OK=l$ (см. чертеж на стр. 352).

Какую силу Q надо приложить перпендикулярно к кривошипу OC в точке C для того, чтобы уравновесить силу P, направленную вдоль стержня AB вверх?

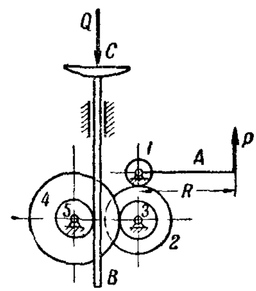
Ответ: $Q=\frac{Pl}{R\cos^2\varphi}$.

46.11 (916). В механизме домкрата при вращении рукоятки A длиной R начинают вращаться зубчатые колеса 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку B домкрата

Какую силу надо приложить перпендикулярно к рукоятке в конце ее для того, чтобы чашка C при равновесии домкрата развила давление, равное 480 *кГ*?



К задаче 46 10.



К задаче 46 11.

Радиусы зубчатых колес соответственно равны: $r_1 = 3$ *см*, $r_2 = 12$ *см*, $r_3 = 4$ *см*, $r_4 = 16$ *см*, $r_5 = 3$ *см*, длина рукоятки $R = 18$ *см.*

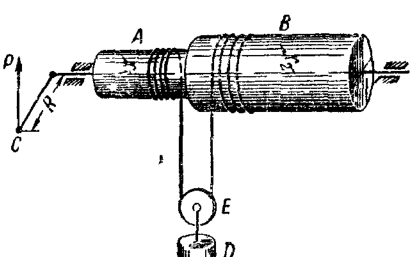
Ответ: $P = Q\dfrac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 5$ *кГ*.

46.12 (917). Дифференциальный ворот состоит из двух жестко связанных валов A и B, приводимых во вращение рукояткой C длиной R.

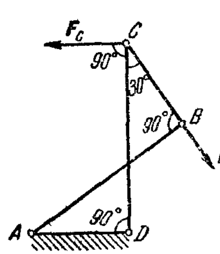
Поднимаемый груз D весом Q прикреплен к подвижному блоку E, охваченному канатом. При вращении рукоятки C левая ветвь каната сматывается с вала A радиуса r_1, а правая ветвь наматывается на вал B радиуса r_2 $(r_2 > r_1)$

Какую силу P надо приложить перпендикулярно к рукоятке в конце ее для того, чтобы уравновесить груз D, если $Q = 720$ *кГ*, $r_1 = 10$ *см*, $r_2 = 12$ *см* и $R = 60$ *см*?

Ответ: $P = Q\dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 12$ *кГ*.



К задаче 46 12.



К задаче 46 13.

46.13. В механизме антипараллелограмма $ABCD$ звенья AB, CD и BC соединены цилиндрическими шарнирами B и C, а цилиндрическими шарнирами A и D прикреплены к стойке AD. К звену CD в шарнире C приложена горизонтальная сила F_C.

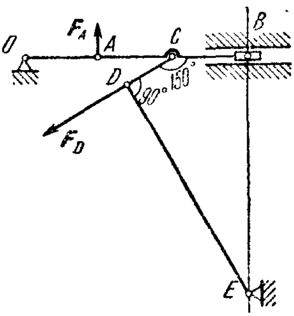
Определить модуль силы F_B, приложенной в шарнире B перпендикулярно к звену AB, если механизм находится в равновесии в положении, указанном на чертеже. Дано: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle DCB = 30°$.

Ответ: $F_B = 2F_C$.

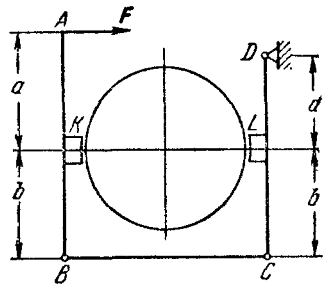
46.14. Кривошипно-шатунный механизм OAB связан в середине шатуна AB цилиндрическим шарниром C со стержнем CD. Стержни CD и DE соединены цилиндрическим шарниром D.

Определить зависимость между модулями сил F_A и F_D, соответственно перпендикулярными к стержням OA и DE, при равновесии механизма в положении, указанном на чертеже. Дано: $\angle DCB = 150°$, $\angle CDE = 90°$.

Ответ: $F_D = 4F_A$.



К задаче 46.14.



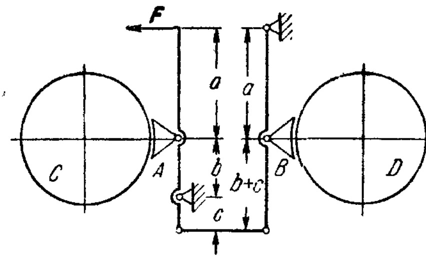
К задаче 46.15.

46.15. Колодочно-бандажный тормоз вагона трамвая состоит из трех тяг AB, BC и CD, соединенных шарнирами B и C. При действии горизонтальной силы F тормозные колодки K и L, соответственно прикрепленные к тягам AB и CD, прижимаются к колесу.

Определить давления N_K и N_L колодок на колесо. Размеры указаны на чертеже. Вагон находится в покое.

Ответ: $N_K = F\dfrac{a+b}{b}$,

$$N_L = F\frac{a}{b}\,\frac{b+d}{d}.$$



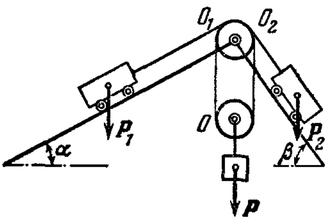
К задаче 46.16.

46.16. На чертеже изображена схема колодочно-бандажного тормоза вагона трамвая.

Определить зависимость между a, b и c, при наличии которой колодки A и B под действием силы F прижимаются с одинаковыми по модулю силами к бандажам колес C и D. Найти также величину этой силы. Колеса считать неподвижными.

Ответ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b+c}{c}$; $\quad Q = F\dfrac{a+b}{2b}$.

46.17 (920). Найти веса P_1 и P_2 двух грузов, удерживаемых в равновесии грузом весом P на плоскостях, наклоненных к горизонту под углами α и β, если грузы P_1 и P_2 прикреплены к концам троса, идущего от груза P_1 через блок O_1, насаженный на горизонтальную ось, к подвижному блоку O, несущему груз P, и затем через блок O_2, насаженный на ось блока O_1, к грузу P_2. Блоки O_1 и O_2 соосные.



К задаче 46.17.

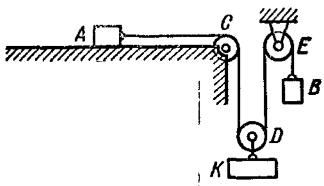
Трением, а также массами блоков и троса пренебречь.

Ответ: $P_1=\frac{P}{2\sin\alpha}$; $\quad P_2=\frac{P}{2\sin\beta}$.

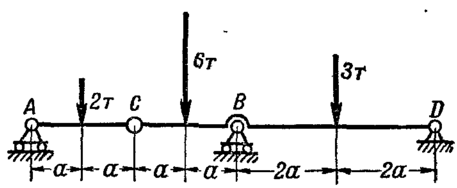
46.18 (921). К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны грузы A и B одинакового веса. От груза A нить проходит параллельно горизонтальной плоскости, огибает неподвижный блок C, охватывает подвижный блок D, затем огибает неподвижный блок E, где к другому концу нити привязан груз B. К оси подвижного блока D подвешен груз K весом Q.

Определить вес P каждого из грузов A и B и коэффициент трения скольжения f груза A о горизонтальную плоскость, если система грузов находится в покое.

Ответ: $P=Q/2$; $f=1$.



К задаче 46.18.



К задаче 46.19.

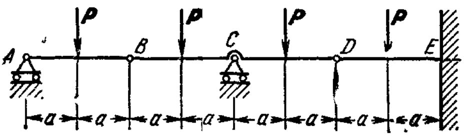
46.19 (922). Составная балка AD, лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке C. На балку действуют вертикально силы, равные 2 *т*, 6 *т* и 3 *т*. Размеры указаны на чертеже.

Определить реакции опор A, B и D.

Ответ: $R_A=1$ *т*; $R_B=10{,}5$ *т*; $R_D=-0{,}5$ *т*.

46.20 (923). Определить вращающий момент, который надо приложить на участке BD к балке AD, рассмотренной в предыдущей задаче, для того, чтобы опорная реакция в D равнялась нулю.

Ответ: $M=2a$ *тм*.



К задаче 46.21.

46.21. Составная балка AE, лежащая на двух опорах A и C, состоит из трех балок AB, BD и DE, шарнирно соединенных в B и D. Балка DE в сечении E защемлена в стене.

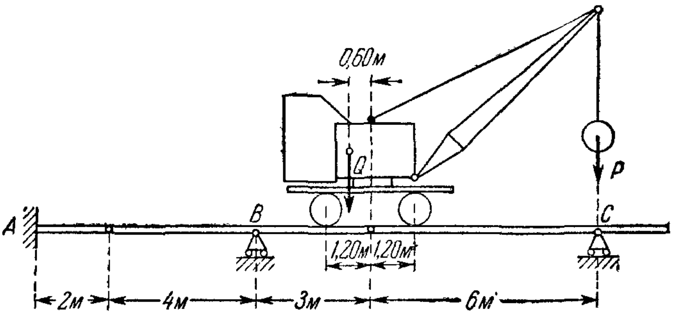
Определить вертикальную составляющую реакции в сечении E. К балкам приложены четыре равные вертикальные силы $\boldsymbol{P}$. Размеры указаны на чертеже.

Ответ: $R = 0{,}5P$.

46.22. Определить момент m_E пары, возникающей в заделке балки DE, рассмотренной в предыдущей задаче.

Ответ: $m_E = 0$.

46.23. Железнодорожный кран опирается на рельсы, укрепленные на двух горизонтальных двухпролетных балках с промежуточными шарнирами. Кран несет груз $P = 3$ *т*, вес крана $Q = 16$ *т*.

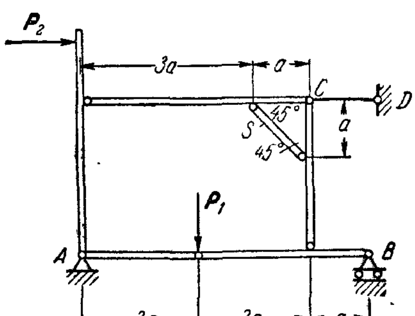


К задаче 46.23.

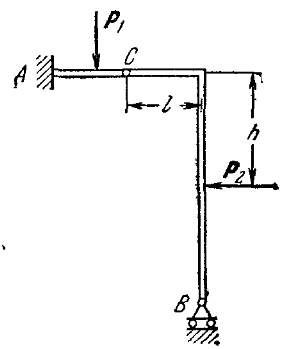
Определить момент реактивной пары в заделке в положении крана, указанном на чертеже.

Ответ: $M_A = -\frac{1}{2}(1{,}95Q + 3{,}60P) = -21$ *тм*.

46.24. Конструкция лесов прямоугольного резервуара состоит из деревянных замкнутых рам, брусья которых шарнирно связаны между



К задаче 46.24.



К задаче 46.25.

собой. Неподвижность рамы обеспечивается двумя цилиндрическими опорами A и B и стержнем CD.

Определить усилие S в подкосе при действии сил $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$.

Ответ: $S = 12P_1\sqrt{2}$.

46.25. Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами C. Верхние концы рам жестко защемлены в бетонную стену, нижние — опираются на цилиндрические подвижные опоры (см. чертеж на стр. 355). Определить вертикальную реакцию защемления при действии сил P_1 и P_2.

Ответ: $Y_A = P_1 - P_2 \frac{h}{l}$.

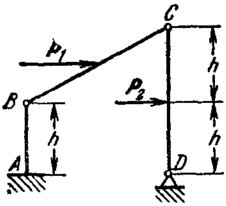
46.26. Две балки BC и CD шарнирно соединены в C, цилиндрическим шарниром B прикреплены к вертикальной стойке AB, защемленной в сечении A, а цилиндрическим шарниром D соединены с полом. К балкам приложены горизонтальные силы P_1 и P_2.

Определить горизонтальную составляющую реакции в сечении A. Размеры указаны на чертеже.

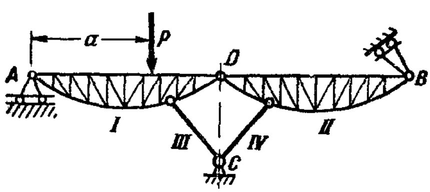
Ответ: $R = P_1 + \frac{1}{2} P_2$.

46.27. Определить момент m_A реактивной пары, возникающей в заделке A стойки AB, рассмотренной в предыдущей задаче.

Ответ: $m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2} P_2\right) h$.



К задаче 46 26.



К задаче 46 28.

46.28 (924). Две фермы I и II, соединенные шарниром D, прикреплены стержнями III и IV с помощью шарнира C к земле; в точках A и B они имеют опоры на катках. Ферма I нагружена вертикальной силой P на расстоянии a от опоры A.

Найти реакцию катка B.

Указание. Предварительно определить положение мгновенных центров скоростей C_1 и C_2 ферм I и II.

Ответ: $R_B = P \frac{a}{b} \frac{DC_2}{DC_1}$, где b — плечо реакции R_B относительно мгновенного центра C_2. Реакция R_B направлена перпендикулярно к плоскости скольжения катка B слева направо вниз.

§ 47. Общее уравнение динамики *)

47.1 (925). Три груза весом P каждый соединены невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный невесомый

*) Задачи, отмеченные звездочкой, рекомендуется решить также при помощи уравнений Лагранжа.

блок A. Два груза лежат на гладкой горизонтальной плоскости, а третий груз подвешен вертикально.

Определить ускорение системы и натяжение нити в сечении ab.

Ответ: $w=\frac{1}{3}g$; $T=\frac{1}{3}P$.

47.2. Решить предыдущую задачу с учетом массы блока, считая, что при движении грузов блок A вращается вокруг неподвижной оси. Вес блока — сплошного однородного диска — равен $2P$.

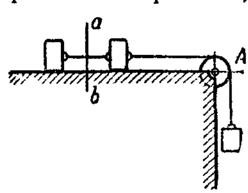
Ответ: $w=\frac{1}{4}g$; $T=\frac{1}{4}P$.

47.3 (928). Два груза, M_1 весом P_1 и M_2 весом P_2, подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые навернуты, как указано на чертеже, на барабаны, имеющие радиусы r_1 и r_2 и насаженные на общую ось; грузы движутся под влиянием силы тяжести.

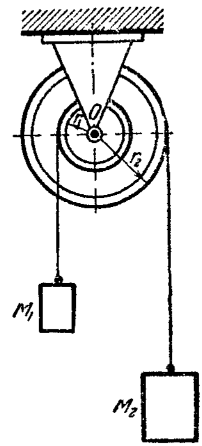
Определить угловое ускорение ε барабанов, пренебрегая их массами и массой нитей.

Ответ:

$$\varepsilon=g\,\frac{P_2r_2-P_1r_1}{P_1r_1^2+P_2r_2^2}.$$



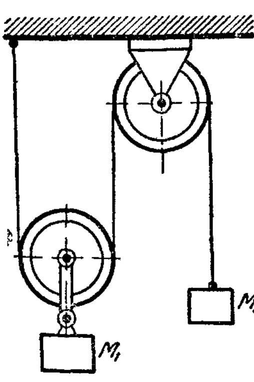
К задаче 47.1.



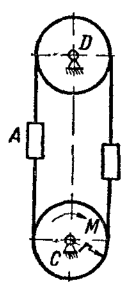
К задаче 47.3.

47.4 (929). При условии предыдущей задачи определить угловое ускорение ε и натяжения T_1 и T_2 нитей, принимая во внимание массы барабанов, при следующих данных: $P_1=20$ *кГ*, $P_2=34$ *кГ*, $r_1=5$ *см*, $r_2=10$ *см*; веса барабанов: малого 4 *кГ* и большого 8 *кГ*. Массы барабанов считать равномерно распределенными по их внешним поверхностям.

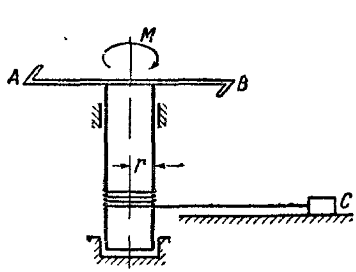
Ответ: $\varepsilon=49$ *сек*$^{-2}$; $T_1=25$ *кГ*; $T_2=17$ *кГ*.



К задаче 47.5.



К задаче 47.6.



К задаче 47.7.

47.5 (930). К системе блоков, изображенной на чертеже, подвешены грузы: M_1 весом 10 *н* и M_2 весом 8 *н*.

Определить ускорение w_2 груза M_2 и натяжение нити, пренебрегая массами блоков.

Ответ: $w_2 = 2{,}8$ *м/сек*^{2}; $T = 5{,}7$ *н*.

47.6 (932). К нижнему шкиву C подъемника приложен вращающий момент M (см. чертеж на стр. 357).

Определить ускорение груза A весом P_1, поднимаемого вверх, если вес противовеса B равен P_2, а шкивы C и D радиуса r и весом Q каждый представляют собой однородные цилиндры. Массой ремня пренебречь.

Ответ: $w = g\dfrac{M + (P_2 - P_1)r}{(P_1 + P_2 + Q)r}$.

47.7 (933). Вал кабестана — механизма для передвижения грузов — радиуса r приводится в движение постоянным вращающим моментом M, приложенным к рукоятке AB (см. чертеж на стр. 357).

Определить ускорение груза C весом P, если коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную плоскость равен f. Массой каната и кабестана пренебречь.

Ответ: $w = g\dfrac{M - fPr}{Pr}$.

47.8. Решить предыдущую задачу с учетом массы кабестана, момент инерции которого относительно оси вращения равен J.

Ответ: $w = g\dfrac{r(M - fPr)}{gJ + Pr^2}$.

47.9 (934). Груз A весом P, спускаясь по наклонной гладкой плоскости, расположенной под углом α к горизонту, приводит во вращение посредством невесомой и нерастяжимой нити барабан B весом Q и радиуса r.

Определить угловое ускорение барабана, если считать барабан однородным круглым цилиндром. Массой неподвижного блока C пренебречь.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{2Pg\sin\alpha}{r(2P + Q)}$.

47.10. Человек толкает тележку, приложив к ней горизонтальную силу F.

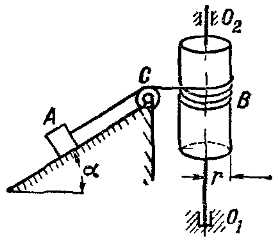
Определить ускорение кузова тележки, если вес кузова равен P_1, P_2 — вес каждого из четырех колес, r — радиус колес, f_k — коэффициент трения качения. Колеса считать сплошными круглыми дисками, катящимися по рельсам без скольжения.

Ответ: $w = g\dfrac{F - \dfrac{f_k}{r}(P_1 + 4P_2)}{P_1 + 6P_2}$.

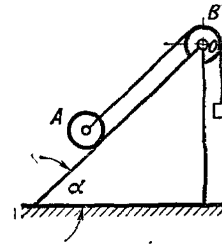
47.11 (941). Каток A весом Q, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок B, груз C весом P. При этом блок B вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к его плоскости. Каток A и блок B — однородные круглые диски одинакового веса и радиуса. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом.

Определить ускорение оси катка.

Ответ: $w = g\dfrac{Q\sin\alpha - P}{2Q+P}$.



К задаче 47.9.



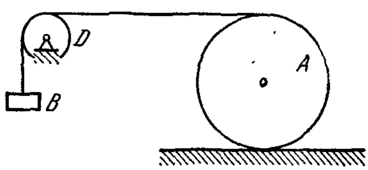
К задаче 47.11.

47.12. Груз B весом P приводит в движение цилиндрический каток A весом Q и радиуса r при помощи нити, намотанной на каток.

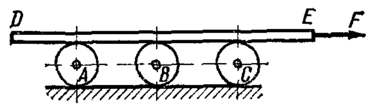
Определить ускорение груза B, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен f_k. Массой блока D пренебречь.

Ответ: $w = 8g\dfrac{P - \dfrac{f_k}{2r}Q}{3Q+8P}$.

47.13 (940). Стержень DE весом Q лежит на трех катках A, B и C весом P каждый. К стержню приложена по горизонтали вправо сила F, приводящая в движение стержень и катки. Скольжение между стержнем и катками, и также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует.



К задаче 47.12.



К задаче 47.13.

Найти ускорение стержня DE. Катки считать однородными круглыми цилиндрами.

Ответ: $w = \dfrac{8gF}{8Q+9P}$.

47.14. Определить ускорение груза M_2, рассмотренного в задаче 47.5, с учетом массы блоков — сплошных однородных дисков весом 4 *н* каждый.

Ответ: $w_2 = 0{,}7$ *м/сек*^{2}.

47.15 (942). Груз A весом P, опускаясь вниз, посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный невесомый блок D и намотанной на шкив B, заставляет вал C катиться без скольжения по горизонтальному рельсу. Шкив B радиуса R

жестко насажен на вал C радиуса r; их общий вес равен Q, а радиус инерции относительно оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, равен ρ.

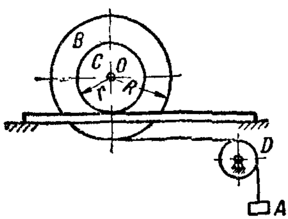
Найти ускорение груза A.

Ответ: $w = g\dfrac{P(R-r)^2}{P(R-r)^2 + Q(\rho^2 + r^2)}$.

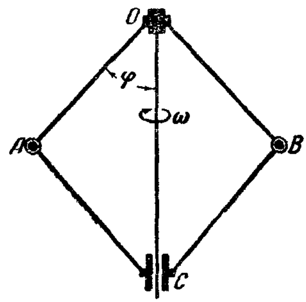
47.16 (935). Центробежный регулятор вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.

Определить угол отклонения ручек OA и OB от вертикали, принимая во внимание только вес p каждого из шаров и вес p_1 муфты C; все стержни имеют одинаковую длину l.

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{(p+p_1)g}{pl\omega^2}$.



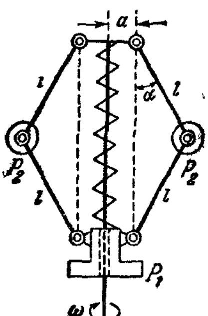
К задаче 47.15.



К задаче 47.16.

47.17 (937). Центробежный регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Найти зависимость между угловой скоростью регулятора и углом α отклонения его стержней от вертикали, если муфта весом P_1 отжимается вниз пружиной, находящейся при $\alpha = 0$ в недеформированном состоянии и закрепленной верхним концом на оси регулятора; веса шаров равны P_2, длина стержней равна l; оси подвеса стержней отстоят от оси регулятора на расстоянии a; весами стержней и пружин пренебречь. Коэффициент жесткости пружины равен c.



К задаче 47.17.

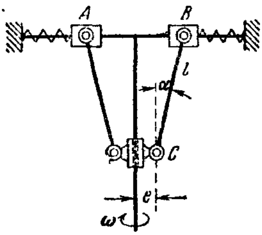
Ответ: $\omega^2 = g\dfrac{P_1 + P_2 + 2lc(1-\cos\alpha)}{P_2(a + l\sin\alpha)}\operatorname{tg}\alpha$.

47.18 (938). Центробежный пружинный регулятор состоит из двух грузов A и B весом $P_A = P_B = 15$ *кГ*, насаженных на скрепленный со шпинделем регулятора гладкий горизонтальный стержень муфты C весом $P_C = 10$ *кГ*, тяг длиной $l = 25$ *см* и пружин, отжимающих грузы к оси вращения; расстояние шарниров тяг от оси шпинделя $e = 3$ *см*; коэффициент жесткости пружин $c = 15$ *кГ/см*.

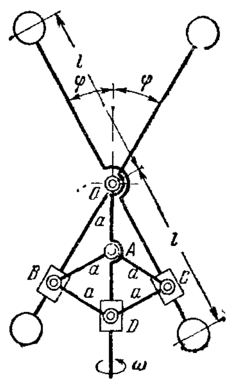
Определить угловую скорость регулятора при угле раствора $\alpha = 60^\circ$, если при угле $\alpha_0 = 30^\circ$ пружины находятся в ненапряженном состоянии; весом тяг и трением пренебречь.

Ответ: $n = 188$ *об/мин*.

47.19 (939). В регуляторе четыре груза одинакового веса P находятся на концах двух равноплечих рычагов длиной $2l$, которые могут вращаться в плоскости регулятора вокруг конца шпинделя O и образуют с осью шпинделя переменный угол φ. В точке A, находящейся от конца шпинделя O на расстоянии $OA = a$, со шпинделем шарнирно соединены рычаги AB и AC длиной a, которые в точках B и C в свою очередь сочленены со стержнями BD и CD длиной a, несущими муфту D. В точках B и C имеются



К задаче 47.18.



К задаче 47 19.

ползунки, скользящие вдоль рычагов, несущих грузы. Вес муфты равен Q. Регулятор вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Найти связь между углом φ и угловой скоростью ω в равновесном положении регулятора.

Ответ: Равновесное положение регулятора возможно только при $\omega = \sqrt{\frac{2gQa}{Pl^2}}$ независимо от угла φ.

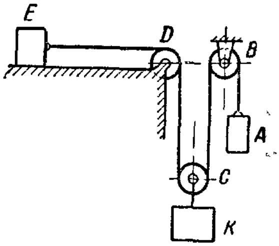
47.20 * (943). Однородная нить, к концу которой привязан груз A весом P, огибает неподвижный блок B, охватывает подвижный блок C, поднимается вверх на неподвижный блок D и проходит параллельно горизонтальной плоскости, где к ее концу привязан груз E весом P. К оси блока C прикреплен груз K весом Q. Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f (см. чертеж на стр. 362). При каком условии груз K будет опускаться вниз, если начальные скорости всех грузов равнялись нулю? Найти ускорение груза K. Массами блоков и нити пренебречь.

Ответ: $Q > P(1+f)$; $w = g\frac{Q - P(1+f)}{Q+2P}$.

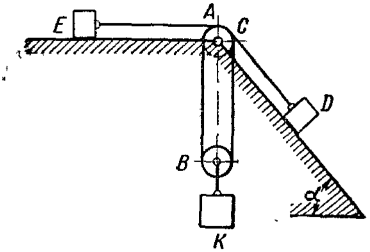
47.21* (944). Два груза D и E весом P каждый привязаны к концам нерастяжимой и невесомой нити. Эта нить от груза E идет через неподвижный блок A, затем охватывает подвижный блок B, возвращается вверх на неподвижный блок C, соосный с блоком A, проходит параллельно гладкой наклонной плоскости, где к концу нити привязан груз D. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. К подвижному блоку B прикреплен груз K весом Q. Коэффициент трения скольжения груза E о горизонтальную плоскость равен f. Массами блоков пренебречь.

Выяснить условие, при котором груз K будет опускаться. Найти ускорение этого груза. В начальный момент скорости всех грузов равнялись нулю.

Ответ: $Q > P(f + \sin\alpha)$; $w = g\dfrac{Q - P(f + \sin\alpha)}{Q + 2P}$.



К задаче 47.20.

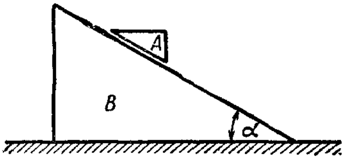


К задаче 47.21.

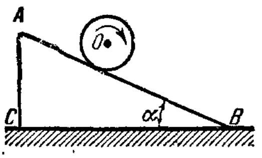
47.22* (945). Призма A весом P скользит по гладкой боковой грани призмы B весом Q, образующей угол α с горизонтом.

Определить ускорение призмы B. Трением между призмой B и горизонтальной плоскостью пренебречь.

Ответ: $w = g\dfrac{P\sin 2\alpha}{2(Q + P\sin^2\alpha)}$.



К задаче 47.22.



К задаче 47.23.

47.23* (1120). На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC весом P, которая может скользить без трения по этой плоскости; по грани призмы AB катится без скольжения однородный круглый цилиндр весом Q.

Определить ускорение призмы.

Ответ: Ускорение направлено влево и равно

$$\frac{Q\sin 2\alpha}{3(P + Q) - 2Q\cos^2\alpha}g.$$

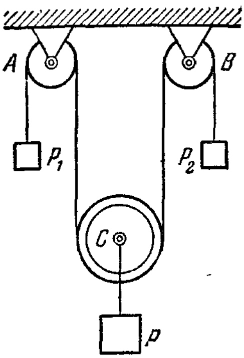
47.24* (946). Через блоки A и B с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок C; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок C нагружен гирей весом $P = 4$ *н*, к концам шнура прикреплены грузы весом $P_1 = 2$ *н* и $P_2 = 3$ *н*. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура и трением на осях.

Ответ: $w = \frac{1}{11}g$ (вверх); $w_1 = \frac{1}{11}g$ (вверх); $w_2 = \frac{3}{11}g$ (вниз).

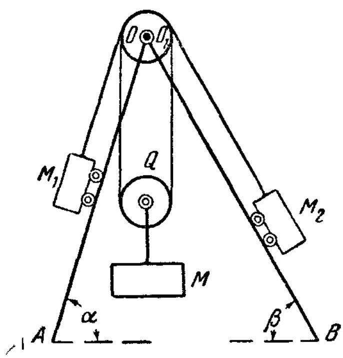
47.25* (947). Грузы M_1 и M_2 одинакового веса p движутся по двум наклонным направляющим OA и OB, расположенным в вертикальной плоскости под углами α и β к горизонту; нить, соединяющая эти грузы, идет от груза M_1 через блок O, вращающийся около горизонтальной оси, охватывает подвижный шкив Q, несущий груз M весом P, и затем через блок O_1, надетый на ту же ось, что и блок O, идет к грузу M_2. Блоки O_1 и O соосные.

Определить ускорение w груза M, пренебрегая трением, а также массами блока, шкива и нити.

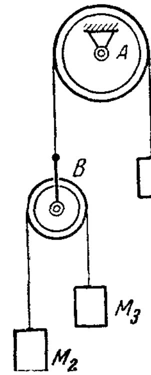
Ответ: $w = g\dfrac{P - p(\sin\alpha + \sin\beta)}{P + 2p}$.



К задаче 47.24.



К задаче 47.25.



К задаче 47.27.

47.26*. Решить предыдущую задачу, заменив грузы M_1 и M_2 катками весом P и радиуса r каждый. Катки считать сплошными однородными круглыми дисками. Коэффициент трения качения катков о наклонные плоскости равен f_k. Нити закреплены на осях катков.

Ответ: $w = g\dfrac{P - p\left[\sin\alpha + \sin\beta + \dfrac{f_k}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}{P + 3p}$.

47.27* (948). Дана система из двух блоков, неподвижного A и подвижного B, и трех грузов M_1, M_2 и M_3, подвешенных с помощью нерастяжимых нитей, как указано на чертеже. Массы грузов соответственно равны m_1, m_2 и m_3; при этом $m_1 < m_2 + m_3$ и $m_2 \gtrless m_3$. Массами блоков пренебрегаем.

Найти, при каком соотношении масс m_1, m_2 и m_3 груз M_1 будет опускаться в том случае, когда начальные скорости грузов равны нулю.

Ответ: Должно быть $m_1 > \dfrac{4m_2m_3}{m_2 + m_3}$.

47.28*. При наезде крановой тележки A на упругий упор B начинаются колебания подвешенного на невесомом стержне груза D.

Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы, если m_1 — масса тележки, m_2 — масса груза, l — длина стержня, c — коэффициент жесткости пружины упора B. Массой колес и всеми силами сопротивления пренебречь. Начало отсчета оси x взять в левом конце недеформированной пружины.

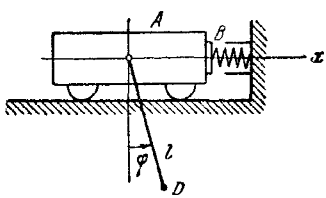
Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=-cx$; $\ddot{x}\cos\varphi+$ $+l\ddot{\varphi}=-g\sin\varphi$.

47.29*. Использовав ответ предыдущей задачи, определить период малых колебаний груза при отсутствии упора B.

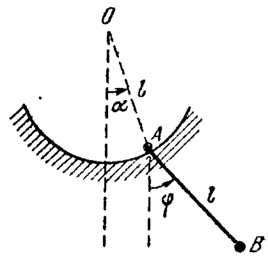
Указание. Пренебречь членом, содержащим множитель $\dot{\varphi}^2$, считать $c=0$, $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

47.30*. Точечная масса A весом P_1 движется в вертикальной плоскости по внутренней гладкой поверхности неподвижного цилиндра радиуса l. Точечная масса B весом P_2, присоединенная к массе A



К задаче 47 28.



К задаче 47 30.

посредством невесомого стержня AB длиной l, может колебаться вокруг оси A, перпендикулярной к плоскости чертежа. Положения масс A и B определены с помощью углов α и φ, отсчитываемых от вертикали.

Составить дифференциальные уравнения движения материальной системы, состоящей из точек A и B, соединенных невесомым стержнем AB.

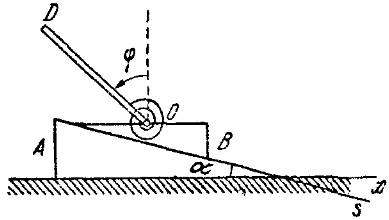
Ответ: $(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=$ $=-(P_1+P_2)\sin\alpha$, $l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)+l\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)=-g\sin\varphi$, где $m_1=\dfrac{P_1}{g}$, $m_2=\dfrac{P_2}{g}$.

47.31*. Использовав ответ предыдущей задачи, написать дифференциальные уравнения малых колебаний рассматриваемой материальной системы.

Указание. Пренебречь членами, содержащими множители $\dot{\varphi}^2$ и $\dot{\alpha}^2$, а также считать $\sin(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$.

Ответ: $(m_1+m_2)l\ddot{\alpha}+m_2l\ddot{\varphi}=-(P_1+P_2)\alpha$, $l\ddot{\varphi}+l\ddot{\alpha}=-g\varphi$, где $m_1=\dfrac{P_1}{g}$, $m_2=\dfrac{P_2}{g}$.

47.32*. По неподвижной призме A, расположенной под углом α к горизонту, скользит призма B весом P_2. К призме B, посредством цилиндрического шарнира O и спиральной пружины с коэффициентом жесткости c, присоединен тонкий однородный стержень OD весом P_1 и длиной l. Стержень совершает колебания вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа. Положения призмы B и стержня OD определены посредством координат s и φ.



К задаче 47.32.

Написать дифференциальные уравнения движения материальной системы, состоящей из призмы B и стержня OD, пренебрегая силами трения.

Ответ: $(m_1+m_2)\ddot{s}+\frac{1}{2}m_1 l\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha)-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\alpha)=$ $=(P_1+P_2)\sin\alpha$, $\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{s}\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}P_1 l\sin\varphi-c\varphi$, где $m_1=\frac{P_1}{g}$, $m_2=\frac{P_2}{g}$.

47.33*. Воспользовавшись ответом к предыдущей задаче, определить период малых колебаний стержня OD, если $P_1 l\cos^2\alpha<2c$.

Указание. Считать $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos(\varphi+\alpha)\approx\cos\alpha-\varphi\sin\alpha$, затем пренебречь членами, содержащими множители $\dot{\varphi}^2$ и $\varphi\cdot\ddot{\varphi}$.

Ответ: $T=2\pi l\sqrt{\frac{m_1[m_1(1+3\sin^2\alpha)+4m_2]}{6(m_1+m_2)(2c-P_1 l\cos^2\alpha)}}$.

47.34*. Решить задачу 47.32, считая, что призма A весом P_3 движется по гладкой горизонтальной плоскости, а ее положение определяется координатой x.

Ответ: $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}\cos\alpha+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-$

$$-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi=0,$$

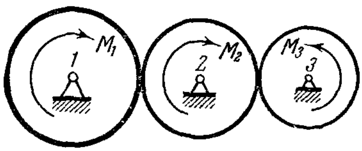
$(m_1+m_2)\ddot{x}\cos\alpha+(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\alpha)-m_1\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\times$ $\times\cos(\varphi+\alpha)=(P_1+P_2)\sin\alpha$, $\frac{1}{3}m_1 l^2\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{x}\cos\varphi-\frac{1}{2}m_1 l\ddot{s}\times$ $\times\cos(\varphi+\alpha)=\frac{1}{2}P_1 l\sin\varphi-c\varphi$, где $m_1=\frac{P_1}{g}$, $m_2=\frac{P_2}{g}$, $m_3=\frac{P_3}{g}$.

§ 48. Уравнения Лагранжа 2-го рода

48.1 (1179). Передача вращения между двумя взаимно перпендикулярными и пересекающимися валами осуществляется двумя коническими зубчатыми колесами, имеющими соответственно z_1 и z_2 зубцов; моменты инерции валов с насаженными на них колесами соответственно равны J_1 и J_2. Определить угловое ускорение первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а на другой вал — момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.

Ответ: $\varepsilon_1=\frac{M_1-kM_2}{J_1+k^2J_2}$, где $k=\frac{z_1}{z_2}$.

48.2 (1180). В зацеплении, показанном на чертеже, колесо *1* приводится в движение моментом M_1, к колесу *2* приложен момент сопротивления M_2 и к колесу *3* — момент сопротивления M_3. Найти угловое ускорение первого колеса, считая колеса однородными дисками, массы которых m_1, m_2, m_3 и радиусы которых r_1, r_2, r_3.



К задаче 48.2.

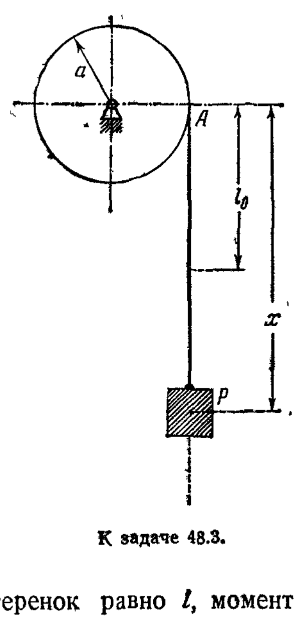
Ответ:
$$\varepsilon_1 = \frac{2\left(M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_3} M_3\right)}{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}.$$

48.3 (1181). Определить движение груза весом P, висящего на однородном тросе весом P_1 и длиной l; трос навернут на барабан радиуса a и весом P_2; ось вращения горизонтальна; трением пренебрегаем; массу барабана считаем равномерно распределенной по его ободу. В начальный момент $t = 0$ система находилась в покое; длина свисавшей части троса l_0.

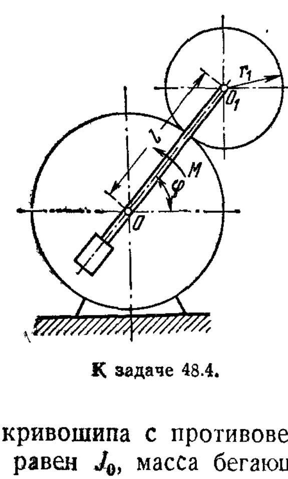
Указание. Пренебречь размерами барабана по сравнению с длиной свешивающейся части троса.

Ответ: $x = -\frac{Pl}{P_1} + \left(l_0 + \frac{Pl}{P_1}\right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{P_1 g}{(P + P_1 + P_2) l}}\, t.$

48.4 (1183). В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса r_1 насажена на кривошип с противовесом, вращающейся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента M. Определить угловое ускорение вращения кривошипа и окружное усилие S в точке касания шестеренок, если расстояние между осями



К задаче 48.3.



К задаче 48.4.

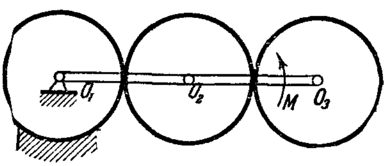
шестеренок равно l, момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен J_0, масса бегающей шестеренки m_1, момент инерции шестеренки относительно ее оси J_1;

трением пренебречь; центр тяжести шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.

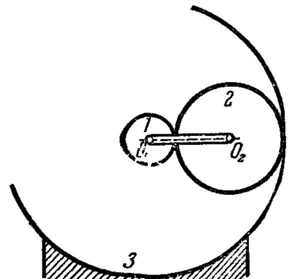
Ответ: $\varepsilon = \dfrac{M}{J_0 + m_1 l^2 + J_1 \dfrac{l^2}{r_1^2}}$; $S = \dfrac{J_1 l}{r_1^2}\varepsilon$.

48.5 (1184). В планетарном механизме колесо с осью O_1 неподвижно; к рукоятке O_1O_3 приложен вращающий момент M; механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение рукоятки, считая колеса однородными дисками с одинаковыми массами m и радиусами r и пренебрегая массой рукоятки.

Ответ: $\varepsilon_1 = \dfrac{M}{22mr^2}$.



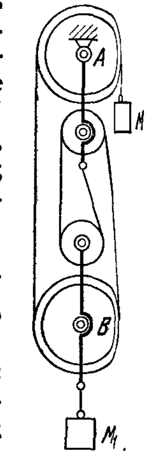
К задаче 48.5.



К задаче 48.6.

48.6 (1185). В зацеплении, показанном на чертеже, колесо 2, приводимое в движение рукояткой O_1O_2, катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного колеса 3 и приводит во вращение вокруг неподвижной оси O_1 колесо 1. Известно, что колесо 1 вращается в 10 раз быстрее рукоятки. Считая колеса однородными дисками одинаковой толщины и из одного и того же материала, найти угловое ускорение рукоятки в предположении, что к колесу 1 приложен постоянный момент сопротивления M_1, а к рукоятке — постоянный вращающий момент M; механизм расположен в горизонтальной плоскости; массой рукоятки пренебречь.

Ответ: Угловое ускорение рукоятки $\varepsilon = \dfrac{M - 10M_1}{1300J}$, где J — момент инерции колеса 1 относительно его оси вращения.



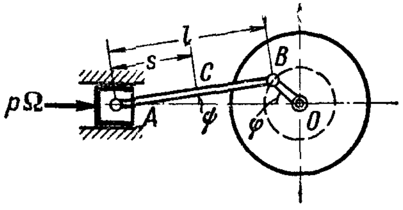
К задаче 48.7.

48.7 (1189). Груз M, весящий 101 *кГ*, поднимает с помощью полиспаста груз M_1, который вместе с подвижной обоймой весит 320 *кГ*. Всех блоков четыре; большие блоки весят по 16 *кГ*, малые — по 8 *кГ*, радиусы больших блоков равны r, радиусы малых равны r_1. Определить ускорение груза M.

При определении энергии блоков **предполагаем, что массы их** равномерно распределены по окружности.

Ответ: 0,1 g.

48.8 (1190). Кривошипный механизм состоит из поршня массой m_1, шатуна AB массой m_2, кривошипа OB, вала и махового колеса; J_2 — момент инерции шатуна относительно его центра масс C; J_3 — момент инерции кривошипа OB, вала и махового колеса относительно оси; Ω — площадь поршня; p — давление, действующее на поршень; l — длина шатуна; s — расстояние между точкой A и центром тяжести шатуна; r — длина кривошипа OB; M — момент сопротивления, действующий на вал. Составить уравнения движения механизма, считая угол поворота шатуна ψ малым, т. е. полагая $\sin\psi = \psi$ и $\cos\psi = 1$; в качестве обобщенной координаты взять угол поворота кривошипа φ. Механизм расположен в горизонтальной плоскости.

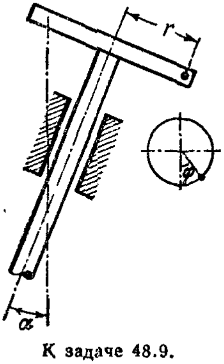


К задаче 48.8.

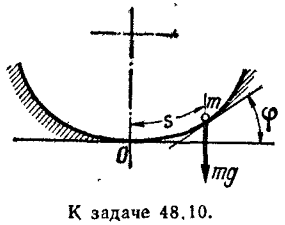
Ответ: $\left[(m_1 + m_2) r^2 \sin^2\varphi + (J_2 + ms^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2\varphi + J_3\right]\ddot{\varphi} +$
$$+ \left[(m_1 + m_2) r^2 - (J_2 + ms^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right] \cos\varphi \sin\varphi\dot{\varphi}^2 = -M + p\Omega r \sin\varphi.$$

48.9 (1191). В машине для статического уравновешивания подшипники наклонены под углом α к вертикали. Ротор, помещенный в подшипник, имеет момент инерции J (относительно своей оси) и несет неуравновешенную массу m на расстоянии r от оси. Написать дифференциальное уравнение движения ротора и определить частоту малых колебаний около положения равновесия.

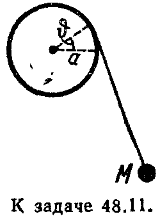
Ответ: $(mr^2 + J)\ddot{\varphi} + mgr \sin\alpha \sin\varphi = 0$, $k = \sqrt{\frac{mgr \sin\alpha}{mr^2 + J}}$, где φ — угол поворота ротора.



К задаче 48.9.



К задаче 48.10.



К задаче 48.11.

48.10 (1192). Материальная точка с массой m движется под влиянием силы тяжести по циклоидальной направляющей, заданной уравнением $s = 4a \sin\varphi$, где s — дуга, отсчитываемая от точки O, а φ — угол касательной к циклоиде с горизонтальной осью. Определить движение точки.

Ответ: $s = A \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t + \varphi_0\right)$, где A и φ_0 — постоянные интегрирования.

48.11 (1193). Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m, подвешенной на нити, навернутой на неподвижный цилиндр радиуса r. Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l. Массой нити пренебречь.

Ответ: $(l+r\vartheta)\ddot{\vartheta}+r\dot{\vartheta}^2+g\sin\vartheta=0$, где ϑ — угол отклонения маятника от вертикали.

48.12 (1194). Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки массы m, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l=l(t)$.

Ответ: $\ddot{\varphi}+2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$, где φ — угол отклонения нити от вертикали.

48.13 (1195). Найти в предыдущей задаче движение маятника для случая малых колебаний при равномерном удлинении нити по закону

$$l(t)=l_0+ct.$$

Указание. Взять $l(t)$ за независимую переменную.

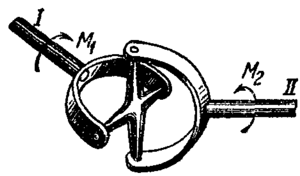
Ответ: $$\varphi=\frac{1}{\sqrt{l(t)}}\left[C_1J_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right)+C_2Y_1\left(2\sqrt{\frac{g}{c^2}l(t)}\right)\right],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, J_1, Y_1 — функции Бесселя и Неймана 1-го порядка.

48.14 (1196). Точка подвеса маятника, состоящего из материальной точки массы m, висящей на нерастяжимой нити длиной l, движется по заданному закону $\xi=\xi_0(t)$ по наклонной прямой, образующей угол α с горизонтом. Составить уравнение движения маятника.

Ответ:

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi+\frac{\ddot{\xi}}{l}\cos(\varphi-\alpha)=0.$$



К задаче 48.15.

48.15 (1197). Два вала, находящихся в одной плоскости и образующих между собой угол α, соединены шарниром Кардана. Моменты инерции валов равны J_1 и J_2. Составить уравнение движения первого вала, если на него действует вращающий момент M_1, а к другому валу приложен момент сопротивления M_2. Трением в подшипниках пренебречь.

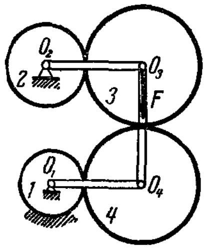
Ответ: Обозначая через φ угол поворота первого вала, имеем

$$\left[J_1+J_2\left(\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi}-\frac{J_2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\sin 2\varphi}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi)^3}\dot{\varphi}^2=$$
$$=M_1-M_2\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi}.$$

48.16 (1198). Найти в предыдущей задаче движение первого вала для случая малого угла α между валами. Вычисления произвести с точностью до α^2.

Ответ: $\varphi=\frac{1}{2}\frac{M_1-M_2}{J_1+J_2}t^2+C_1t+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

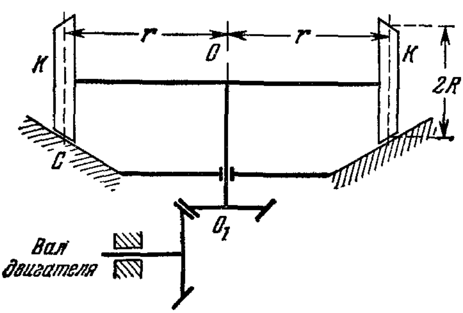
48.17 (1199). Показанный на чертеже эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из кривошипов O_1O_4 и O_2O_3, шатуна O_3O_4 и четырех зубчатых колес: *1*, *2*, *3* и *4* соответственно радиусов $r_1=50$ *мм*, $r_2=80$ *мм*, $r_3=120$ *мм*, $r_4=150$ *мм*; $O_1O_2=O_3O_4=270$ *мм*; $O_1O_4=O_2O_3=200$ *мм*. Колесо *1* неподвижно. Считая колеса однородными дисками одинаковой толщины и из одного и того же материала и пренебрегая массой рукояток и силами трения, вычислить, какое усилие F (считая его постоянным и направленным вдоль O_4O_3) надо приложить к рукоятке O_3O_4, чтобы в течение 1 *сек* повернуть рукоятку O_2O_3 на угол 30°, если в начальный момент система была неподвижна и $\angle O_2O_3O_4=90°$; вес подвижных колес равен 30 *кГ*.



К задаче 48.17.

Ответ: $F=0{,}48\left[\int\limits_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\right]^2$ $кГ=1{,}03$ *кГ*.

48.18 (1200). Бегуны K, K приводятся в движение от вала двигателя при помощи передачи, схема которой показана на чертеже. Вес одного бегуна равен 3 *т*, средний радиус $R=1$ *м*, радиус вращения $r=0{,}5$ *м*. Считаем, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через среднюю точку C обода. Отношение радиусов колес конической передачи от двигателя к вертикальному валу O_1O равно 2/3. Бегун считаем однородным диском радиуса R и пренебрегаем массой всех движущихся частей по сравнению с массой бегунов. Вычислить, какой постоянный вращающий момент должен быть приложен на валу двигателя, чтобы сообщить вертикальной оси O_1O угловую скорость 120 *об/мин* по истечении 10 *сек* от момента пуска двигателя; силами сопротивления пренебречь.



К задаче 48.18.

Ответ: 320 *кГм*.

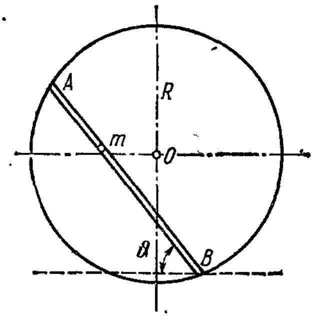
48.19 (1201). Однородный круговой конус катится по шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Длина образующей конуса l, угол раствора 2β. Составить уравнение движения конуса.

Указание. За обобщенную координату принять угол ϑ, образованный соприкасающейся образующей с прямой наибольшего наклона плоскости.

Ответ: $\ddot{\vartheta}+\dfrac{g\sin\alpha}{l\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)}\sin\vartheta=0$.

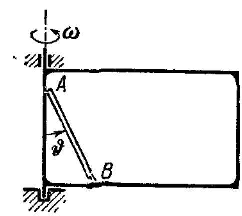
48.20 (1202). По однородному стержню массы M и длины $2a$, концы которого скользят по гладкой, расположенной в горизонтальной плоскости окружности радиуса R, движется с постоянной относительной скоростью v материальная точка массы m. Определить движение стержня. В начальный момент материальная точка находится в центре тяжести стержня.

Ответ: $\vartheta - \vartheta_0 = C \operatorname{arctg} \dfrac{vt}{\sqrt{R^2 - a^2 + \dfrac{M}{m}\left(R^2 - 2\dfrac{a^2}{3}\right)}}$, где ϑ_0 и C — произвольные постоянные.



К задаче 48.20.

48.21 (1203). Концы однородного тяжелого стержня AB длиной $2a$ и массы M скользят без трения по горизонтальному и вертикальному стержням рамки, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной стороны.

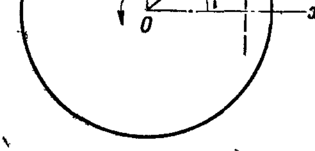


К задаче 48.21.

Составить уравнение движения стержня и определить положение относительного равновесия.

Ответ: $\frac{4}{3} Ma^2\ddot{\vartheta} - \frac{4}{3} M\omega^2a^2 \sin\vartheta\cdot\cos\vartheta - Mga\sin\vartheta = 0$, где ϑ — угол, образуемый стержнем с вертикалью. В положении равновесия $\vartheta = 0$ (неустойчивое равновесие).

48.22 (1204). К окружности однородного диска радиуса R шарнирно присоединен рычаг, несущий на своих концах сосредоточенные массы m_1 и m_2. Расстояния масс от шарнира соответственно равны l_1 и l_2. Диск вращается около вертикальной оси, перпендикулярной к его плоскости, с угловой скоростью ω. Составить уравнение движения рычага и определить его относительное положение равновесия. Массой рычага пренебречь. Ось вращения рычага параллельна оси вращения диска.



К задаче 48.22.

Ответ: $(m_1l_1^2 + m_2l_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1l_1 - m_2l_2)\cos(\psi - \omega t) = 0$.

При $m_1l_1 = m_2l_2$ рычаг в безразличном относительном равновесии. При $m_1l_1 \neq m_2l_2$ существуют два положения относительного равновесия, при которых $\psi=\omega t\pm\frac{\pi}{2}$, т. е. рычаг направлен по радиусу.

48.23 (1205). Решить предыдущую задачу в предположении, что диск вращается в вертикальной плоскости (учесть действие силы тяжести).

Ответ: $(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\ddot{\psi}-R\omega^2(m_1l_1-m_2l_2)\cos(\psi-\omega t)+$
$$+(m_1l_1-m_2l_2)g\sin\psi=0.$$

При $m_1l_1\neq m_2l_2$ относительное равновесие невозможно.

48.24 (1206). Тонкий диск массы M может своей плоскостью скользить без трения по горизонтальной плоскости. По диску, верхняя поверхность которого шероховата, движется материальная точка массы m. Уравнения относительного движения точки в декартовых координатах x и y, связанных с диском и имеющих начало в его центре тяжести, заданы в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$. Момент инерции диска относительно его центра тяжести равен J. Определить закон изменения угловой скорости диска. В начальном положении диск неподвижен.

Ответ: $$\left[J+\frac{mM}{m+M}(x^2+y^2)\right]\dot{\varphi}+\frac{mM}{m+M}(x\dot{y}-y\dot{x})=$$
$$=\frac{mM}{M+m}(x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0),$$

где x_0, y_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ — значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени.

48.25 (1207). По диску, описанному в предыдущей задаче, вдоль окружности радиуса R движется материальная точка с относительной скоростью $v=\alpha t$. Найти закон движения диска.

Ответ: $$\varphi=-\frac{mM}{2(m+M)}\frac{R\alpha}{J+\frac{mM}{m+M}R^2}t^2=\frac{\beta}{2R}t^2;$$
$$\xi=-\frac{mR}{m+M}\cos\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2;\quad \eta=-\frac{mR}{m+M}\sin\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2,$$

где φ — угол поворота диска, а ξ и η — координаты центра тяжести диска в неподвижной декартовой системе, имеющей начало в центре инерции системы.

К задаче 48.26.

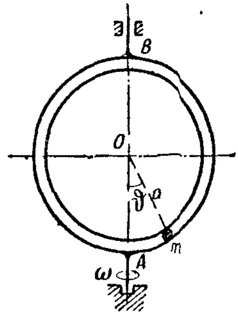
48.26 (1208). Материальная точка M движется под действием силы тяжести по прямой AB, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси. Прямая AB образует угол α с горизонталью. Найти закон движения точки.

Ответ: Расстояние движущейся точки от точки пересечения прямой с вертикальной осью
$$r=C_1e^{\omega t\cos\alpha}+C_2e^{-\omega t\cos\alpha}+\frac{g}{\omega^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$
где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

48.27 (1209). Материальная точка массы m движется по окружности радиуса a, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального диаметра AB. Составить уравнение движения точки и определить момент M, необходимый для поддержания постоянства угловой скорости.

Ответ: $\ddot{\vartheta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta=0$;

$$M=2ma^2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta\cdot\omega\dot{\vartheta}.$$



К задаче 48.27.

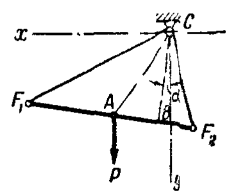
48.28 (1210). Материальная точка массы m движется внутри гладкой трубы, представляющей собой окружность радиуса a; труба свободно вращается около вертикального диаметра. Момент инерции трубы относительно вертикального диаметра равен J. Составить уравнения движения системы, считая, что труба вращается под действием постоянного момента M. (См. чертеж к задаче 48.27.)

Ответ: $ma^2\ddot{\vartheta}-ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2+mga\sin\vartheta=0$,

$$J\ddot{\varphi}+ma^2\sin^2\vartheta\cdot\ddot{\varphi}+2ma^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\vartheta}\dot{\varphi}=M$$

(ϑ — угол, определяющий положение точки в трубе, φ — азимут трубы).

48.29 (1211). Однородная балка весом P и длиной $2l$ подвешена за концы на канате длиной $2a$, перекинутом через неподвижный блок C. Пренебрегая массой каната и считая блок весьма малым, составить выражения для кинетической и потенциальной энергий системы.



К задаче 48.29

Указание. Траекторией точки C по отношению к отрезку F_1F_2 является эллипс с большой осью $2a$ и с фокусами в точках F_1 и F_2; за одну из обобщенных координат принять эксцентрическую аномалию эллипса, т. е. угол φ, определяемый с помощью соотношений

$$AB=a\cos\varphi;\quad BC=\sqrt{a^2-l^2}\sin\varphi;$$

за вторую принять угол α между вертикальной осью y и перпендикуляром BC к стержню.

Ответ: Кинетическая энергия системы:

$$T=\frac{P}{2g}\left[\left(\frac{l^2}{3}+a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\dot{\alpha}^2-2ab\dot{\varphi}\dot{\alpha}+\frac{a^2b^2+l^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\dot{\varphi}^2\right].$$

Потенциальная энергия системы:

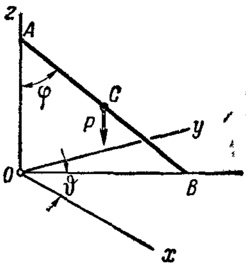
$$\Pi=-P(b\sin\varphi\cos\alpha-a\cos\varphi\sin\alpha);\qquad b=\sqrt{a^2-l^2}.$$

48.30 (1213). Однородный тонкий стержень AB весом P и длиной $2l$ скользит концом A по вертикальной прямой, а концом B по горизонтальной плоскости. Составить уравнения движения стержня и найти их первые интегралы (см. чертеж на стр. 374).

Ответ: Уравнения движения:

$$\ddot{\varphi}-\dot{\vartheta}^2\sin\varphi\cos\varphi=\frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\varphi;\quad \ddot{\vartheta}\sin^2\varphi+2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi=0$$

(φ — угол наклона стержня к вертикали; ϑ — угол проекции стержня на горизонтальную плоскость с осью Ox).



К задаче 48.30.

Первые интегралы:

$$\dot\vartheta\sin^2\varphi = C_1;\quad \dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi = C_2$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные).

48.31 (1214). Составить уравнения движения математического маятника массы m, подвешенного на упругой нити; длина нити в положении равновесия l, ее жесткость равна c.

Ответ: Если φ — угол отклонения маятника от вертикали, z — относительное удлинение нити, то уравнения движения будут

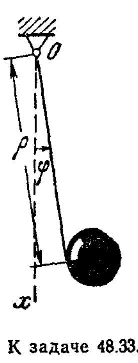
$$(1+z)\ddot\varphi + 2\dot z\dot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0;$$

$$\ddot z - (1+z)\dot\varphi^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{l}(1-\cos\varphi) = 0.$$

48.32 (1215). Найти в предыдущей задаче движение маятника для случая малых колебаний.

Ответ: $z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha\right)$, $\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \beta\right)$, где A, α, B, β — произвольные постоянные.

48.33. Один конец нерастяжимой тонкой нити обмотан вокруг однородного круглого цилиндра радиусом R, второй конец прикреплен к неподвижной точке O. Цилиндр, разматывая нить, опускается вниз, одновременно раскачиваясь вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса нити. Пренебрегая весом нити, составить дифференциальные уравнения движения цилиндра.



К задаче 48.33.

Ответ:

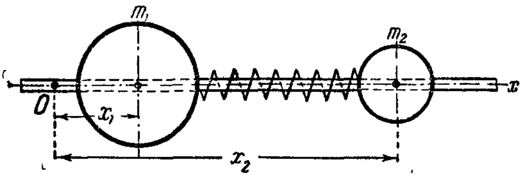
$$\ddot\rho - R\ddot\varphi - \frac{2}{3}\rho\dot\varphi^2 = \frac{2}{3}g\cos\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) - R\rho\dot\varphi^2 = -g\rho\sin\varphi.$$

48.34. Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение малых колебаний цилиндра, если движение началось из состояния покоя и при $t=0$ $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0\neq 0$.

Ответ: $\frac{d}{dt}[F^2(t)\varphi] + gF(t)\varphi = 0$, где $F(t) = \frac{gt^2}{3} + \rho_0 - R\varphi_0$.

48.35 (1216). Определить движение системы, состоящей из двух масс m_1 и m_2, насаженных на гладкий горизонтальный стержень (ось Ox); массы связаны пружиной жесткостью c и могут двигаться поступательно вдоль стержня; расстояние между центрами тяжести масс при ненапряженной пружине равно l; начальное состояние системы при $t=0$ определяется следующими значениями скоростей и координат центров тяжести масс: $x_1=0$, $\dot{x}_1=u_0$, $x_2=l$, $\dot{x}_2=0$.

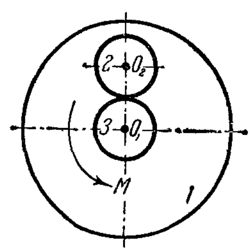


К задаче 48.35.

Ответ: $x_1=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t+\frac{m_2u_0}{k}\sin kt\right\}$;

$$x_2-l=\frac{1}{m_1+m_2}\left\{m_1u_0t-\frac{m_1u_0}{k}\sin kt\right\};\quad k=\sqrt{c\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}.$$

48.36 (1217). Маховик *1*, вращающийся вокруг вертикальной оси O_1 под действием прилагаемого к нему постоянного момента M, несет ось вращения O_2 шестерни *2*. Шестерня *2* находится в зацеплении с шестерней *3*, которая может вращаться вокруг оси независимо от маховика. Вращению шестерни *3* препятствует не показанная на чертеже спиральная пружина, реактивный момент которой — $c\psi$ пропорционален углу поворота ψ шестерни *3*.



К задаче 48.36.

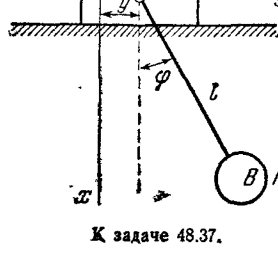
Определить движение системы, принимая шестерни за однородные диски одинаковых радиусов a и масс m и считая момент инерции маховика относительно оси O_1 равным $20\,ma^2$. В начальный момент система находилась в покое.

Ответ: $\psi=\frac{M}{26c}\left(1-\cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right)$;

$$\varphi=\frac{Mt^2}{52ma^2}+\frac{M}{676c}\left(1-\cos 1{,}02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}\,t\right),$$

где φ — угол поворота маховика.

48.37 (1218). Составить уравнения движения эллиптического маятника, состоящего из ползуна M_1 массы m_1, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика M_2 массы m_2, соединенного с ползуном стержнем AB длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной к плоскости чертежа. Массой стержня пренебречь.



К задаче 48.37.

Ответ: $\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{y}+m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi]=0$;

$$l\ddot{\varphi}+\cos\varphi\ddot{y}+g\sin\varphi=0.$$

48.38 (1219). Определить период малых колебаний описанного в предыдущей задаче эллиптического маятника.

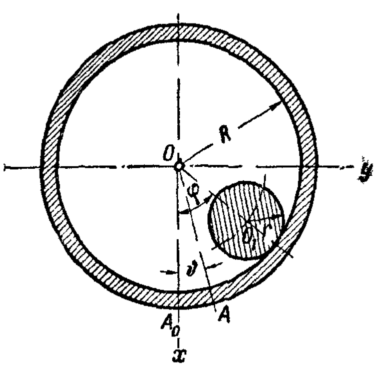
Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{l}{g}}$.

48.39 (1220). В задаче о движении эллиптического маятника (см. задачу 48.37) составить уравнения движения, принимая во внимание влияние постоянной силы трения скольжения ползуна о направляющие. Коэффициент трения равен f.

Ответ: $$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot y + m_2 l\dot\varphi\cos\varphi] =$$
$$= -f[(m_1+m_2)g + m_2 l\cos\varphi\,\dot\varphi^2 + m_2 l\sin\varphi\,\ddot\varphi]\,\mathrm{sign}\,\dot y,$$
$$l\ddot\varphi + \cos\varphi\,\ddot y + g\sin\varphi = 0,$$
где $$\mathrm{sign}\,\dot y = \begin{cases} +1 & \text{при}\quad \dot y > 0, \\ -1 & \text{при}\quad \dot y < 0. \end{cases}$$

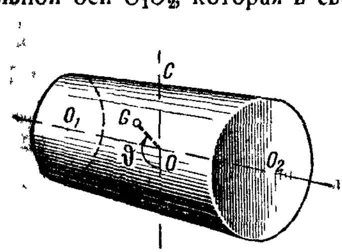
48.40 (1221). Шероховатый цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы M и радиуса R, могущего вращаться около своей горизонтально расположенной оси O. Моменты инерции цилиндров относительно своих осей равны $\frac{1}{2}mr^2$ и MR^2. Составить уравнения движения системы и найти их первые интегралы.

Ответ: $$MR^2\dot\vartheta - \frac{1}{2}mR\left[(R-r)\dot\varphi - R\dot\vartheta\right] = C_1,$$
$$\frac{1}{2}MR^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot\varphi - R\dot\vartheta\right]^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot\varphi^2 -$$
$$- mg(R-r)\cos\varphi = C_2,$$
где φ — угол поворота отрезка, соединяющего оси цилиндров, а ϑ — угол поворота внешнего цилиндра.



К задаче 48.40.

48.41 (1222). Тело весом P может вращаться вокруг горизонтальной оси O_1O_2, которая в свою

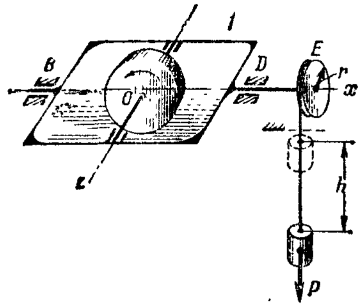


К задаче 48.41.

очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OC. Центр тяжести тела G лежит на расстоянии l от точки O на прямой, перпендикулярной к O_1O_2. Предполагая, что оси O_1O_2 и OG являются главными осями инерции тела в точке O, составить уравнение движения. Моменты инерции тела относительно главных осей равны A, B, C.

Ответ: $A\ddot{\vartheta} - \omega^2(C - B)\sin\vartheta\cos\vartheta = -Pl\sin\vartheta$, где ϑ — угол поворота вокруг O_1O_2.

48.42 (1223). Груз P приводит во вращение вокруг оси BD рамку 1 уравновешенного гироскопа посредством нити и шкива E радиуса r. Определить давление на подшипники B и D рамки, обусловленное гироскопическим моментом, в положении, когда груз спустится на высоту h. A и C — моменты инерции ротора относительно осей Ox, Oz, A_1 — момент инерции рамки относительно оси Ox, массой шкива E пренебрегаем. Ротор совершает n оборотов в секунду. Расстояние $BD = b$.

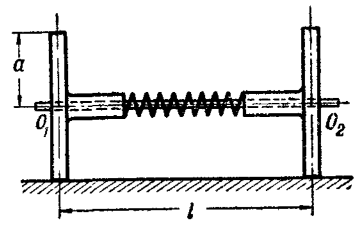


К задаче 48.42.

Ответ: $R_B = R_D = \frac{M}{b} =$

$$= \frac{2C\pi n}{b}\sqrt{\frac{2ph}{A + A_1 + \frac{p}{g}r^2}}.$$

48.43 (1224). Система, состоящая из двух одинаковых колес радиуса a каждое, могущих независимо вращаться вокруг общей нормальной к ним оси O_1O_2 длиной l, катится по горизонтальной плоскости. Колеса связаны пружиной жесткостью c, работающей на кручение (упругий торсион). Масса каждого колеса M; C — момент инерции колеса относительно оси вращения; A — момент инерции колеса относительно диаметра. Составить уравнения движения системы и определить движение, отвечающее начальным условиям $\varphi_1 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = \omega$ (φ_1, φ_2 — углы поворота колес). Массой оси пренебречь.



К задаче 48.43.

Ответ: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$; $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\omega t + \frac{\omega}{k}\sin kt\right)$;

$$k = \sqrt{\frac{2c}{Ma^2 + C + 4A\left(\frac{a}{l}\right)^2}}.$$

48.44 (1225). Какую работу нужно совершить для сообщения тележке массой M скорости u в следующих случаях:

1) На полу тележки лежит (поперек) однородный цилиндрический каток массой m и радиусом r. Радиус инерции катка относительно его оси ρ. Каток может катиться по полу тележки без скольжения.

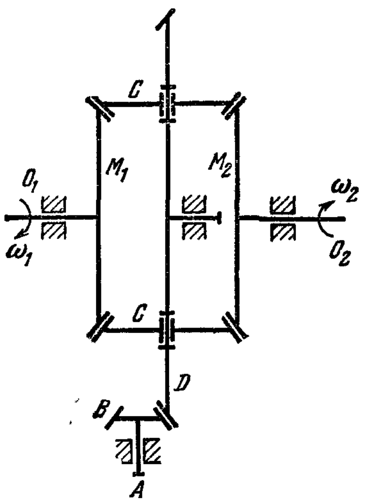
2) Указанный каток неподвижно скреплен с полом тележки. Массой колес пренебречь.

Ответ: $A_1 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\frac{\rho^2}{\rho^2 + r^2}\right)u^2$; $A_2 = \frac{M}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)u^2$; $A_2 > A_1$.

48.45 (1226). Найти ускорение тележки, по платформе которой катится без скольжения круглый цилиндр, если сама тележка скатывается тоже без скольжения по плоскости, наклоненной к горизонту под углом α и параллельной платформе тележки; образующие цилиндра перпендикулярны к линиям наибольшего ската платформы. Масса тележки без колес M, масса всех колес m, масса цилиндра M_1; колеса считать однородными сплошными дисками.

Ответ: $w=\frac{6M+6m+2M_1}{6M+9m+2M_1}g\sin\alpha$.

48.46 (1227). В дифференциальном регуляторе, изображенном на чертеже, валы O_1 и O_2, вращающиеся в противоположные стороны с угловыми скоростями ω_1 и ω_2, снабжены зубчатками M_1 и M_2 и при помощи двух пар сателлитов C сцеплены с шестерней D, играющей роль рукоятки сателлитов. Если ω_1 равно ω_2, то шестерня D остается неподвижной. В противном случае D начнет вращаться и через вал A приведет в действие не показанное на чертеже регулирующее приспособление; последнее создает при этом передаваемые валам O_1 и O_2 моменты, причем опережающий вал будет тормозиться, а отстающий — увеличивать свою угловую скорость. Считая эти моменты пропорциональными угловой скорости шестерни D (коэффициент пропорциональности обозначается через n) и одинаковыми по величине для того и другого вала и обозначая через J приведенный к оси O_1O_2 момент инерции системы, найти закон изменения угловых скоростей ω_1 и ω_2, если их начальные значения ω_{10} и ω_{20} не равны друг другу. Моменты инерции J_1 и J_2 валов O_1 и O_2 с шестернями M_1 и M_2 считаем равными друг другу; приведенный к оси вращения шестерни D момент инерции этой шестерни и проводимых ею через вал A в движение частей механизма обозначаем через J_D; при решении задачи вводится еще в рассмотрение момент инерции J_C сателлитов относительно оси их собственного вращения (эта величина не фигурирует в окончательном результате). Под приведенным к оси вала моментом инерции системы понимается сумма $J=2J_1+J_D+4J_C'$, где J_C' — момент инерции одного сателлита относительно оси O_1O_2.



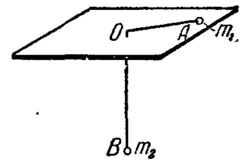
К задаче 48.46.

Ответ: $\omega_1=\frac{1}{2}\omega_{10}(1+e^{-\lambda t})+\frac{1}{2}\omega_{20}(1-e^{-\lambda t})$,

$$\omega_2=\frac{1}{2}\omega_{10}(1-e^{-\lambda t})+\frac{1}{2}\omega_{20}(1+e^{-\lambda t}),$$

где $\lambda=\frac{2n}{J}$.

48.47 (1228). К концам нити A и B, пропущенной через отверстие O, сделанное в гладкой горизонтальной плоскости стола, присоединены две точечные массы m_1 и m_2. Первая масса все время остается на поверхности стола, тогда как вторая движется по вертикали, проходящей через точку O. В начальный момент $OA = r_0$, скорость массы m_2 равна нулю, тогда как скорость v_0 массы m_1 направлена перпендикулярно к начальному положению участка нити OA. Доказать, что при этом условии масса m_2 будет совершать колебательное движение; найти размах a этого колебания и дать выражение для его периода T. Нить считать невесомой, нерастяжимой и абсолютно гибкой.



К задаче 48.47.

Ответ: $a = |r_0 - r_1|$, $T = \sqrt{\dfrac{2(m_1+m_2)}{m_2 g}}\left|\displaystyle\int_{r_0}^{r_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{(r_0-r)(r-r_1)(r+r_2)}}\right|$,

где $r_{1,2} = \sqrt{\dfrac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\left(2r_0 + \dfrac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}\right)} \pm \dfrac{m_1 v_0^2}{4m_2 g}$.

48.48 (1229). Однородный диск радиуса R, имеющий массу M, может вращаться вокруг своей горизонтальной оси O. К диску на нити AB длины l подвешена материальная точка массы m. Составить уравнения движения системы.

Ответ: $\left(m + \dfrac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\psi} +$
$+ mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + mgR\sin\varphi = 0,$
$mRl\cos(\varphi-\psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 +$
$+ mgl\sin\psi = 0,$

где φ — угол поворота диска, а ψ — угол отклонения нити от вертикали.

К задаче 48.48.

48.49 (1230). Диск системы, описанной в предыдущей задаче, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Составить уравнение движения материальной точки.

Ответ: $\ddot{\psi} - \omega^2\dfrac{R}{l}\sin(\omega t - \psi) + \dfrac{g}{l}\sin\psi = 0.$

48.50 (1232). Колесо катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус колеса a, его масса M; C — момент инерции колеса относительно оси, проходящей перпендикулярно к плоскости колеса через его центр; A — момент инерции колеса относительно его диаметра. Составить уравнения движения колеса.

Указание. Использовать уравнения Лагранжа с множителями для неголономных систем.

Ответ: $\dfrac{d}{dt}(A\dot{\psi}\sin^2\vartheta) - C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\vartheta}\sin\vartheta = 0,$

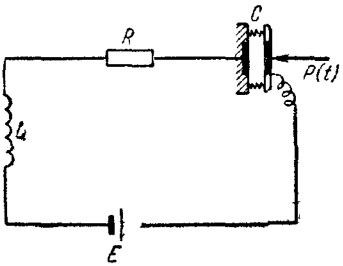
$(C + ma^2)\dfrac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta) - ma^2\dot{\vartheta}\dot{\psi}\sin\vartheta = 0,$

$(A + ma^2)\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta + (C + ma^2)(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta = -mga\cos\vartheta,$

где φ — угол поворота колеса вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости; ϑ — угол наклона плоскости колеса к горизонту;

φ — азимут вертикальной плоскости, содержащей диаметр колеса и проходящей через точку касания.

48.51 (1233). Конденсаторный микрофон состоит из последовательно соединенных катушки самоиндукции, омического сопротивления и конденсатора, пластины которого связаны двумя пружинами общей жесткости c. Цепь присоединена к элементу с постоянной электродвижущей силой E, а на пластину конденсатора действует переменная сила $p(t)$. Коэффициент самоиндукции катушки L, омическое сопротивление R, емкость конденсатора в положении равновесия системы C_0, расстояние между пластинами в этом положении a, масса подвижной пластины конденсатора m. Ввести электрические и механические обобщенные координаты и составить уравнения движения системы в форме Лагранжа.



К задаче 48.51.

Указание. 1. Потенциальная энергия конденсатора равна $V=\frac{q^2}{2C}$ (C — емкость конденсатора, q — заряд на его обкладках); электрокинетическая энергия вычисляется по формуле $T=\frac{1}{2}Li^2$ $\left(L\right.$ — коэффициент самоиндукции, $i=\frac{dq}{dt}$ — сила тока в цепи$\left.\right)$.

2. За обобщенные координаты принять изменение заряда конденсатора q и смещение пружин из положения равновесия. Тогда полный заряд будет q_0+q, а полное смещение x_0+x; здесь q_0 — заряд конденсатора, а x_0 — смещение пружин от нейтрального положения в положение равновесия системы.

Ответ: $m\ddot{x}+cx-\frac{E}{a}q-\frac{q^2}{2C_0a}=p(t)$;

$$L\ddot{q}+R\dot{q}-\frac{E}{a}x+\frac{q}{C_0}-\frac{qx}{aC_0}=0.$$

48.52 (1234). Определить частоты малых свободных колебаний конденсаторного микрофона, описанного в предыдущей задаче. Сопротивлением электрической цепи пренебречь.

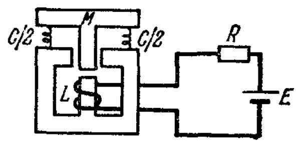
Ответ: $k_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c}{m}+\frac{1}{C_0L}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}-\frac{1}{C_0L}\right)^2+4\frac{E^2}{a^2mL}}}$.

48.53 (1235). Определить электрические колебания, возникающие в конденсаторном микрофоне, описанном в задаче 48.51, при внезапном приложении постоянного давления p_0 к пластине микрофона. Для упрощения вычислений пренебречь массой подвижной пластины и считать, что омическое сопротивление цепи равно нулю; следует также отбросить нелинейные члены в уравнениях движения.

Ответ: При $ca>\frac{q_0^2}{C_0a}$ заряд конденсатора равен

$$q=\frac{p_0q_0}{ca\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\left[1-\cos\sqrt{\frac{1}{C_0L}\left(1-\frac{q_0^2}{cC_0a^2}\right)}\,t\right].$$

48.54 (1236). Изображенная на чертеже система отвечает принципиальной схеме электромагнитного датчика, используемого для записи механических колебаний. Масса якоря M, жесткость пружин c. Коэффициент самоиндукции катушки изменяется вследствие изменения длины воздушного зазора в магнитопроводе $L = L(x)$ (x — вертикальное смещение якоря из положения, когда пружины не напряжены). К катушке присоединена электрическая цепь, состоящая из элемента с заданной э. д. с. E. Омическое сопротивление цепи равно R. Составить уравнения движения системы и определить ее положение равновесия.



К задаче 48.54.

Указание. За обобщенные координаты принять смещение x якоря и заряд q, соответствующий току i в цепи $\left(i = \frac{dq}{dt}\right)$.

Ответ: Уравнения движения:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} = E; \quad M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg.$$

В «положении равновесия» $x = x_0$ и $i = \dot{q} = i_0$, где $i_0 = \frac{E}{R}$; $cx_0 = Mg + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2$.

48.55 (1237). Составить уравнения малых движений вблизи положения равновесия электромагнитного датчика, описанного в предыдущей задаче.

Указание. За обобщенные координаты взять изменение заряда e и вертикальное перемещение якоря из положения равновесия ξ. Функцию $L(x)$ разложить в ряд $L = L(x_0 + \xi) = L_0 + L_1\xi + \ldots$ и ограничиться в этом ряду первыми двумя членами.

Ответ: $L_0\ddot{e} + R\dot{e} + L_1 i_0\dot{\xi} = 0$; $M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0\dot{e} = 0$.

48.56 (1238). Основание датчика, описанного в задаче 48.54, совершает малые вертикальные колебания по закону $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Определить закон движения якоря и ток в электрической цепи датчика.

Ответ: $i = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta} L_1 i_0 \{R(c - M\omega^2)\cos \omega t +$

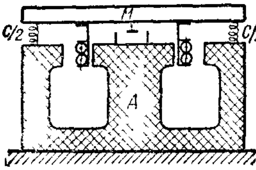
$$+ [L_1^2 i_0^2 \omega + L_0\omega(c - M\omega^2)] \sin \omega t\},$$

$$x = \frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\{-[L_1^2 i_0^2 L_0\omega^2 + (R^2 + L_0^2\omega^2)(c - M\omega^2)] \sin \omega t + \omega L_1^2 i_0^2 R \cos \omega t\},$$

где $\Delta = R^2(c - M\omega^2)^2 + \omega^2[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]^2$.

48.57 (1239). Электромеханическая движущая система состоит из цилиндрического постоянного магнита с концентрическими полюсами A, создающего радиальное поле, и якоря массой M, опирающегося на пружину жесткости c. Якорь соединен с проволочной катушкой, состоящей из n витков, и с механическим демпфером, сопротивление которого пропорционально скорости якоря (коэффициент сопротивления β); средний радиус катушки r; ее коэффициент самоиндукции L, омическое сопротивление R, магнитная индукция в зазоре магнита B. К зажимам катушки приложено переменное напряжение $V(t)$. Составить уравнения движения системы.

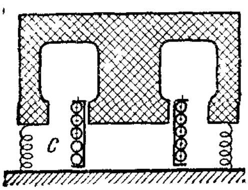
Указание. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, равны $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$, $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$ (Q_q — электродвижущая сила, индуцируемая в электрической цепи, а Q_x — сила взаимодействия катушки с магнитом).



К задаче 48.57.

Ответ: $L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t)$;
$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} = 0$.

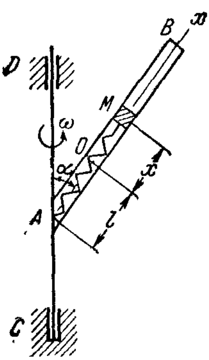
48.58 (1240). К основанию сейсмометра прикреплена проволочная катушка из n витков радиуса r, соединенная с электрической регистрирующей системой, схематизируемой цепью с коэффициентом самоиндукции L и омическим сопротивлением R. Магнитный сердечник, создающий радиальное магнитное поле, характеризуемое в зазоре магнитной индукцией B, опирается на основание с помощью пружин общей жесткости c. На сердечник действует также сила сопротивления, пропорциональная его скорости, вызываемая демпфером, создающим силу сопротивления $\beta\dot{x}$. Составить уравнения, определяющие перемещение сердечника и ток в цепи в случае малых вертикальных колебаний основания сейсмометра по закону $\xi = \xi_0 \sin\omega t$.



К задаче 48.58.

Указание. Обобщенные силы, отвечающие взаимодействию катушки и магнита, даются формулами $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$ и $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$.

Ответ: $M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} =$
$= M\xi_0\omega^2 \sin\omega t$;
$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0$.



К задаче 49.1.

§ 49. Интегралы движения, преобразование Рауса, канонические уравнения Гамильтона, уравнения Якоби—Гамильтона, принцип Гамильтона—Остроградского

49.1. Трубка AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси CD, составляя с ней угол α. В трубке находится пружина жесткости c, один конец которой укреплен в точке A; ко второму концу пружины прикреплено тело M массы m, скользящее без трения внутри трубки. В недеформированном состоянии длина пружины равна $AO = l$.

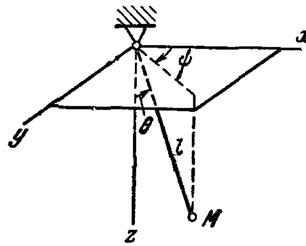
Приняв за обобщенную координату расстояние x от тела M до точки O, определить кинетическую энергию T тела M и обобщенный интеграл энергии.

Ответ: $T=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+(l+x)^2\omega^2\sin^2\alpha]$;

$$m\dot{x}^2-m(l+x)^2\omega^2\sin^2\alpha+cx^2+2mg\cos\alpha x=h,$$

где h — постоянная интегрирования.

49.2. Найти первые интегралы движения сферического маятника длиной l, положение которого определяется углами θ и ψ.



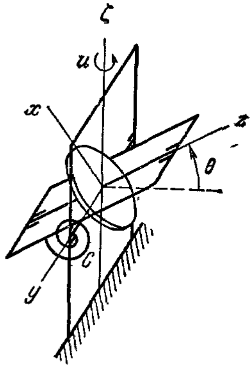
К задаче 49.2.

Ответ: 1) Интеграл, соответствующий циклической координате ψ (интеграл моментов количества движения относительно оси z): $\dot{\psi}\sin^2\theta=n$;

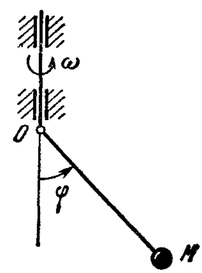
2) интеграл энергии:

$\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta-2\frac{g}{l}\cos\theta=h$, где n и h — постоянные интегрирования.

49.3. Гироскопический тахометр установлен на платформе, вращающейся с постоянной угловой скоростью u вокруг оси ζ. Определить первые интегралы движения, если коэффициент жесткости спиральной пружины равен c, моменты инерции гироскопа относительно главных центральных осей x, y, z соответственно равны A, B и C, причем $B=A$; силы трения на оси z собственного вращения гироскопа уравновешиваются моментом, создаваемым статором электромотора, приводящим во вращение гироскоп; силами трения на оси прецессии y пренебречь.



К задаче 49.3.



К задаче 49.4.

Ответ: 1) Интеграл, соответствующий циклической координате φ (интеграл моментов количества движения относительно оси z):

$$\dot{\varphi}+u\sin\theta=n;$$

2) обобщенный интеграл энергии:

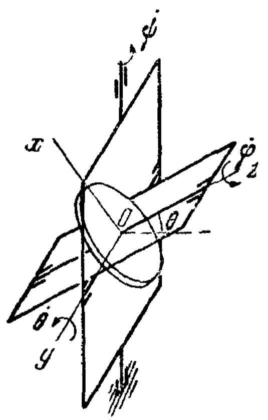
$$A(\dot{\theta}^2-u^2\cos^2\theta)+c\theta^2=h.$$

49.4. Материальная точка M соединена с помощью невесомого стержня OM длиной l с плоским шарниром O, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью ω. Определить условие устойчивости нижнего вертикального положения маятника, период его малых колебаний при выведении его из этого положения и обобщенный интеграл энергии.

Ответ: 1) $\omega^2<\frac{g}{l}$; 2) $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\omega^2}}$;

3) $\dot{\varphi}^2-\omega^2\sin^2\varphi-2\frac{g}{l}\cos\varphi=h.$

49.5. Уравновешенный гироскоп движется по инерции в кардановом подвесе. Определить кинетическую энергию системы и первые интегралы уравнений движения, если момент инерции внешней рамки относительно неподвижной оси вращения ξ равен J_ξ, моменты инерции внутренней рамки относительно главных центральных осей x, y, z равны J'_x, J'_y, J'_z, а соответствующие моменты инерции гироскопа — J_x, J_y и J_z $(J_x = J_y)$.



К задаче 49.5.

Ответ: 1) $T = \frac{1}{2}\{[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot\psi^2 + (J_y + J'_y)\dot\theta^2 + J_z(\dot\varphi + \dot\psi\sin)^2\}$;

2) интеграл, соответствующий циклической координате φ (интеграл моментов количества движения гироскопа относительно оси z): $\dot\varphi + \dot\psi\sin\theta = n$;

3) интеграл, соответствующий циклической координате ψ (интеграл моментов количества движения всей системы относительно оси ξ):

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot\psi + J_z n\sin\theta = n_1;$$

4) интеграл энергии:

$$[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot\psi^2 + (J_y + J'_y)\dot\theta^2 = h.$$

49.6. Игнорируя циклическую координату ψ, составить функцию Рауса и дифференциальное уравнение в координате θ для сферического маятника. (См чертеж к задаче 49.2.)

Ответ: $R = \frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)$, $\ddot\theta - n^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$,

где $n = \dot\psi\sin^2\theta = \mathrm{const}$.

49.7. Точка массы m движется в центральном силовом поле, потенциальная энергия которого равна $\Pi(r)$. Определяя положение точки полярными координатами r и φ и игнорируя циклическую координату φ, составить функцию Рауса и дифференциальное уравнение движения в координате r.

Ответ: 1) $R = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 - \frac{c^2}{r^2}\right)$, 2) $m\left(\ddot r - \frac{c^2}{r^3}\right) = -\frac{\partial\Pi}{\partial r}$,

где $c = r^2\dot\varphi = \mathrm{const}$ — удвоенная секторная скорость.

49.8. Гироскоп установлен в кардановом подвесе. На осях ξ и y вращения рамок подвеса действуют моменты внешних сил M_ξ и M_y. Игнорируя циклическую координату φ, найти 1) функцию Рауса, 2) дифференциальные уравнения движения для координат ψ и θ, 3) гироскопические члены. (См. чертеж к задаче 49.5.)

Ответ: 1) $R = \frac{1}{2}[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\dot\psi^2 +$

$$+ \frac{1}{2}(J_y + J'_y)\dot\theta^2 + J_z n\dot\psi\sin\theta - \frac{1}{2}J_z n^2;$$

2) $[J_\xi + J'_z + (J'_x + J_x - J'_z)\cos^2\theta]\ddot\psi -$

$$- 2(J'_x + J_x - J'_z)\cos\theta\sin\theta\dot\theta\dot\psi + J_z n\cos\theta\dot\theta = M_\xi,$$

$$(J_y + J'_y)\ddot\theta + 2(J'_x + J_x - J'_z)\cos\theta\sin\theta\dot\psi^2 - J_z n\cos\theta\dot\psi = M_y;$$

3) $J_z n\cos\theta\dot\theta, \quad -J_z n\cos\theta\dot\psi.$

49.9. Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения для математического маятника массы m и длиной l, положение которого определяется углом φ отклонения его от вертикали. Проверить, что полученные уравнения эквивалентны обычному дифференциальному уравнению движения математического маятника.

Ответ: 1) $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} - mgl\cos\varphi;$

2) $\dot\varphi = \frac{p}{ml^2}, \quad \dot p = -mgl\sin\varphi.$

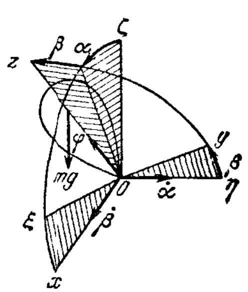
49.10. Материальная точка массы m подвешена с помощью невесомого стержня длиной l к плоскому шарниру, горизонтальная ось которого вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью ω (см. чертеж к задаче 49.4). Составить функцию Гамильтона и канонические уравнения движения.

Ответ: 1) $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} -$

$$- \frac{ml^2}{2}\omega^2\sin^2\varphi - mgl\cos\varphi;$$

2) $\dot\varphi = \frac{p}{ml^2},$

$$\dot p = ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mgl\sin\varphi.$$



К задаче 49.11.

49.11. Вертикальное положение оси симметрии волчка, движущегося относительно неподвижной точки O под действием силы тяжести, определяется углами α и β. Исключив циклическую координату φ (угол собственного вращения), составить для углов α и β функции Рауса и Гамильтона. Масса волчка равна m, расстояние от его центра тяжести до точки O равно l, момент инерции относительно оси симметрии z равен C, а относительно осей x и y равен A.

Ответ: $R = \frac{1}{2}A(\cos^2\beta\dot\alpha^2 + \dot\beta^2) - Cn\sin\beta\dot\alpha,$

$$H = \frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\alpha + Cn\sin\beta)^2}{\cos^2\beta} + P_\beta^2\right] + mgl\cos\alpha\cos\beta,$$

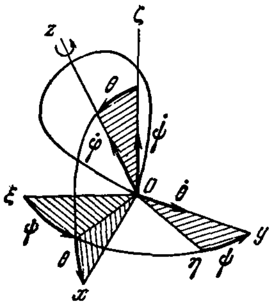
где $n = \dot\varphi - \sin\beta\dot\alpha = \text{const}$. (Здесь и в дальнейшем символы P_α, P_β и т. п. означают обобщенные импульсы.)

49.12. Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, составить для канонических переменных Гамильтона дифференциальные уравнения малых колебаний волчка около верхнего вертикального положения.

Ответ: $\dot{\alpha}=\frac{1}{A}(P_\alpha+Cn\beta)$; $\dot{P}_\alpha=mgl\alpha$;

$\dot{\beta}=\frac{1}{A}P_\beta$; $\dot{P}_\beta=-\frac{Cn}{A}(P_\alpha+Cn\beta)+mgl\beta$.

49.13. Положение оси симметрии z волчка, движущегося относительно неподвижной точки O под действием силы тяжести, определяются углами Эйлера: углом прецессии ψ и углом нутации θ. Составить функцию Гамильтона для углов ψ, θ и φ (угол собственного вращения) и соответствующих импульсов, если m — масса волчка, l — расстояние от его центра тяжести до точки O, C — момент инерции относительно оси z, A — момент инерции относительно любой оси, лежащей в экваториальной плоскости, проходящей через точку O.



К задаче 49.13.

Ответ: $H=\frac{1}{2A}\left[\frac{(P_\psi-P_\varphi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}+P_\theta^2\right]+$
$+\frac{1}{2C}P_\varphi^2+mgl\cos\theta$.

49.14. В условиях предыдущей задачи составить канонические уравнения движения волчка.

Ответ: $\dot{\psi}=\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta}$; $\dot{P}_\psi=0$;

$\dot{\theta}=\frac{P_\theta}{A}$; $\dot{P}_\theta=-\frac{(P_\varphi\cos\theta-P_\psi)(P_\psi\cos\theta-P_\psi)}{A\sin^3\theta}+mgl\sin\theta$;

$\dot{\varphi}=-\frac{P_\psi-P_\varphi\cos\theta}{A\operatorname{tg}\theta\sin\theta}+\frac{P_\varphi}{C}$; $\dot{P}_\varphi=0$.

49.15. Свободная точка единичной массы движется в вертикальной плоскости xy под действием силы тяжести. Составить дифференциальное уравнение в частных производных Якоби — Гамильтона и найти его полный интеграл (ось y направлена вертикально вверх).

Ответ: $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+gy=0$;

$V=b_1t+b_2x-\frac{1}{3g}\sqrt{(-2gy-2b_1-b_2^2)^3}+C$,

где b_1, b_2 и C — произвольные постоянные.

49.16. Пользуясь результатами, полученными при решении предыдущей задачи, и свойствами полного интеграла уравнения Якоби — Гамильтона, найти первые интегралы уравнений движения точки.

Ответ: $\frac{\partial V}{\partial b_1}=t+\frac{1}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_1$,

$\frac{\partial V}{\partial b_2}=x+\frac{b_2}{g}\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=a_2$,

$\frac{\partial V}{\partial x}=b_2=\dot{x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}=\sqrt{-2gy-2b_1-b_2^2}=\dot{y}$,

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — произвольные постоянные.

49.17. Физический маятник массы M движется вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Момент инерции маятника относительно оси вращения равен J, расстояние от центра тяжести маятника до его оси вращения равно l. Составить дифференциальное уравнение Якоби—Гамильтона, найти его полный интеграл и первые интегралы движения маятника (нулевой уровень потенциальной энергии взять на уровне оси маятника).

Ответ: 1) $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2J}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2-Mgl\cos\varphi=0;$

2) $V=bt+\sqrt{2J}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}\,d\varphi;$

3) $t-\sqrt{\dfrac{J}{2}}\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}}=a,$

$\sqrt{2J}\sqrt{Mgl\cos\varphi-b}=J\dot{\varphi},$

где a и b произвольные постоянные интегрирования.

49.18. Движение волчка, имеющего одну неподвижную точку O, определяется углами Эйлера ψ, θ и φ. Пользуясь результатами решения задачи 49.13, составить уравнение в частных производных Якоби—Гамильтона и найти полный интеграл его.

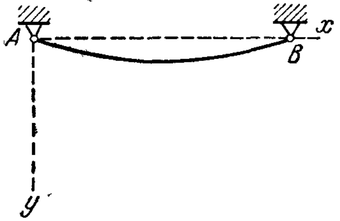
Ответ: 1) $\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2A\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\psi}-\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\cos\theta\right)^2+\dfrac{1}{2A}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2+$

$+\dfrac{1}{2C}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+mgl\cos\theta=0;$

2) $V=b_1t+b_2\psi+b_3\varphi+$

$+\displaystyle\int\sqrt{-2Ab_1-\dfrac{Ab_3^2}{C}-\dfrac{(b_2-b_3\sin\theta)^2}{\sin^2\theta}-2Agl\cos\theta}\,d\theta.$

49.19. Концы струны закреплены в неподвижных точках A и B, расстояние между которыми равно l. Считая, что натяжение T струны одинаково во всех точках, определить интеграл действия по Гамильтону для малых колебаний струны. Предполагается, что колебания происходят в одной плоскости xy и что на струну действуют только силы натяжения; линейная плотность струны равна ρ.



К задаче 49.19.

Ответ:

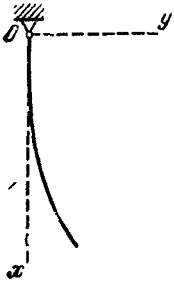
$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l}\left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt,$$

где $y=y(x, t)$.

49.20. Пользуясь принципом Гамильтона—Остроградского и результатами решения предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение колебаний струны.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, где $a^2=\dfrac{T}{\rho}$; граничные условия: $y(0, t)=$ $=y(l, t)=0$.

49.21. Абсолютно гибкая однородная и нерастяжимая нить длиной l подвешена за один конец в точке O. Определить интеграл действия по Гамильтону для малых колебаний нити около вертикали, происходящих под действием силы тяжести. Масса единицы длины нити равна ρ.



К задаче 49.21.

Ответ: $$S=\frac{\rho}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2-g(l-x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dt,$$

где $y=y(x,\ t)$.

49.22. Пользуясь принципом Гамильтона — Остроградского и результатами решения предыдущей задачи, составить дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной за один конец нити.

Ответ: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]$; граничные условия: 1) $y(0,\ t)=0$, 2) $y(l,\ t)$, $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=l}$ и $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=l}$ конечны.

ГЛАВА XII

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

§ 50. Кеплерово движение (движение под действием центральной силы)

50.1. Модуль силы всемирного тяготения, действующий на материальную точку массы m, определяется равенством $F = m\frac{\mu}{r^2}$, где $\mu = fM$ — гравитационный параметр притягивающего центра (M — его масса, f — гравитационная постоянная) и r — расстояние от центра притяжения до притягиваемой точки.

Зная радиус R небесного тела и ускорение g силы тяжести *) на его поверхности, определить гравитационный параметр μ небесного тела и вычислить его для Земли, если ее радиус $R = 6370$ *км*, а $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Ответ: $\mu = gR^2$; для Земли $\mu = 3{,}98 \cdot 10^5$ *км*^{3}/*сек*^{2}.

50.2. Определить гравитационный параметр μ_n и ускорение силы тяжести g_n на поверхности небесного тела, если известны отношения его массы M_n и радиуса R_n к массе M и радиусу R Земли. Вычислить эти величины для Луны, Венеры, Марса и Юпитера, для которых соответствующие отношения даны в следующей таблице:

	$M_n : M$	$R_n : R$		$M_n \cdot M$	$R_n : R$
Луна	0,0123	0,273	Марс	0,107	0,535
Венера	0,814	0,958	Юпитер . . .	317	10,95

Ответ:

	μ (*км*^{3}/*сек*^{2})	g (*м/сек*^{2})		μ (*км*^{3}/*сек*^{2})	g (*м/сек*^{2})
Луна	$4{,}90 \cdot 10^3$	1,62	Марс	$42{,}8 \cdot 10^3$	3,69
Венера . . .	$326 \cdot 10^3$	8,75	Юпитер . .	$126 \cdot 10^6$	26,0

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что сила притяжения небесного тела направлена к его центру; ускорения сил тяжести g даются без учета вращения небесных тел.

50.3. Материальная точка равномерно движется по круговой орбите на высоте H над поверхностью небесного тела радиуса R под действием силы всемирного тяготения. Определить скорость движения v_1 и период обращения T материальной точки*).

Ответ: 1) $v_1=\sqrt{\frac{\mu}{r}}=\sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}$ (круговая скорость на высоте H для данного небесного тела);

2) $T=2\pi r\sqrt{\frac{r}{\mu}}=2\pi\frac{(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$. Здесь r — расстояние от материальной точки до центра небесного тела, μ — его гравитационный параметр, g — ускорение силы тяжести на его поверхности.

50.4. Пренебрегая высотой полета искусственного спутника над поверхностью небесного тела, определить первую космическую скорость v_1 и соответствующий период T обращения для Земли, Луны, Венеры, Марса и Юпитера.

Ответ:

	v_1 (*км/сек*)	T (*мин*)		v_1 (*км/сек*)	T (*мин*)
Земля . .	7,91	84,3	Марс . .	3,54	101
Луна . . .	1,68	108	Юпитер .	42,6	172
Венера . .	7,30	87,5			

50.5. На какой высоте нужно запустить круговой спутник Земли, обращающийся в плоскости экватора, для того, чтобы он все время находился над одним и тем же пунктом Земли?

Ответ: $H=35\,800$ *км*.

50.6. Под каким углом β пересекается с земным экватором трасса спутника (проекция его траектории на земную поверхность), если он движется по круговой орбите высотой H, наклоненной под углом α к плоскости экватора?

Ответ: $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\Omega\sqrt{(R+H)^3:\mu}}$, где Ω — угловая скорость суточного вращения Земли и μ — ее гравитационный параметр.

50.7. Точка массы m притягивается к неподвижному центру по закону всемирного тяготения $F=m\frac{\mu}{r^2}$, где μ — гравитационный параметр центра притяжения. Найти интеграл энергии.

Ответ: $v^2-2\frac{\mu}{r}=h$.

50.8. Определить, при какой высоте H круговой орбиты спутника его потенциальная энергия относительно поверхности планеты радиуса R равна его кинетической энергии.

Ответ: $H=R/2$.

50.9. Определить, с какой скоростью войдет метеорит в земную атмосферу, если его скорость на бесконечности $v_\infty=10$ *км/сек*.

Ответ: $v\approx 15$ *км/сек*.

---

*) Во всех задачах этой главы сопротивлением атмосферы пренебрегаем.

50.10. Какую минимальную скорость v_2 нужно сообщить космическому аппарату на поверхности планеты, чтобы он удалился в бесконечность?

Ответ: $v_2 = \sqrt{2}\, v_1$ — вторая космическая скорость (v_1 — первая космическая скорость).

50.11. Определить вторую космическую скорость для Земли, Луны, Венеры, Марса и Юпитера.

Ответ:

	v_2 (*км/сек*)		v_2 (*км/сек*)
Земля . .	11,2	Марс . . .	5,0
Луна . . .	2,37	Юпитер . .	60,2
Венера . .	10,3		

50.12. Точка движется под действием центральной силы. Считая, что модуль радиус-вектора r точки зависит от времени t сложным образом через полярный угол φ, определить скорость и ускорение точки *).

Ответ: $v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]$; $w_\varphi = 0$, $w_r = \pm c^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right)$, где $u = \frac{1}{r}$, $c = r^2\dot{\varphi} = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = \text{const}$ — удвоенная секторная скорость; знак плюс для силы отталкивания, знак минус — для силы притяжения.

50.13 (751). Точка массы m движется под действием центральной силы по коническому сечению, уравнение которого в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где p и e — параметр и эксцентриситет траектории.

Определить силу, под действием которой движется точка.

Ответ: $F_\varphi = 0$, $F_r = -m\mu/r^2$, где $\mu = c^2/p$ и c — удвоенная секторная скорость.

50.14. Точка массы m притягивается к неподвижному полюсу по закону всемирного тяготения $F = m\mu/r^2$. Найти траекторию движения точки.

Ответ: Кривая второго порядка (коническое сечение), уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varepsilon)},$$

где $p = c^2/\mu$, а e и ε — произвольные постоянные интегрирования.

Указание. Воспользоваться ответом к задаче 50.12.

*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что полюс полярной системы координат совпадает с центром притяжения (отталкивания).

50.15. Материальная точка движется под действием силы всемирного тяготения по эллиптической траектории, эксцентриситет которой $e<1$, а параметр p. Зная интеграл площадей $c=r^2\dot{\varphi}=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|$, определить полуоси a и b эллиптической траектории и период обращения T.

Ответ: $a=\dfrac{p}{1-e^2}$, $b=\dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$; $T=\dfrac{2\pi p^2}{c(1-e^2)^{3/2}}=2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}}$.

50.16. В условиях предыдущей задачи определить ускорение точки в моменты, когда она проходит апогей и перигей.

Ответ: $w_а=\dfrac{c^2}{p^3}(1-e)^2$, $w_п=\dfrac{c^2}{p^3}(1+e)^2$.

50.17. Зная период обращения T спутника вокруг Земли по эллиптической орбите и разность его апогея и перигея H, определить эксцентриситет орбиты.

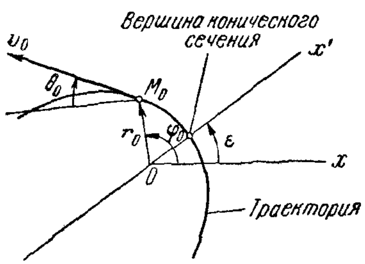
Ответ: $e=H\sqrt[3]{\dfrac{\pi^2}{2\mu T^2}}$.

50.18. Спутник движется около планеты радиуса R по эллиптической орбите с эксцентриситетом e. Найти большую полуось его орбиты, если отношение высот перигея и апогея равно $\gamma<1$.

Ответ: $a=\dfrac{1-\gamma}{1-\gamma-e(1+\gamma)}R$.

50.19. Точка движется под действием силы всемирного тяготения $F=m\mu/r^2$. Выразить постоянную энергии h (см. задачу 50.7) через элементы траектории точки и гравитационный параметр μ.

Ответ: $h=-\mu/a$ для эллиптической траектории (a — большая полуось эллипса), $h=0$ для параболической траектории и $h=\mu/a$ для гиперболической траектории (a — вещественная полуось гиперболы).



К задаче 50.20

50.20. В начальный момент материальная точка, движущаяся по закону всемирного тяготения, находилась в положении M_0 на расстоянии r_0 от притягивающего центра и имела скорость v_0; угол между вектором скорости $\boldsymbol{v}_0$ и линией горизонта (касательной, проведенной в точке M_0 к окружности, центр которой совпадает с центром притяжения) равнялся θ_0, а полярный угол был равен φ_0.

Определить эксцентриситет e и угол ε между полярной осью и фокусной линией конического сечения *).

Ответ: $e=\sqrt{1+\dfrac{c^2}{\mu^2}h}$, $\quad \operatorname{tg}(\varphi_0-\varepsilon)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta_0}{1-\dfrac{r_0}{p}}$, где $c=r_0v_0\cos\theta_0$ — интеграл площадей; $h=v^2-2\mu/r$ — интеграл энергии.

*) За положительное направление фокальной оси конического сечения принимается направление от полюса, совпадающего с одним из фокусов сечения, к ближайшей вершине.

50.21. Определить, какую скорость надо сообщить космическому аппарату, чтобы, достигнув высоты H над поверхностью планеты и отделившись от последней ступени ракеты, он двигался по эллиптической, параболической или гиперболической траектории. Радиус планеты R.

Ответ: $v_0 < v_2$ — траектория — эллипс,
$v_0 = v_2$ — » парабола,
$v_0 > v_2$ — » гипербола,

где $v_2 = \sqrt{2\frac{gR^2}{R+H}} = \sqrt{2}v_1$ — параболическая скорость на высоте H (v_1 — круговая скорость).

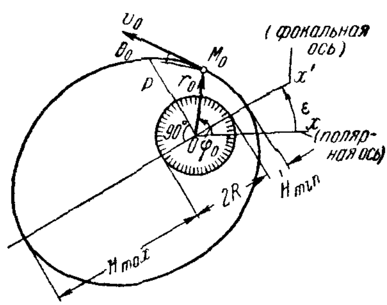
Указание. Воспользоваться ответом к предыдущей задаче.

50.22. В момент отделения космического аппарата от последней ступени ракеты он находился в точке M_0 на высоте $H = 230$ *км* от поверхности Земли и имел начальную скорость $v_0 = 8{,}0$ *км/сек*, причем вектор скорости $\boldsymbol{v}_0$ составлял с линией горизонта (касательной, проведенной в точке M_0 к окружности радиуса r_0) угол $\theta_0 = 0{,}02$ *рад*.

Определить постоянную площадей c, параметр p траектории и постоянную энергии h.

Ответ: $c = 52\,790$ *км²/сек*; $p = 7002$ *км*; $h = -56{,}6$ *км²/сек²*.

50.23. В условиях предыдущей задачи определить направление большой оси эллиптической траектории спутника, эксцентриситет e траектории, апогей и перигей (максимальное H_{max} и минимальное H_{min} удаление спутника от поверхности Земли) и период T обращения спутника.



К задачам 50.22 и 50.23.

Ответ: 1) $\varepsilon = \varphi_0 - 0{,}335$ *рад*, где φ_0 — начальный полярный угол радиус-вектора r_0;
2) $e = 0{,}0649$;
3) $H_{max} = 1120$ *км*, $H_{min} = 210$ *км*;
4) $T = 98{,}5$ *мин*.

50.24. При каком направлении начальной скорости космический аппарат упадет на поверхность планеты радиуса R вне зависимости от величины начальной скорости v_0?

Ответ: Если начальная скорость будет направлена внутрь конуса, описанного вокруг планеты из начальной точки.

50.25. При каких начальных условиях траектория космического аппарата, запущенного на высоте H от поверхности планеты радиуса R, не пересечет ее поверхности?

Ответ: 1) $v_0^2 > v_1^2 \frac{2RH}{(R+H)^2\cos^2\theta_0 - R^2}$, где v_1 — круговая скорость для данной планеты на высоте H.

2) Начальная скорость должна быть направлена вне конуса, описанного вокруг планеты из начальной точки.

50.26. Найти зависимость между периодами T_i обращения планет вокруг Солнца и большими полуосями a_i их эллиптических траекторий.

Ответ: $\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2}$ для любых планет (третий закон Кеплера).

50.27. Период обращения одного из спутников Юпитера, называемого Ио, равен 1,77 суток, причем радиус его орбиты составляет 5,91 радиуса Юпитера. Среднее расстояние Юпитер — Солнце равно 5,20 среднего расстояния Земля — Солнце ($5{,}20 \cdot 23\,000$ земных радиусов), а период обращения Юпитера вокруг Солнца равен 11 лет 314,84 суток.

Определить отношение массы Юпитера к массе Солнца (радиус Юпитера равен 11,14 радиуса Земли).

Ответ: Масса Юпитера в 1 000 раз меньше массы Солнца.

50.28. Под средним значением $[r]$ радиус-вектора точки, движущейся по эллиптической траектории, понимается величина, определяемая равенством

$$[r] = \frac{1}{T}\int_0^T r\,dt,$$

где T — период обращения.

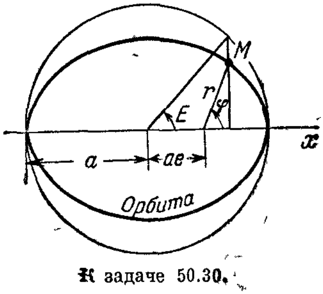
Определить среднее значение радиус-вектора планеты, если a — большая полуось, а e — эксцентриситет ее эллиптической траектории.

Ответ: $[r] = a\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)$.

50.29. Два спутника, имеющие равные массы, движутся в одном направлении вокруг притягивающего центра по компланарным орбитам, одна из которых — круговая радиуса r_0, а другая — эллиптическая с расстояниями перигея и апогея r_0 и $8r_0$ соответственно.

Полагая, что спутники путем непосредственной стыковки соединились друг с другом в точке соприкосновения их орбит и дальнейшее движение продолжали вместе, найти апогей их новой орбиты.

Ответ: $r_a = \frac{49}{23} r_0$.



К задаче 50.30.

50.30. Определить связь между истинной φ и эксцентрической E аномалиями точки на эллиптической орбите эксцентриситета e.

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

50.31. Выразить скорость в любой точке эллиптической орбиты через эксцентрическую аномалию.

Ответ: $v=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}}$.

50.32. Найти на эллиптической орбите такие точки, скорость движения в которых равна среднему геометрическому скоростей в перигее и апогее.

Ответ: $E=\pm\frac{\pi}{2}$ (точки расположены на концах малой оси эллипса).

50.33. Зная выражения для радиус-вектора точки, совершающей эллиптическое движение вокруг притягивающего центра:

$$\boldsymbol{r}=\frac{p}{1+e\cos\varphi}\boldsymbol{e}_r,$$
$$\boldsymbol{r}=a(1-e\cos E)\boldsymbol{e}_r,$$

где $\boldsymbol{e}_r$ — орт радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из центра притяжения, φ — истинная, а E — эксцентрическая аномалии, найти выражения для вектора орбитальной скорости этой точки, записанные в орбитальной и инерциальной системах координат.

Ответ: $\boldsymbol{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}[\boldsymbol{e}_r e\sin\varphi+\boldsymbol{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)]$;

$$\boldsymbol{v}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\boldsymbol{e}_1\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}+\boldsymbol{e}_2\frac{(1-e^2)\cos E}{1-e\cos E}\right],$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — орт, направленный из полюса в перигей, а $\boldsymbol{e}_2$ — орт перпендикулярного к $\boldsymbol{e}_1$ направления.

50.34. В какой точке эллиптической орбиты угол наклона траектории к местному горизонту (плоскость, перпендикулярная к радиус-вектору) достигает наибольшего значения?

Ответ: $E=\pm\frac{\pi}{2}$.

50.35. Спутник движется по круговой орбите радиуса r, делая один оборот за время T. В результате получения радиального импульса скорости величиной u он переходит на эллиптическую орбиту. Определить период обращения по эллиптической орбите.

Ответ: $T_1=\frac{T}{\left[1-\left(\frac{uT}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$.

50.36. Спутник движется по круговой орбите радиуса r, делая один оборот за время T. В результате получения тангенциального (касательного) импульса скорости величиной u он переходит на эллиптическую орбиту. Определить период обращения по эллиптической орбите T_1.

Ответ: $T_1=\frac{T}{\left[1-\left(\frac{uT}{2\pi r}\right)^2-\frac{uT}{\pi r}\right]^{3/2}}$.

50.37. Спутник движется по круговой околоземной орбите радиуса r. Определить величину радиального импульса скорости, в результате которого спутник перейдет на эллиптическую орбиту с перигеем r_1.

Ответ: $u=\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_1}}-\sqrt{\frac{r_1}{r}}\right)$.

50.38. Космический корабль движется со скоростью $v=30$ *км/сек* по орбите Земли, имеющей радиус $r_1=150\cdot10^6$ *км*. Какой касательный импульс скорости u он должен получить, чтобы в афелии своей новой орбиты он достиг орбиты Марса ($r_2=228\cdot10^6$ *км*)?

Решить такую же задачу для случая полета к орбите Венеры ($r_3=108\cdot10^6$ *км*).

Ответ: На орбиту Марса: $u=2{,}95$ *км/сек*;
на орбиту Венеры: $u=2{,}55$ *км/сек*.

50.39. Спутник движется по эллиптической околоземной орбите с радиусом перигея и апогея соответственно r_1 и r_2. Определить величину касательного прироста скорости u в перигее, при котором высота апогея увеличится на H.

Ответ: $u=\sqrt{\frac{2\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{r_2+H}{r_1+r_2+H}}-\sqrt{\frac{r_2}{r_1+r_2}}\right)$.

50.40. Космический корабль, движущийся по круговой спутниковой орбите, должен стартовать с нее путем получения касательного импульса скорости и выйти на гиперболическую орбиту с заданным значением скорости на бесконечности v_∞. При каком радиусе r_0 начальной круговой орбиты величина необходимого импульса u будет наименьшей?

Ответ: $r_0=\frac{2\mu}{v_\infty^2}$.

§ 51. Разные задачи

51.1. Две свободные точки, массы которых равны m_1 и m_2, движутся под действием сил взаимного притяжения. Определить закон движения первой точки относительно второй.

Ответ: Относительное движение происходит по тем же законам, что и абсолютное с гравитационным параметром

$$\mu=f(m_1+m_2).$$

51.2. Какой вид примет зависимость между периодами T_i обращения планет вокруг Солнца и большими полуосями a_i их эллиптических орбит, если учесть движение Солнца, вызванное притяжением соответствующей планеты?

Ответ: $\frac{a_1^3}{T_1^2}:\frac{a_2^3}{T_2^2}=\frac{M+m_1}{M+m_2}$, где m_1, m_2, M — массы планет и Солнца соответственно (сравнить с ответом к задаче 50.26).

51.3. Два однородных шара радиусов R_1 и R_2 начали двигаться из состояния покоя под действием сил взаимного притяжения. Определить, с какой относительной скоростью v_r столкнутся шары, если первоначальное расстояние между их центрами равнялось L, а массы шаров равны m_1 и m_2.

Ответ: $v_r = \sqrt{2\mu\left(\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{1}{L}\right)}$, где $\mu = f(m_1+m_2)$.

51.4. Две точки, массы которых равны m_1 и m_2, начали двигаться из состояния покоя под действием сил взаимного притяжения. Определить время T, через которое столкнутся точки, если первоначальное расстояние между ними равнялось L.

Ответ: $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L^3}{2\mu}}$, где $\mu = f(m_1+m_2)$.

51.5. Две свободные точки, массы которых равны m_1 и m_2, движутся под действием сил взаимного притяжения. Определить закон движения точек относительно их центра масс C.

Ответ: Движение по отношению к центру масс происходит по тем же законам, что и абсолютное движение с гравитационными параметрами $\mu_1 = f\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}$ и $\mu_2 = f\frac{m_1^3}{(m_1+m_2)^3}$.

51.6. Проекция центральной силы на радиус-вектор равна $-\left(\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right)$, где $\mu > 0$ и ν — некоторые постоянные. Определить траекторию движущейся точки.

Ответ: 1) $\nu < c^2$, $r = \frac{p}{1+e\cos k(\varphi-\varepsilon)}$, где $c = r^2\dot\varphi = \text{const}$, $p = \frac{c^2-\nu}{\mu}$, $k^2 = 1-\frac{\nu}{c^2}$, e и ε — произвольные постоянные;

2) $\nu = c^2$, $\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\varphi^2}{2}+C_1\varphi+C_2$, C_1 и C_2 — постоянные интегрирования;

3) $\nu > c^2$, $r = \frac{p}{1+e\operatorname{ch} k(\varphi-\varepsilon)}$, где $p = -\frac{\nu-c^2}{\mu}$, $k^2 = \frac{\nu}{c^2}-1$, e и ε — произвольные постоянные.

51.7. Космический аппарат массы m приближается к планете по прямой, проходящей через ее центр. На какой высоте H от поверхности планеты нужно включить двигатель, чтобы создаваемая им постоянная тормозящая сила, равная mT, обеспечила мягкую посадку (посадку с нулевой скоростью)? Скорость космического аппарата в момент включения двигателя равна v_0, гравитационный параметр планеты μ, ее радиус R; притяжением других небесных тел, сопротивлением атмосферы и изменением массы двигателя пренебречь.

Ответ: $H = \frac{1}{2T}\left\{\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{R}+TR+\frac{v_0^2}{2}\right)^2 - 4\mu T}\right\} - R$, знак плюс, если $T > \mu/R^2$, и знак минус, если $T < \mu/R^2$.

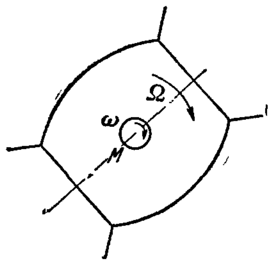
51.8. Определить полезную работу, которую должен совершить двигатель ракеты, чтобы поднять космический аппарат на высоту H над поверхностью планеты и сообщить ему на этой высоте круговую и параболическую космические скорости. Вес космического аппарата на поверхности планеты равен G, радиус планеты R; сопротивлением атмосферы пренебречь.

Вычислить эту работу для второй космической скорости для Земли, если вес аппарата равен 5 *т*.

Ответ: $A_1 = GR\frac{R+2H}{2(R+H)}$; $A_2 = GR$,

$A_2 = 31\,850$ *т км* $= 31{,}85 \cdot 10^9$ *кГм*.

51.9. Космический аппарат вращается с угловой скоростью Ω_0. Определить, какую полную работу должен совершить двигатель маховика M, чтобы остановить вращение космического аппарата,



К задаче 51.9.

считая, что вращение последнего происходит вокруг поступательно перемещающейся оси, проходящей через его центр масс. Ось вращения маховика совпадает с осью вращения аппарата; J и J_0 — моменты инерции маховика и аппарата (вместе с маховиком) относительно общей оси вращения.

Ответ: $A = \frac{1}{2}\frac{J_0(J_0-J)}{J}\Omega_0^2$.

51.10. Считая, что статор электромотора системы, описанной в задаче 51.9, создает вращающий момент $M_{вр} = M_0 - \varkappa\omega$, где M_0 и $\varkappa$—некоторые положительные постоянные, найти условие, необходимое для того, чтобы торможение вращения космического аппарата произошло за конечное время. Предполагая, что это условие выполнено, определить время T торможения.

Ответ: $M_0 > \alpha(J_0 - J)\Omega_0$, $T = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{M_0}{M_0 - \alpha(J_0-J)\Omega_0}$, где $\alpha = \varkappa\frac{J_0}{J(J_0-J)}$.

51.11. Определить угол ψ, на который повернется космический аппарат за время торможения вращения, если оно осуществляется способами, описанными в задачах 51.9 и 51.10.

Ответ: $\psi = \frac{\Omega_0}{\alpha} - \frac{M_0 - \alpha(J_0-J)\Omega_0}{\alpha^2(J_0-J)}\ln\frac{M_0}{M_0-\alpha(J_0-J)\Omega_0}$.

51.12. Для поворота корпуса космического аппарата используется электродвигатель-маховик, уравнение движения которого на вращающемся аппарате имеет вид $\dot{\omega} + \omega/T = u$, где ω — относительная угловая скорость маховика, T — его постоянная времени, u — управляющее напряжение, принимающее значения $\pm u_0$.

Определить длительность t_1 разгона ($u=u_0$) и торможения t_2 ($u=-u_0$) маховика, если первоначально невращающийся корпус при неподвижном маховике требуется повернуть на заданный угол φ и остановить. Ось вращения маховика проходит через центр масс космического аппарата; движение считать плоским. Моменты инерции маховика и аппарата относительно общей оси вращения соответственно равны J и J_0.

Ответ: $t_1=\tau+T\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}}\right)$;

$$t_2=T\ln\left(1+\sqrt{1-e^{-\tau/T}}\right), \text{ где } \tau=\frac{J_0\varphi}{Ju_0T}.$$

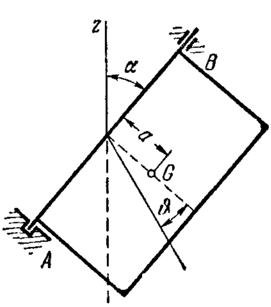
ГЛАВА XIII

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ, ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ, УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

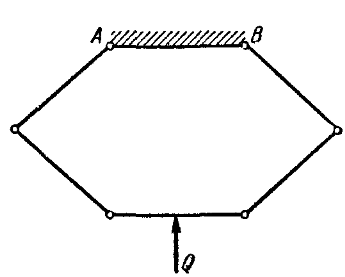
§ 52. Определение условий равновесия системы. Устойчивость равновесия

52.1 (1162). Ось вращения AB прямоугольной пластины наклонена под углом α к вертикали. Определить момент сил M относительно оси AB, который нужно приложить к пластине для ее поворота на угол ϑ. Вес пластины P; расстояние от центра тяжести G пластины до оси AB равно a.

Ответ: $M = Pa \sin\alpha \sin\vartheta$.



К задаче 52.1.



К задаче 52.2.

52.2 (1163). Шарнирный шестиугольник, состоящий из шести равных однородных стержней весом p каждый, расположен в вертикальной плоскости. Верхняя сторона шестиугольника AB неподвижно закреплена в горизонтальном положении; остальные стороны расположены симметрично по отношению к вертикали, проходящей через середину AB. Определить, какую вертикальную силу Q надо приложить в середине горизонтальной стороны, противоположной AB, для того чтобы система находилась в безразличном равновесии.

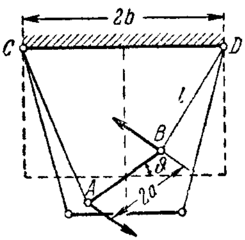
Ответ: $Q = 3p$.

52.3 (1164). К однородному стержню AB длиной $2a$ и весом Q, подвешенному на двух нитях длиной l каждая, приложена пара сил с моментом M. Точки подвеса нитей, расположенные на одной горизонтали, находятся на расстоянии $2b$ друг от друга. Найти угол ϑ, определяющий положение равновесия стержня.

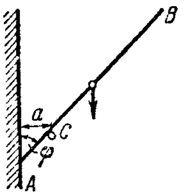
Ответ: В положении равновесия угол ϑ находится из уравнения

$$M\sqrt{l^2-(a-b)^2-4ab\sin^2\frac{\vartheta}{2}}=Qab\sin\vartheta.$$

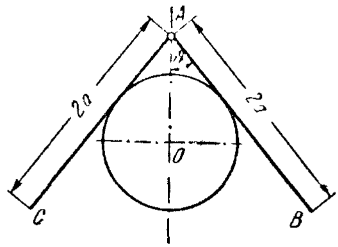
52.4 (1165). Прямолинейный однородный стержень AB длиной $2l$ упирается нижним концом A в вертикальную стену, составляя с ней угол φ. Стержень опирается также на гвоздь C, параллельный стене.



К задаче 52.3.



К задаче 52.4.



К задаче 52.5.

Гвоздь отстоит от стены на расстоянии a. Определить угол φ в положении равновесия стержня.

Ответ: $\sin\varphi=\sqrt[3]{\frac{a}{l}}$.

52.5 (1166). На гладкий цилиндр радиуса r опираются два однородных весомых стержня, соединенных шарниром A. Длина каждого стержня равна $2a$. Определить угол 2ϑ раствора стержня, соответствующий положению равновесия.

Ответ: Угол ϑ определяется из уравнения $a\operatorname{tg}^3\vartheta-r\operatorname{tg}^2\vartheta-r=0$.

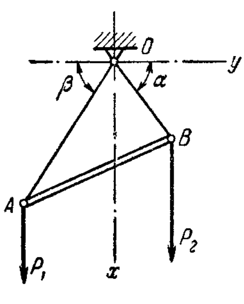
52.6 (1167). На нерастяжимой нити, перекинутой через бесконечно малый блок, висит невесомый стержень, к концам которого прикреплены грузы P_1 и P_2. Длина стержня l, длина нити L. Определить положения равновесия системы.

Ответ: В одном положении равновесия $\alpha=\beta$ и $\frac{OA}{OB}=\frac{P_2}{P_1}$; в другом положении равновесия

$$y_1=y_2=0,\quad x_1=\frac{1}{2}(L+l),\quad x_2=\frac{1}{2}(L-l),$$

и, наконец, в третьем положении равновесия

$$y_1=y_2=0,\quad x_1=\frac{1}{2}(L-l),\quad x_2=\frac{1}{2}(L+l).$$



К задаче 52 6.

52.7 (1168). Концы однородного весомого стержня длиной l могут скользить без трения по кривой, заданной уравнением $f(x, y)=0$.

Определить положения равновесия стержня. (Ось y направлена по вертикали вверх, ось x — по горизонтали вправо.)

Ответ: Координаты концов стержня, отвечающие положениям равновесия, будут решениями системы

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0, \quad f(x_1, y_1)=0, \; f(x_2, y_2)=0,$$

$$2(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}=(x_2-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right].$$

52.8 (1169). Однородный весомый стержень длиной l может скользить своими концами без трения по параболе $y=ax^2$. Определить возможные положения равновесия. (Ось y направлена по вертикали вверх, ось x — по горизонтали вправо.)

Ответ: Первое положение равновесия:

$$x_2=-x_1=\frac{l}{2}, \quad y_1=y_2=a\frac{l^2}{4}.$$

Второе положение равновесия определяется из уравнения $\operatorname{ch}\xi=\sqrt{al}$ по формулам

$$x_1=-\frac{1}{2a}e^{-\xi}, \quad y_1=\frac{1}{4a}e^{-2\xi}, \quad x_2=\frac{1}{2a}e^{\xi}, \quad y_2=\frac{1}{4a}e^{2\xi}.$$

52.9 (1170). Решить задачу 52.7 в предположении, что кривая является эллипсом $\left(f(x, y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\right)$, а длина стержня удовлетворяет условию $l<2a$. Определить возможные положения равновесия стержня.

Указание. Вместо декартовых координат следует ввести координату φ (эксцентрическую аномалию) с помощью соотношений $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$.

Ответ: Положения равновесия отвечают значениям эксцентрических аномалий, определяемым из уравнений:

а) $\varphi_1=2\pi-\varphi_2$, $\sin\varphi_2=\sqrt{\frac{l}{2b}}$ (существует при $l\leqslant 2l$);

б) $\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=\sqrt{\frac{l}{2a}}$, $\cos\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{l}{2a}}{1-\frac{b^2}{a_2}}}$ (существует при $a>b$ и $l<2a$).

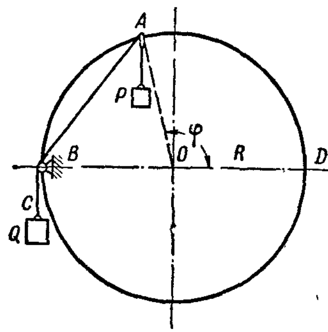
52.10 (1171). По гладкому проволочному кольцу радиуса R, расположенному в вертикальной плоскости, может скользить без трения колечко A. К этому колечку на нити подвешен груз весом P; другая нить, перекинутая через ничтожно малый блок B, расположенный на конце горизонтального диаметра большого кольца, имеет на конце C другой груз весом Q. Определить положения равновесия колечка A и исследовать, какие из них устойчивы, какие нет.

Указание. Положение колечка A следует характеризовать центральным углом $\varphi=\angle DOA$. Надо отдельно рассматривать равновесие колечка на верхней и нижней полуокружностях.

Ответ: На верхней полуокружности ($0<\varphi<\pi$) при любых значениях Q/P существует положение неустойчивого равновесия $\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+8}-\frac{Q}{P}\right)$, причем $0<\varphi_0<\pi/2$. На нижней полуокружности ($\pi<\varphi<2\pi$) при $Q/P\leqslant 1$ существует положение устойчивого равновесия

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{Q^2}{P^2}+8}+\frac{Q}{P}\right),$$

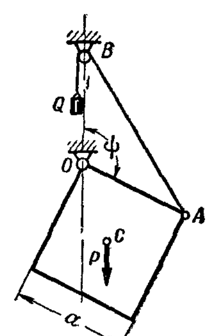
причем $\pi<\varphi_0<\frac{3\pi}{2}$.



К задаче 52.10.

52.11 (1172). Однородная квадратная пластинка может вращаться в вертикальной плоскости около оси, проходящей через угол O; вес пластинки P, длина ее стороны a. К углу A пластинки привязана нить длиной l, перекинутая через малый блок B, отстоящий на расстоянии a по вертикали от точки O. На нити висит груз веса $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}P$. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

Ответ: Положения равновесия отвечают следующим значениям угла ψ: $\psi_1=\pi/6$, $\psi_2=\pi/2$, $\psi_3=3\pi/2$. Второе и третье положения равновесия устойчивы.



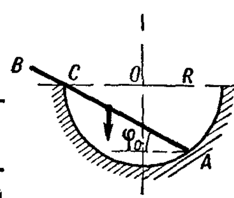
К задаче 52.11.

52.12 (1173). Однородный весомый стержень AB длиной $2a$ опирается на криволинейную направляющую, имеющую форму полуокружности радиуса R. Определить, пренебрегая трением, положение равновесия и исследовать его устойчивость.

Ответ: В положении равновесия стержень наклонен к горизонтальной линии под углом φ_0, определяемым из уравнения

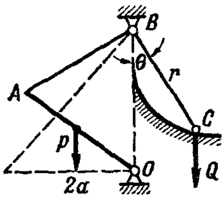
$$\cos\varphi_0=\frac{1}{8R}\left[a+\sqrt{a^2+32R^2}\right]$$

$\left(\text{предполагается, что } \sqrt{\frac{2}{3}}R<a<2R\right)$. Это положение равновесия устойчиво.



К задаче 52.12.

52.13 (1174). Подъемный мост OA схематически изображен на чертеже в виде однородной пластины весом P и длиной $2a$. К середине края пластины прикреплен канат длиной l, перекинутый через малый блок, лежащий на вертикали на расстоянии $2a$ над точкой O. Другой конец C каната соединен с противовесом, скользящим без трения по криволинейной направляющей. Определить форму этой направляющей и вес противовеса Q так, чтобы система находилась в безразличном равновесии. При горизонтальном положении моста противовес C находится на прямой OB.

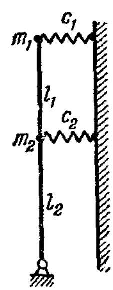


К задаче 52.13.

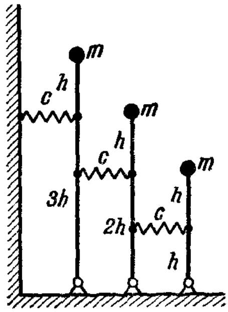
Ответ: $Q=\frac{P}{\sqrt{2}}$; уравнение направляющей в полярных координатах r, ϑ:

$$r^2=2\left(l-2\sqrt{2}\,a\cos\vartheta\right)r+4\sqrt{2}\,al-l^2-8a^2.$$

52.14 (1175). Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия «обращенного» двойного маятника, изображенного на чертеже. Маятник может быть схематизирован в виде двух материальных точек масс m_1 и m_2, связанных стержнями длиной l_1 и l_2. В вертикальном положении равновесия пружины (жесткости их c_1 и c_2) не напряжены.



К задаче 52.14.



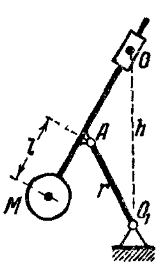
К задаче 52 15.

Ответ: Условия устойчивости имеют вид

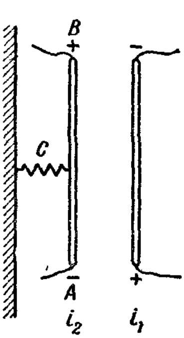
$$c_1 l_1 > m_1 g;$$

$$[(c_1+c_2)\,l_2-$$
$$-(m_1+m_2)g]\cdot[c_1l_1-m_1g]>c_1^2l_1l_2.$$

52.15 (1176). Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия системы маятников, изображенной на чертеже; длина стержня первого маятника $4h$, второго $3h$ и третьего $2h$. Массы всех маятников и жесткости пружин одинаковы и соответственно равны m и c. Расстояния точек прикрепления пружин от центров тяжести масс равны h. Массой стержней пренебречь, а массы m рассматривать как материальные точки; когда маятники находятся в вертикальном положении, пружины не напряжены.



К задаче 52.16.



К задаче 52.17.

Ответ: Условия устойчивости имеют вид

$$13ch^2-4mgh>0;$$

$$49c^2h^4-59mgch^3+12m^2g^2h^2>0;$$

$$36c^3h^6-153mgc^2h^5+$$
$$+130m^2g^2ch^4-24m^3g^3h^3>0.$$

52.16 (1177). В маятнике паллографа груз M подвешен на стержне OM, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик O и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1, вращающимся около оси O_1. Длина коромысла r; расстояние от центра тяжести груза до шарнира A равно l; расстояние $OO_1=h$. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Размерами груза и весом стержней пренебречь.

Ответ: При $\sqrt{rl}>h-r$ положение равновесия устойчиво; при $\sqrt{rl}<h-r$ неустойчиво.

52.17 (1178). Прямолинейный проводник, по которому течет ток силой i_1, притягивает параллельный ему провод AB, по которому течет ток силой i_2. Провод AB имеет массу m; к нему присоединена пружина жесткости c; длина каждого из проводов l. При отсутствии в проводе AB тока расстояние между проводами равно a. Определить положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.

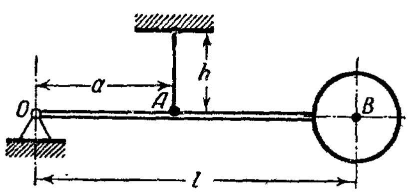
Указание. Сила взаимодействия двух параллельных проводников с токами i_1 и i_2 длиной l, отстоящих на расстоянии d друг от друга, определяется по формуле $F=\frac{2i_1i_2}{d}l$.

Ответ: При $\alpha=\frac{2i_1i_2l}{c}<\frac{a^2}{4}$ имеются **два положения** равновесия: $x_1=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-\alpha}$ и $x_2=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-\alpha}$; x_1 отвечает устойчивому положению равновесия, x_2 — неустойчивому. При $\alpha>a^2/4$ положений равновесия нет. При $\alpha=a^2/4$ имеем единственное положение равновесия, которое неустойчиво.

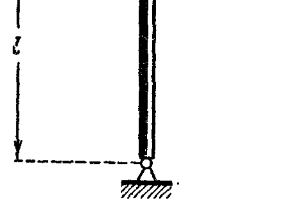
§ 53. Малые колебания системы с одной степенью свободы

53.1 (1243). Жесткий стержень OB длиной l может свободно качаться на шаровом шарнире около конца O и несет шарик весом Q на другом конце. Стержень удерживается в горизонтальном положении посредством нерастяжимого вертикального шнура длиной h. Расстояние $OA=a$. Если шарик оттянуть перпендикулярно к плоскости чертежа и затем отпустить, то система начнет колебаться. Пренебрегая массой стержня, определить период малых колебаний системы.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{hl}{ag}}$.



К задаче 53.1.



К задаче 53.2.

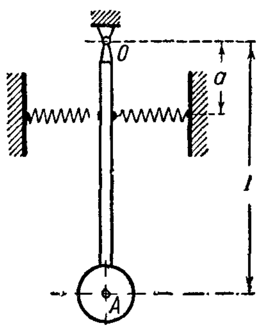
53.2 (1244). Определить период малых колебаний астатического маятника, употребляемого в некоторых сейсмографах для записи колебаний почвы. Маятник состоит из жесткого стержня длиной l, несущего на конце массу m, зажатую между двумя горизонтальными пружинами жесткости c с закрепленными концами. Массой стержня пренебречь и считать пружины в положении равновесия ненапряженными.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\dfrac{c}{m} - \dfrac{g}{l}}}$.

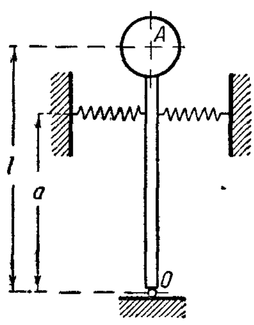
53.3 (1245). Маятник состоит из жесткого стержня длиной l, несущего массу m на своем конце. К стержню прикреплены две пружины жесткости c на расстоянии a от его верхнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, найти период малых колебаний маятника.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} + \dfrac{g}{l}}}$.

53.4 (1246). Предполагая, что маятник, описанный в предыдущей задаче, установлен так, что масса m расположена выше точки под-



К задаче 53.3.

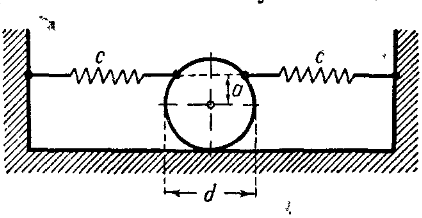


К задаче 53.4.

веса, определить условие, при котором вертикальное положение равновесия маятника устойчиво, и вычислить период малых колебаний маятника.

Ответ: $a^2 > \dfrac{mgl}{2c}$;

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}}}.$$



К задаче 53.5.

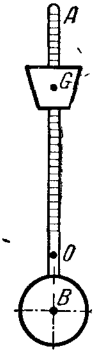
53.5 (1247). Цилиндр диаметром d и массой m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жесткости c прикреплены посредине его длины на расстоянии a от оси цилиндра; противоположные концы пружин закреплены. Определить период малых колебаний цилиндра.

Ответ: $T = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{1 + 2\dfrac{a}{d}}\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

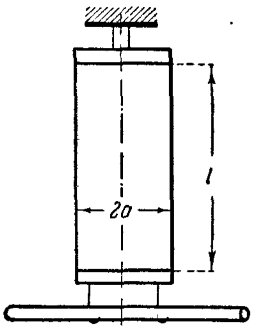
53.6. Определить период малых колебаний метронома, состоящего из маятника и добавочного подвижного груза G массы m. Момент инерции всей системы относительно горизонтальной оси вращения изменяется путем смещения подвижного груза G. Масса маятника M; расстояние центра тяжести маятника от оси вращения O равно s_0; расстояние $OG = s$; момент инерции маятника относительно оси вращения J_0.

Ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ms^2}{(Ms_0 - ms)g}}.$$



К задаче 53.6.



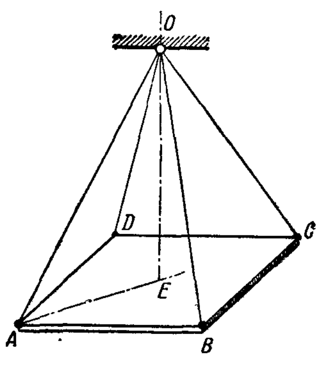
К задаче 53.7.

53.7 (1249). Тело, подвешенное на двух вертикальных нитях длиной l каждая, расстояние между которыми $2a$, закручивается вокруг вертикальной оси, лежащей в плоскости нитей и равноудаленной от них (бифилярный подвес). Радиус инерции тела относительно оси вращения ρ. Найти период малых колебаний.

Ответ: $T = 2\pi \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{l}{g}}$.

53.8 (1250). Круглый обруч подвешен к трем неподвижным точкам тремя одинаковыми нерастяжимыми нитями длиной l так, что плоскость обруча горизонтальна. Нити в положении равновесия обруча вертикальны и делят окружность обруча на три равные части. Найти период малых колебаний обруча вокруг оси, проходящей через центр обруча.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

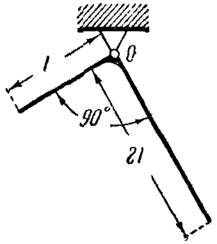


К задаче 53.9.

53.9 (1251). Тяжелая квадратная платформа $ABCD$ массы M подвешена на четырех упругих канатах, жесткости c каждый, к неподвижной точке O, отстоящей в положении равновесия системы на расстоянии l по вертикали от центра E платформы. Длина диагонали платформы a. Определить период вертикальных колебаний системы.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c} \frac{(a^2 + 4l^2)}{16l^2} \frac{1}{1 + \frac{Mga^2}{16cl^3}}}$.

53.10 (1252). Уголок, составленный из тонких однородных стержней длиной l и $2l$ с углом между стержнями 90°, может вращаться вокруг точки O. Определить период малых колебаний уголка около положения равновесия.



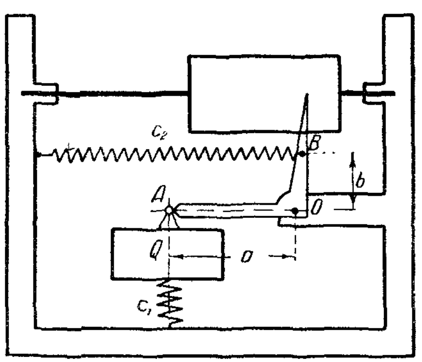
К задаче 53.10.

Ответ: $T = 2\pi \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{17}} \sqrt{\frac{l}{g}} = 7{,}53 \sqrt{\frac{l}{g}}$.

53.11 (1253). Определить период малых свободных колебаний маятника веса Q, ось вращения которого образует угол β с горизонтальной плоскостью. Момент инерции маятника относительно оси вращения J, расстояние центра тяжести от оси вращения s.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Qs\cos\beta}}$.

53.12 (1254). В приборе для регистрации вертикальных колебаний фундаментов машин груз весом Q, закрепленный на вертикальной пружине, коэффициент жесткости которой c_1, шарнирно соединен со статически уравновешенной стрелкой, выполненной в виде ломаного рычага с моментом инерции J относительно оси вращения O и отжимаемой к равновесному положению горизонтальной пружиной с коэффициентом жесткости c_2. Определить период свободных колебаний стрелки около ее вертикального равновесного положения, если $OA = a$ и $OB = b$. Размерами груза и влиянием первоначального натяжения пружины пренебречь.



К задаче 53.12.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\frac{Jg + Qa^2}{g(c_1a^2 + c_2b^2)}}$.

53.13 (1256). Амортизационное устройство может быть схематизировано в виде материальной точки массы m, соединенной n пружинами жесткости c с вершинами правильного многоугольника. Длина каждой пружины в ненапряженном состоянии a, радиус окружности, описанной около многоугольника, b. Определить частоту горизонтальных свободных колебаний системы, расположенной в горизонтальной плоскости.

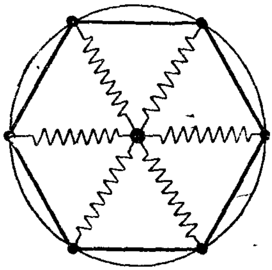
Указание. Для вычисления потенциальной энергии с точностью до величин второго порядка малости включительно следует определить удлинение пружин с той же степенью точности.

Ответ: $k = \sqrt{\frac{nc}{2m} \frac{2b - a}{b}}$.

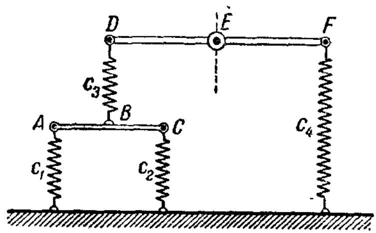
53.14 (1257). В предыдущей задаче определить частоту колебаний, перпендикулярных к плоскости многоугольника. Силами тяжести пренебречь.

Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{nc(b-a)}{mb}}$.

53.15 (1258). Определить частоту малых вертикальных колебаний материальной точки E, входящей в состав системы, изображенной на



К задаче 53.13.

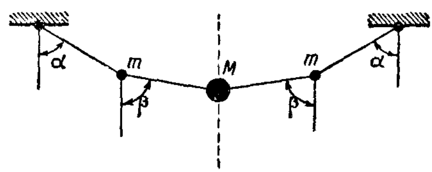


К задаче 53.15.

чертеже. Масса материальной точки m. Расстояния $AB=BC$ и $DE=EF$; жесткости пружин c_1, c_2, c_3, c_4 заданы. Бруски AC и DF считать жесткими, не имеющими массы.

Ответ: $k=$

$$=\sqrt{\frac{4}{m\left(\frac{1}{4c_1}+\frac{1}{4c_2}+\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}\right)}}.$$



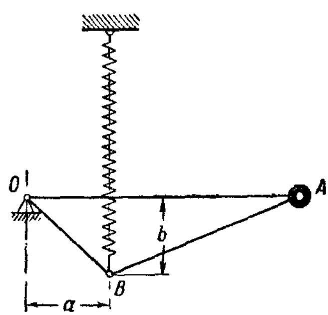
К задаче 53.16.

53.16 (1259). На нерастяжимой нити длиной $4a$ находятся три груза, массы которых соответственно равны m, M, m. Нить симметрично подвешена за концы так, что ее начальный и конечный участки образуют углы α с вертикалью, а средние участки — углы β. Груз M совершает малые вертикальные колебания. Определить частоту свободных вертикальных колебаний груза M.

Ответ:

$$k=\sqrt{\frac{g(\cos^2\beta\sin\beta+\cos^2\alpha\sin\alpha)}{a\cos\beta\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta-\alpha)}};$$

при этом $2m=\dfrac{M\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$.



К задаче 53.17.

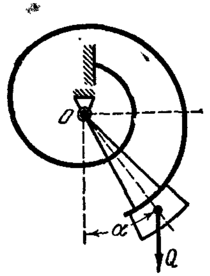
53.17 (1260). Вертикальный сейсмограф Б. Б. Голицина состоит из рамки AOB, на которой укреплен груз веса Q. Рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси O. В точке B рамки, отстоящей от O на расстоянии a, прикреплена пружина жесткости c, работающая на растяжение. В положении равновесия стержень OA горизонтален.

Момент инерции рамки и груза относительно O равен J, высота рамки b. Пренебрегая массой пружины и считая, что центр тяжести груза и рамки находится в точке A, отстоящей от O на расстоянии l, определить период малых колебаний маятника.

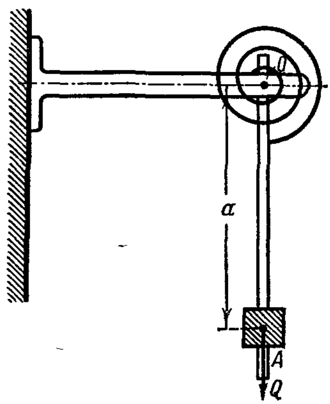
Ответ: $k=\sqrt{\dfrac{ca^2-F_0b\left(1-\dfrac{b}{L}\right)}{J}}$, где $F_0=Q\dfrac{l}{a}$ — натяжение пружины в положении равновесия, L — длина пружины в положении равновесия.

53.18 (1261). В вибрографе, предназначенном для записи колебаний фундаментов, частей машин и т. п., маятник веса Q удерживается под углом α к вертикали с помощью спиральной пружины жесткости c; момент инерции маятника относительно оси вращения O равен J; расстояние центра тяжести маятника от оси вращения s. Определить период свободных колебаний вибрографа.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\alpha+c}}$.

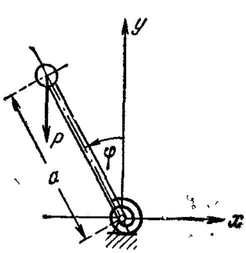


К задаче 53.18.



К задаче 53.19.

53.19 (1262). В вибрографе для записи горизонтальных колебаний маятник OA, состоящий из рычага и груза, может качаться вокруг горизонтальной оси O около вертикального положения устойчивого равновесия, удерживаясь в этом положении собственным весом и спиральной пружиной. Зная максимальный статический момент веса маятника $Qa=4{,}5$ *кГсм*, момент инерции относительно оси O $J=0{,}03$ *кГ см сек*^{2} и коэффициент жесткости пружины $c=4{,}5$ *кГ/см*, определить период собственных колебаний маятника при малых углах отклонения.



К задаче 53.20.

Ответ: $T=0{,}364$ *сек.*

53.20. Найти, при каком условии верхнее вертикальное положение равновесия маятника является устойчивым, если свободному вращению маятника препятствует спиральная пружина жесткости c, установленная так, что при верхнем вертикальном положении маятника она не напряжена. Вес маятника P. Расстояние от центра тяжести маятника до точки подвеса равно a.

Найти также период малых колебаний маятника, если его момент инерции относительно оси вращения равен J_0.

Ответ: $c > Pa$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{c - Pa}}$.

53.21. Показать, что при $c < Pa$ маятник, рассмотренный в предыдущей задаче, будет иметь не менее трех положений равновесия. Найти также период малых колебаний.

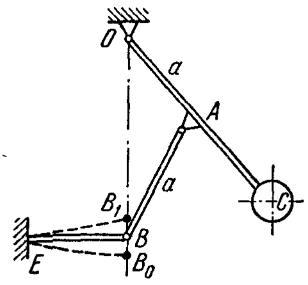
Ответ: При $\varphi = 0$ неустойчивое положение равновесия. Устойчивые положения равновесия будут при $\varphi = \varphi_0 > 0$, $\varphi = \varphi_0 < 0$, где φ_0 — корень уравнения $\sin\varphi = \frac{c}{Pa}\varphi$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0\varphi_0}{Pa\cos\varphi_0(\operatorname{tg}\varphi_0 - \varphi_0)}}.$$

53.22 (1263). Стержень OA маятника при помощи шатуна AB соединен с маленькой стальной рессорой EB жесткости c. В ненапряженном состоянии рессора занимает положение EB_1; известно, что к рессоре нужно приложить силу F_0, направленную по OB, чтобы привести ее в положение EB_0, соответствующее равновесию маятника; $OA = AB = a$; массой стержней пренебрегаем; расстояние центра тяжести маятника от оси вращения $OC = l$; вес маятника Q. С целью достижения наилучшего изохронизма (независимость периода колебаний от угла первоначального отклонения) система отрегулирована так, чтобы в уравнении движения маятника

$$\ddot{\varphi} = f(\varphi) = -\beta\varphi + \ldots$$

первый из отброшенных членов был порядка φ^5. Установить, какая зависимость должна для этого иметь место между постоянными Q, F_0, c, a, l, и вычислить период малых колебаний маятника.



К задаче 53.22.

Ответ: $Ql - 2aF_0 = 12a^2c$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2aF_0}{Ql}}}$.

53.23 (1264). Показать, что при условии предыдущей задачи увеличение периода колебаний при отклонениях маятника от положения равновесия на угол $\varphi_0 = 45°$ не превышает $0{,}4\%$. Каково будет при этих условиях изменение периода простого маятника?

Ответ: Сохраняя в уравнении движения маятника член φ^5, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2aF_0}{Ql}}}\left(1 + \frac{\varphi_0^4}{96}\right);$$

для простого маятника при отклонении на угол 45° изменение периода составляет 4%.

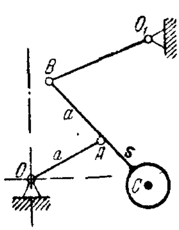
53.24 (1265). При условиях задачи 53.22 маятник отрегулирован так, что $Ql = 2aF_0$. Найти период малых колебаний маятника при отклонении его от положения равновесия на угол φ_0.

Ответ: $T = \frac{4l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 5{,}24\,\frac{l}{a\varphi_0}\sqrt{\frac{Q}{cg}}$.

53.25 (1266). В маятнике паллографа груз M маятника повешен на стержне, свободно проходящем через вращающийся цилиндрик O и шарнирно соединенном в точке A с коромыслом AO_1, качающимся вокруг неподвижной оси O_1. При каком условии вертикальное положение стержня OM маятника будет положением устойчивого равновесия? Найти период малых колебаний маятника около этого положения. Размерами груза и весом стержней пренебречь. (Размеры стержней указаны на чертеже к задаче 52.16.)

Ответ: $h - r < \sqrt{rl}$; $T = 2\pi(h - r + l)\sqrt{\frac{r}{[rl-(h-r)^2]g}}$.

53.26 (1267). Пренебрегая массой стержней, найти период малых колебаний маятника, изображенного на чертеже. Центр тяжести груза находится на продолжении шатуна шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ прямолинейно-направляющего механизма. В положении равновесия стержни OA и BC вертикальны, стержень O_1B горизонтален: $OA = AB = a$; $AC = s$.



К задаче 53.26.

Ответ: $T = 2\pi\frac{s+a}{\sqrt{g(s-a)}}$.

53.27 (1268). Определить период колебания груза весом P, подвешенного на пружине с закрепленным верхним концом, если коэффициент жесткости пружины равен c, вес пружины P_0.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{P + \frac{1}{3}P_0}{cg}}$.

53.28 (1269). На нижнем конце вертикального цилиндрического упругого стержня с закрепленным верхним концом прикреплен в своем центре горизонтальный диск с моментом инерции J относительно вертикальной оси, проходящей через центр; момент инерции стержня относительно его оси равен J_0; коэффициент жесткости стержня при закручивании, т. е. момент, необходимый для закручивания нижнего конца стержня на один радиан, равен c. Определить период колебаний системы.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{J + \frac{1}{3}J_0}{c}}$.

53.29 (1270). Груз весом Q укреплен посредине балки, свободно опертой на концах; длина балки l, момент инерции поперечного сечения J, модуль упругости материала E. Определить, пренебрегая весом балки, число колебаний, совершаемых грузом в минуту.

Ответ: $n = 2080\sqrt{\frac{EJ}{Ql^3}}$, причем за единицу длины принят сантиметр.

53.30 (1271). Груз весом Q укреплен посредине свободно опертой на концах балки; длина балки l, момент инерции ее поперечного сечения J, модуль упругости материала E, вес балки Q_1. Определить (приближенно) число свободных колебаний, совершаемых грузом в минуту.

Ответ: $n = 2080\sqrt{\frac{EJ}{\left(Q+\frac{17}{35}\right)l^3}}$, причем за единицу длины принят сантиметр.

53.31 (1272). Подмоторный груз прямоугольного сечения нагружен посередине грузом $Q = 600$ *кГ* и оперт концами. Момент инерции поперечного сечения бруса $J = 210$ *см*^{4}, его погонный вес $q = 11$ *кГ/м*, длина $l = 200$ *см*; модуль упругости материала бруса $E = 2 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}. Определить частоту колебаний бруса с учетом и без учета его массы.

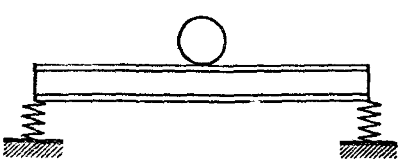
Ответ: $k_1 = 63{,}4$ *сек*$^{-1}$; $k_2 = 64{,}0$ *сек*$^{-1}$.

53.32 (1273). Подкрановая балка с погонным весом $q = 49$ *кГ/м*, с моментом инерции поперечного сечения $J = 8360$ *см*^{4}, длиной $l = 10$ *м* нагружена посредине грузом $Q = 700$ *кГ* и оперта по концам; модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}. Найти частоту колебаний балки с учетом и без учета ее массы.

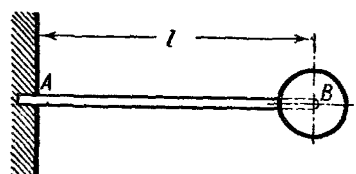
Ответ: $k_1 = 4{,}56$ *сек*$^{-1}$; $k_2 = 5{,}34$ *сек*$^{-1}$.

53.33 (1274). Двутавровая балка с моментом инерции сечения $J = 180$ *см*^{4}, длиной $l = 4$ *м* лежит на двух одинаковых упругих опорных пружинах, жесткость которых $c = 150$ *кГ/см*, и несет посредине груз весом $Q = 200$ *кГ*. Пренебрегая весом балки, определить период свободных колебаний системы. Модуль упругости материала балки $E = 2 \cdot 10^6$ *кГ/см*^{2}.

Ответ: $T = 0{,}238$ *сек*.



К задаче 53.33.

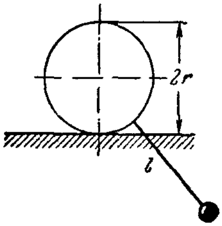


К задаче 53.34.

53.34 (1275). На конце B горизонтального стержня AB длиной l, заделанного другим концом, находится груз весом Q, совершающий колебания с периодом T. Момент инерции сечения стержня относительно центральной оси сечения, перпендикулярной к плоскости колебаний, равен J. Определить модуль упругости материала стержня.

Ответ: $E = \frac{4\pi^2 Ql^3}{3JgT^2}$.

53.35. Диск массы M и радиуса r может катиться без скольжения по горизонтальной прямой. К диску жестко прикреплен невесомый стержень длиною l, на конце которого находится точечная масса m.

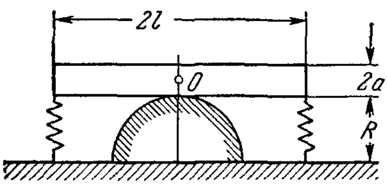


К задаче 53.35.

Найти период малых колебаний системы.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{3Mr^2+2ml^2}{2mg(r+l)}}$.

53.36. На шероховатый круглый полуцилиндр радиуса R положен призматический брусок массы M с прямоугольным поперечным сечением. Продольная ось бруска перпендикулярна к оси цилиндра. Длина бруска $2l$, высота $2a$. Концы бруска соединены с полом пружинами одинаковой жесткости c. Предполагая, что брусок не скользит по цилиндру, найти период его малых колебаний. Момент инерции бруска относительно поперечной горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, равен J_0.



К задаче 53.36.

Ответ:

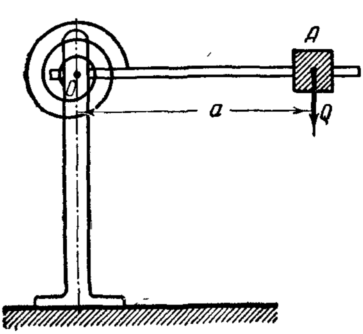
$$T=2\pi\sqrt{\frac{Ma^2+J_0}{Mg(R-a)+2cl^2}}.$$

53.37 (1276). Острота кривой резонанса системы с одной степенью свободы при действии силы трения, пропорциональной скорости, характеризуется «половинной шириной» резонансной кривой. «Половинная ширина» резонансной кривой измеряется разностью между двумя частотами, для которых амплитуда колебаний равна половине амплитуды, соответствующей резонансу. Выразить «половинную ширину» резонансной кривой Δ через «коэффициент настройки» $z=\omega/k$ и через приведенный коэффициент затухания $\delta=n/k$. Дать приближенную формулу для случая $\delta\ll 1$ (ω — частота вынуждающей силы, k — частота собственных колебаний; при резонансе $z=1$).

Ответ: «Половинная ширина» кривой резонанса равна

$$\Delta=z_2-z_1=$$
$$=\sqrt{1-2\delta^2+2\delta\sqrt{3+\delta^2}}-$$
$$-\sqrt{1-2\delta^2-2\delta\sqrt{3+\delta^2}}$$

или, если $\delta\ll 1$, $\Delta\approx 2\sqrt{3\delta}$.



К задаче 53.38.

53.38 (1277). В вибрографе, употребляемом для записи вертикальных колебаний, стержень OA, соединенный с пишущим пером прибора, может вращаться вокруг горизонтальной оси O. Стержень OA на конце A несет груз Q и удерживается в горизонтальном положении равновесия спиральной пружиной. Определить относительное движение стержня OA, если виброграф укреплен на фундаменте, совершающем вертикальные колебания по закону $z=2\sin 25t$ *мм*. Коэффициент жесткости пружины $c=0{,}1$ *кГ/см*, момент инерции стержня OA с грузом Q относительно O равен $J=0{,}4$ *кГсм сек*^{2}, $Qa=10$ *кГсм*.

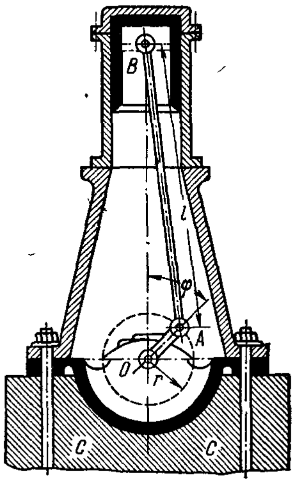
Собственными колебаниями стержня пренебречь.

Ответ: $\varphi=0{,}0051\sin 25t$.

53.39 (1278). В вибрографе, описанном в задаче 53.38, стержень снабжен электромагнитным тормозом в виде алюминиевой пластины, колеблющейся между полюсами неподвижно закрепленных магнитов. Возникающие в пластине вихревые токи создают торможение, пропорциональное первой степени скорости движения пластины и доведенное до границы апериодичности. Определить вынужденные колебания стрелки прибора, если последний закреплен на фундаменте, совершающем вертикальные колебания по закону $z=h\sin pt$.

Ответ: $x=a\varphi=\dfrac{Qah}{Jg\left[1+\dfrac{c}{Jp^2}\right]}\sin(pt-\varepsilon)$;

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{2\sqrt{\dfrac{J}{c}}\,p}{1-\dfrac{J}{c}p^2}.$$



К задаче 53.40.

53.40 (1280). Вертикальный двигатель весом Q закреплен на фундаменте, имеющем площадь основания S; удельная жесткость грунта равна λ. Длина кривошипа двигателя r, длина шатуна l, угловая скорость вала ω, вес поршня и неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение, равен P, вес фундамента G; кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь. Определить вынужденные колебания фундамента.

Указание. При расчетах пренебречь всеми членами, содержащими малое отношение r/l в степенях выше первой.

Ответ: Смещение центра тяжести фундамента от положения равновесия

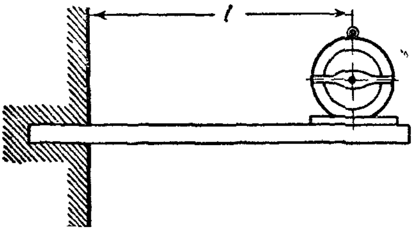
$$\xi=\frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-\omega^2)}\cos\omega t+\frac{r}{l}\,\frac{Pr\omega^2}{(Q+G)(k^2-4\omega^2)}\cos 2\omega t,$$

где

$$k=\sqrt{\frac{\lambda Sg}{Q+G}}.$$

53.41 (1281). Рассчитать вес фундамента под вертикальный двигатель, весящий $Q=10$ *т*, таким образом, чтобы амплитуда вынужденных вертикальных колебаний фундамента не превосходила 0,25 *мм*.

Площадь основания фундамента $S=100$ $м^2$, удельная жесткость грунта, находящегося под фундаментом, $\lambda=50$ $т/м^3$. Длина кривошипа двигателя $r=30$ *см*, длина шатуна $l=180$ *см*, угловая скорость вала $\omega=240$ *об/мин*, вес поршня и других неуравновешенных частей, совершающих возвратно-поступательное движение, $P=250$ *кГ*, кривошип считать уравновешенным при помощи противовеса. Массой шатуна пренебречь.



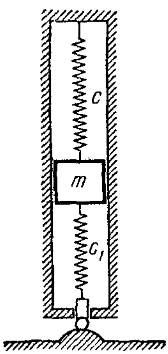
К задаче 53.42.

Указание. Воспользоваться результатом решения предыдущей задачи и ограничиться приближенным решением, отбросив член, содержащий r/l. Проверить законность указанного приближения.

Ответ: $G=366{,}6$ *т*.

53.42 (1282). Электромотор весом $Q=1200$ *кГ* установлен на свободных концах двух горизонтальных параллельных балок, заделанных вторыми концами в стену. Расстояние от оси электромотора до стены $l=1{,}5$ *м*. Якорь электромотора вращается со скоростью $n=1500$ *об/мин*, вес якоря $p=200$ *кГ*, центр тяжести его отстоит от оси вала на расстоянии $r=0{,}05$ *мм*. Модуль упругости мягкой стали, из которой сделаны балки, $E=2\cdot10^6$ $кГ/см^2$. Определить момент инерции поперечного сечения так, чтобы амплитуда вынужденных колебаний не превосходила 0,5 *мм*. Весом балки пренебречь.

Ответ: $J=8740$ $см^4$ или $J=8480$ $см^4$.



К задаче 53 43

53.43 (1283). Кулачковый механизм для привода клапана может быть схематизирован в виде массы m, прикрепленной с одной стороны с помощью пружины жесткости c к неподвижной точке и получающей с другой стороны через пружину жесткости c_1 движение от поступательно движущегося кулачка, профиль которого таков, что вертикальное смещение определяется формулами

$$x_1=a\,[1-\cos\omega t] \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega},$$

$$x_2=0 \qquad \text{при} \quad t>\frac{2\pi}{\omega}.$$

Определить движение массы m.

Ответ: При $0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}$

$$x=\frac{c_1 a}{m\,(k^2-\omega^2)}\,[\cos kt-\cos\omega t]+\frac{c_1 a}{mk^2}\,[1-\cos kt],$$

где

$$k=\sqrt{\frac{c+c_1}{m}}.$$

При $t > \frac{2\pi}{\omega}$ груз совершает свободные колебания:

$$x = \left[\frac{c_1 a}{m(k^2 - \omega^2)} - \frac{c_1 a}{mk^2}\right]\left[\cos kt - \cos k\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\right].$$

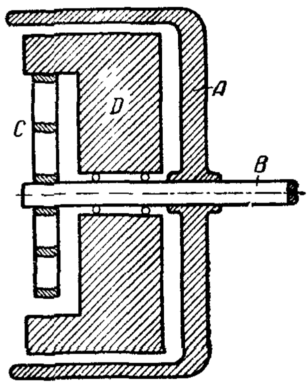
53.44 (1284). Для записи крутильных колебаний употребляется торсиограф, состоящий из легкого алюминиевого шкива A, заклиненного на валу B, и тяжелого маховичка D, который может свободно вращаться относительно вала B. Вал связан с маховичком D спиральной пружиной жесткости c. Вал B движется по закону

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \sin \omega t$$

(равномерное вращение с наложением гармонических колебаний). Момент инерции маховичка относительно оси вращения J.

Исследовать вынужденные колебания маховичка торсиографа.

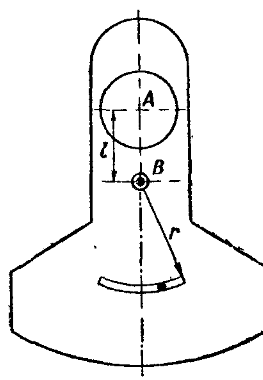
Ответ: угол относительного поворота маховичка $\psi = \dfrac{\varphi_0 \omega^2}{\dfrac{c}{J} - \omega^2} \sin \omega t$.



К задаче 53.44.

53.45 (1285). Для гашения колебаний коленчатого вала авиационного мотора в противовесе коленчатого вала делается желоб в форме дуги окружности радиуса r с центром, смещенным на $AB = l$ от оси вращения; по желобу может свободно двигаться дополнительный противовес, схематизируемый в виде материальной точки. Угловая скорость вращения вала равна ω. Пренебрегая влиянием силы тяжести, определить частоту малых колебаний дополнительного противовеса.

Ответ: $k = \omega\sqrt{\dfrac{l}{r}}$.



К задаче 53.45.

53.46 (1286). К грузу весом P, висящему на пружине жесткости c, в начальный момент времени приложена постоянная сила F, действие которой прекращается по прошествии времени τ. Определить движение груза.

Ответ: При $0 \leqslant t \leqslant \tau$

$$x = \frac{F}{c}\left[1 - \cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\, t\right];$$

при $\tau \leqslant t$

$$x = \frac{F}{c}\left[\cos\sqrt{\frac{cg}{P}}(t - \tau) - \cos\sqrt{\frac{cg}{P}}\, t\right].$$

53.47 (1287). Определить максимальное отклонение от положения равновесия системы, описанной в предыдущей задаче, в случае действия сил различной продолжительности: 1) $\tau=0$, $\lim\limits_{\tau\to 0} F\tau=S$ (удар); 2) $\tau=T/4$; 3) $\tau=T/2$, где T — период свободных колебаний системы.

Ответ: 1) $x_{max}=\sqrt{\frac{g}{cP}}S$; 2) $x_{max}=\sqrt{2}\frac{F}{c}=\sqrt{2}\,x_{ст}$;

3) $x_{max}=2\frac{F}{c}=2x_{ст}$.

53.48 (1288). Найти закон движения маятника, состоящего из материальной точки, висящей на нерастяжимой нити длиной l. Точка подвеса маятника движется по заданному закону $\xi=\xi(t)$ по горизонтальной прямой.

Ответ: Угол отклонения маятника от вертикали φ изменяется по закону

$$\varphi=c_1\sin kt+c_2\cos kt-\frac{\xi(t)}{l}+\frac{k}{l}\int_0^t\xi(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau,$$

где $k=\sqrt{\frac{g}{l}}$.

53.49 (1289). На материальную точку весом P, подвешенную на пружине жесткости c, действует возмущающая сила, заданная условиями:

$$F=0 \quad \text{при } t<0;$$

$$F=\frac{t}{\tau}F_0 \quad \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau;$$

$$F=F_0 \quad \text{при } t>\tau.$$

Определить движение точки и найти амплитуду колебаний при $t>\tau$.

Ответ: $x=\frac{F_0}{c}\left[1-\frac{2}{k\tau}\cos k\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\sin\frac{k\tau}{2}\right]$; $k=\sqrt{\frac{cg}{P}}$;

$A=\frac{2F_0}{kc\tau}\sin\frac{k\tau}{2}$.

53.50 (1290). На груз весом P, висящий на пружине жесткости c, действует возмущающая сила, изменяющаяся по закону $Q(t)=$ $=F|\sin\omega t|$. Определить колебания системы, имеющие частоту возмущающей силы.

Ответ: При $0<t<\pi/\omega$

$$x=\frac{F\omega}{mk(\omega^2-k^2)}\left[\sin kt+\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2\omega}\cos kt\right]-\frac{F}{m(\omega^2-k^2)}\sin\omega t;$$

$$k=\sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

53.51 (1293). Определить критическую угловую скорость (относительно поперечных колебаний) легкого вала, несущего посредине диск весом P. Рассмотреть следующие случаи: 1) вал на обоих концах опирается на длинные подшипники (концы можно считать заделанными); 2) на одном конце вал опирается на длинный подшипник (конец заделан), а на другом — на короткий подшипник (конец оперт). Жесткость вала на изгиб EJ, длина вала l.

Ответ: 1) $\omega_{кр}=\sqrt{\dfrac{192FJg}{Pl^3}}$; 2) $\omega_{кр}=\sqrt{\dfrac{768EJg}{7Pl^3}}$.

53.52 (1294). Определить критическую скорость вращения легкого вала длиной l, если вал лежит на двух коротких подшипниках и на выступающем конце длиной a несет диск весом P. Жесткость вала на изгиб EJ.

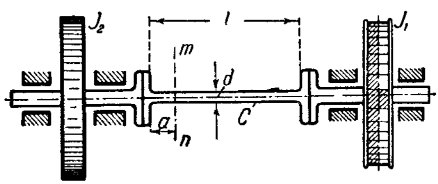
Ответ: $\omega_{кр}=\sqrt{\dfrac{3EJg}{Pla^2}}$.

53.53. (1295). Определить критическую скорость вращения тяжелого вала, лежащего одним концом в коротком подшипнике, а другим — в длинном; длина вала l, жесткость вала на изгиб EJ, вес единицы длины вала q.

Ответ: $\omega_{кр}=15{,}4\sqrt{\dfrac{EJg}{ql^4}}$.

§ 54. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы

54.1 (1297). Для экспериментального исследования процесса регулирования гидравлических турбин сконструирована установка, состоящая из турбины, ротор которой имеет момент инерции относительно оси вращения $J_1=5$ *кГсм сек*^{2}, маховика с моментом инерции $J_2=150$ *кГсм сек*^{2} и упругого вала C, соединяющего ротор турбины с маховиком; вал имеет длину $l=1552$ *мм*, диаметр $d=25{,}4$ *мм*; модуль сдвига материала вала $G=880\,000$ *кГ/см*^{2}.



К задаче 54.1.

Пренебрегая массой вала и скручиванием его толстых участков, найти то сечение mn вала, которое при свободных колебаниях данной системы остается неподвижным (узловое сечение), а также вычислить период T свободных колебаний системы.

Ответ: $a=50$ *мм*; $T=0{,}09$ *сек*.

54.2 (1299). Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из вала, закрепленного на одном конце, с насаженными посредине и на другом конце однородными дисками. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J; жесткость на кручение участков вала $c_1=c_2=c$. Массой вала пренебречь.

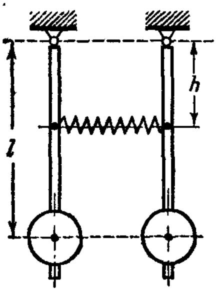
Ответ: $k_1=0{,}62\sqrt{\dfrac{c}{J}}$; $k_2=1{,}62\sqrt{\dfrac{c}{J}}$.

54.3 (1300). Определить частоты главных крутильных колебаний системы, состоящей из вала с насаженными на него тремя одинаковыми дисками. Два диска закреплены на концах вала, а третий — посредине. Момент инерции каждого диска относительно оси вала J;

жесткость на кручение участков вала $c_1 = c_2 = c$. Массой вала пренебречь.

Ответ: $k_1 = \sqrt{\dfrac{c}{J}}$; $\quad k_2 = \sqrt{3\dfrac{c}{J}}$.

54.4 (1301). Два одинаковых маятника длины l и массы m каждый соединены на уровне h упругой пружиной жесткости c, прикрепленной концами к стержням маятников. Определить малые колебания системы в плоскости равновесного положения маятников, после того как одному из маятников сообщено отклонение на угол α от положения равновесия; начальные скорости маятников равны нулю. Массами стержней маятников и массой пружины пренебречь.



К задаче 54.4.

Ответ: $\varphi_1 = \alpha \cos\dfrac{k_1 + k_2}{2} t \cos\dfrac{k_2 - k_1}{2} t$,

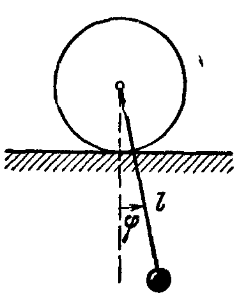
$$\varphi_2 = \alpha \sin\frac{k_1 + k_2}{2} t \sin\frac{k_2 - k_1}{2} t,$$

где φ_1 и φ_2 — углы отклонения маятников от вертикали и

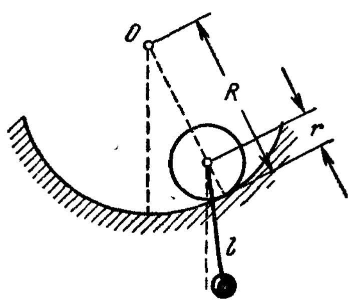
$$k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ch^2}{ml^2}}.$$

54.5. Диск массы M может катиться без скольжения по прямолинейному рельсу. К центру диска шарнирно прикреплен невесомый стержень длиною l, на конце которого находится точечный груз массы m. Найти период малых колебаний маятника.

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{3M}{3M + 2m} \dfrac{l}{g}}$.



К задаче 54.5.



К задаче 54.6.

54.6. Заменяя в предыдущей задаче прямолинейный рельс дугой окружности радиуса R, найти частоты малых колебаний рассматриваемой системы.

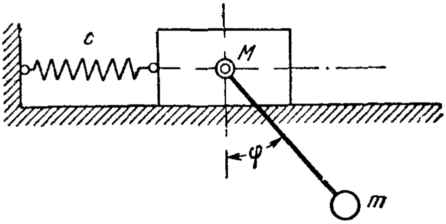
Ответ: Главные частоты являются корнями уравнения

$$\frac{3M}{3M + 2m} k^4 - \left[\frac{2(M + m) g}{(3M + 2m)(R - r)} + \frac{g}{l}\right] k^2 + \frac{2(M + m) g^2}{(3M + 2m)(R - r) l} = 0.$$

54.7 (1302). Маятник состоит из ползуна массы M, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика массы m, соединенного с ползуном стержнем длины l, могущим вращаться вокруг оси, связанной с ползуном. К ползуну присоединена пружина жесткости c, другой конец которой закреплен неподвижно. Определить частоты малых колебаний системы.

Ответ: Искомые частоты являются корнями уравнения

$$k^4-\left[\frac{c}{M}+\frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\right]k^2+\frac{c}{M}\frac{g}{l}=0.$$

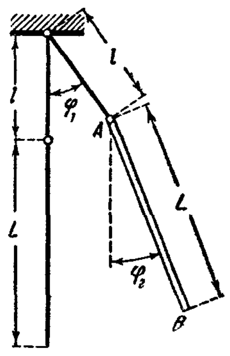


К задаче 54.7.

54.8 (1303). Два одинаковых физических маятника подвешены на параллельных горизонтальных осях, расположенных в одной горизонтальной плоскости, и связаны упругой пружиной, длина которой в ненапряженном состоянии равна расстоянию между осями маятников. Пренебрегая сопротивлениями движению и массой пружины, определить частоты и отношения амплитуд главных колебаний системы при малых углах отклонения от равновесного положения. Вес каждого маятника P; радиус инерции его относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси подвеса, ρ; жесткость пружины c; расстояния от центра тяжести маятника и от точки прикрепления пружины к маятникам до оси подвеса равны соответственно l и h. (См. чертеж к задаче 54.4.)

Ответ: $k_1^2=\frac{gl}{\rho^2+l^2}$; $k_2^2=\frac{(Pl+2ch^2)g}{P(\rho^2+l^2)}$;

$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=+1$; $\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-1$.



К задаче 54.9.

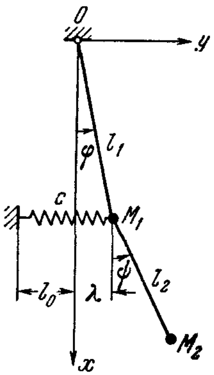
54.9 (1305). Однородный стержень AB длиной L подвешен при помощи нити длиной $l=0{,}5L$ к неподвижной точке. Пренебрегая массой нити, определить частоты главных колебаний системы и найти отношение отклонений стержня и нити от вертикали при первом и втором главных колебаниях.

Ответ: $k_1=0{,}677\sqrt{\frac{g}{l}}$; $k_2=2{,}558\sqrt{\frac{g}{l}}$; в первом главном колебании $\varphi_1=0{,}847\varphi_2$, во втором $\varphi_1=-1{,}180\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — амплитуды углов, составляемых нитью и стержнем с вертикалью.

54.10 (1306). Предполагая в предыдущей задаче, что длина нити весьма велика по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая квадратом отношения L/l, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний математического маятника длиной l.

Ответ: $1-\frac{1}{4}\frac{L}{l}$.

54.11 (1307). Считая в задаче 54.9, что длина нити весьма мала по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая квадратом отношения l/L, определить отношение низшей частоты свободных колебаний системы к частоте колебаний физического маятника, если ось вращения поместить в конце стержня.



К задаче 54.12.

Ответ: $1-\frac{9}{16}\frac{l}{L}$.

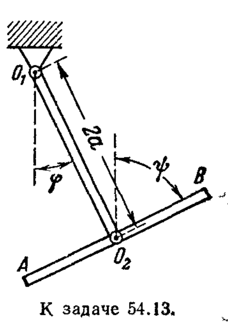
54.12. Определить частоты главных колебаний двойного математического маятника при условии, что массы грузов M_1 и M_2 соответственно равны m_1 и m_2, $OM_1=l_1$, $M_1M_2=l_2$, а к грузу M_1 присоединена пружина, массой которой можно пренебречь. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0, жесткость пружины c.

Ответ: $k_{1,2}^2=\frac{n_1^2+n_2^2\mp\sqrt{(n_1^2-n_2^2)^2+4n_1^2n_2^2\gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$,

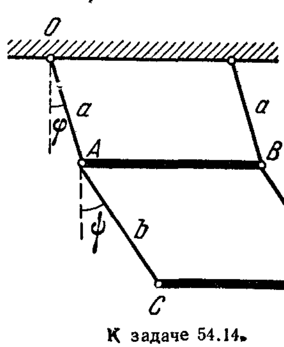
где $n_1^2=\frac{(m_1+m_2)g+cl_1}{(m_1+m_2)l_1}$, $n_2^2=\frac{g}{l_2}$, $\gamma_{12}^2=\frac{m_2}{m_1+m_2}$.

54.13 (1309). Двойной физический маятник состоит из однородного прямолинейного стержня O_1O_2 длиной $2a$ и весом P_1, вращающегося вокруг неподвижной горизонтальной оси O_1, и из однородного прямолинейного стержня AB весом P_2, шарнирно соединенного в своем центре тяжести с концом O_2 первого стержня. Определить движение системы, если в начальный момент стержень O_1O_2 отклонен на угол φ_0 от вертикали, а стержень AB занимает вертикальное положение и имеет начальную угловую скорость ω_0.

Ответ: $\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{3}{4}\frac{P_1+2P_2}{P_1+3P_2}\frac{g}{a}}\,t$; $\psi=\omega_0 t$, где ψ — угол, образуемый стержнем AB с вертикальным направлением.



К задаче 54.13.

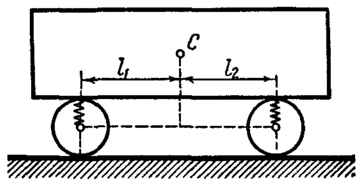


К задаче 54.14.

54.14. Стержень AB весом P подвешен за концы A и B к потолку на двух одинаковых невесомых и нерастяжимых нитях длины a. К стержню AB подвешена на двух одинаковых невесомых и нерастяжимых нитях длины b балка CD весом Q. Предполагая, что колебания происходят в вертикальной плоскости, найти частоты главных колебаний.

Ответ: $k_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2 n_2^2 \gamma_{12}^2}}{2(1-\gamma_{12}^2)}$, где $n_1^2 = \frac{g}{a}$, $n_2^2 = \frac{g}{b}$, $\gamma_{12}^2 = \frac{Q}{P+Q}$.

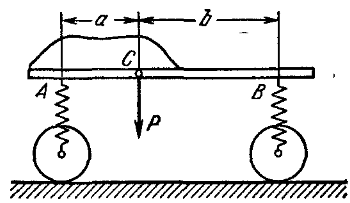
54.15 (1312). Исследовать колебания железнодорожного вагона в его средней вертикальной плоскости, если вес подрессоренной части вагона Q, расстояния центра тяжести от вертикальных плоскостей, проведенных через оси, $l_1 = l_2 = l$; радиус инерции относительно центральной оси, параллельной осям вагона, ρ; жесткость рессор для обеих осей одинакова: $c_1 = c_2 = c$.



К задаче 54.15.

Ответ: $x = A\sin(k_1 t + \alpha)$, $\psi = B\sin(k_2 t + \beta)$, где x — вертикальное смещение центра тяжести вагона, ψ — угол, образуемый полом вагона с горизонтом; A, B, α, β — постоянные интегрирования; $k_1 = \sqrt{\frac{2cg}{Q}}$; $k_2 = \sqrt{\frac{2cgl^2}{Q\rho^2}}$.

54.16. Исследовать малые свободные колебания груженой платформы весом P, опирающейся в точках A и B на две рессоры одинаковой жесткости c. Центр тяжести C платформы с грузом находится на прямой AB, причем $AC = a$ и $CB = b$. Платформа выведена из положения равновесия путем сообщения центру тяжести начальной скорости v_0, направленной вертикально вниз без начального отклонения. Массы рессор и силы трения не учитывать. Момент инерции платформы относительно горизонтальной поперечной оси, проходящей через центр тяжести платформы, равен $J_C = 0{,}1\ (a^2 + b^2)\frac{P}{g}$. Колебания происходят в вертикальной плоскости. За обобщенные координаты принять: y — отклонение центра тяжести от положения равновесия вниз, ψ — угол поворота платформы вокруг центра тяжести.



К задаче 54.16.

Ответ: $y = \frac{v_0}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1 t - \frac{\alpha_1}{\alpha_2 k_2}\sin k_2 t\right)$,

$$\varphi = \frac{v_0 \alpha_1}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{k_1}\sin k_1 t - \frac{1}{k_2}\sin k_2 t\right),$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{6cg}{P}\left(1 \mp \sqrt{1 - 0{,}278\,\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}}\right),$$

$$\alpha_1 = \frac{2c - \frac{P}{g}k_1^2}{c(b-a)}, \quad \alpha_2 = \frac{2c - \frac{P}{g}k_2^2}{c(b-a)}.$$

54.17 (1308). Платформа тележки опирается в точках A и B на две рессоры одинаковой жесткости c, расстояние между осями рессор $AB=l$; центр тяжести C платформы расположен на прямой AB, являющейся осью симметрии платформы, на расстоянии $AC=a=l/3$ от точки A (см. чертеж к задаче 54.16). Радиус инерции платформы относительно оси, проходящей через ее центр тяжести перпендикулярно к прямой AB и лежащей в плоскости платформы, принять равным $0{,}2l$; вес платформы равен Q.

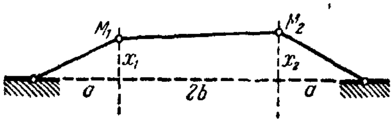
Найти малые колебания платформы, возникающие под действием удара, приложенного в центре тяжести платформы перпендикулярно к ее плоскости. Импульс удара равен S.

Ответ: Пусть z — вертикальное смещение центра тяжести платформы, φ — угол поворота ее вокруг оси, указанной в условии задачи (та и другая координаты отсчитываются от положения равновесия центра тяжести платформы); найдем:

$$z=\sqrt{\frac{g}{cQ}}\,S\left(0{,}738\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t+0{,}00496\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right);$$

$$l\varphi=\sqrt{\frac{g}{cQ}}\,S\left(0{,}509\sin 1{,}330\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t-0{,}180\sin 3{,}758\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t\right).$$

54.18. Две одинаковые материальные точки M_1 и M_2 весом Q каждая прикреплены симметрично на равных расстояниях от концов к натянутой нити, имеющей длину $2(a+b)$; натяжение нити равно p. Определить частоты главных колебаний и найти главные координаты.



К задаче 54.18.

Ответ: $k_1=\sqrt{\dfrac{pg}{Qa}}$,

$$k_2=\sqrt{\frac{pg}{Q}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]}.$$

Главные координаты: $\theta_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\theta_2=\frac{1}{2}(x_2-x_1)$.

54.19 (1314). Определить частоты малых колебаний тяжелой материальной точки, колеблющейся около положения равновесия на гладкой поверхности, обращенной вогнутой стороной кверху; главные радиусы кривизны поверхности в точке, отвечающей положению равновесия, равны ρ_1 и ρ_2.

Ответ: $k_1=\sqrt{\dfrac{g}{\rho_1}}$; $\quad k_2=\sqrt{\dfrac{g}{\rho_2}}$.

54.20 (1315). Определить частоты малых колебаний тяжелой материальной точки около ее положения равновесия, совпадающего с наиболее низкой точкой поверхности, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через эту точку. Главные радиусы кривизны поверхности в ее наинизшей точке ρ_1 и ρ_2.

Ответ: Частоты малых колебаний являются корнями уравнения

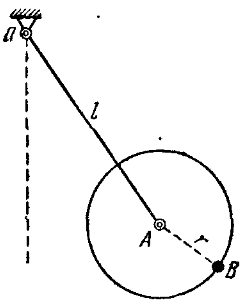
$$k^4-\left[2\omega^2+\frac{g}{\rho_1}+\frac{g}{\rho_2}\right]k^2+\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_1}\right)\left(\omega^2-\frac{g}{\rho_2}\right)=0.$$

54.21 (1316). Круглый однородный диск радиуса r и массы M связан шарниром со стержнем OA длины l, могущим поворачиваться около неподвижной горизонтальной оси. На окружности диска закреплена материальная точка B массы m. Определить частоты свободных колебаний системы. Массой стержня пренебречь. Диск может вращаться в плоскости колебаний стержня OA.

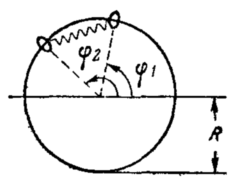
Ответ: Частоты свободных колебаний являются корнями уравнения

$$k^4-\frac{M+m}{M+3m}\left[1+2\frac{m}{M}\frac{r+l}{r}\right]\frac{g}{l}k^2-\frac{2m(M+m)}{M(M+3m)}\frac{g^2}{lr}=0.$$

54.22. На проволочную окружность радиуса R, плоскость которой горизонтальна, надеты два одинаковых колечка, соединенные пружиной жесткости c, имеющей в ненапряженном состоянии длину l_0



К задаче 54.21.



К задаче 54.22.

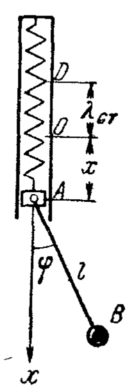
Определить движение колечек, приняв их за материальные точки массы m, если в начальный момент расстояние между ними равнялось $l > l_0$, а начальная скорость равнялась нулю.

Ответ:

$$\varphi_1=\beta\left(1-\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}t\right),\quad \varphi_2=2\alpha+\beta\left(1+\cos\sqrt{\frac{2c}{m}}t\right),$$

$$\alpha=\arcsin\frac{l_0}{2R},\quad \beta=\arcsin\frac{l-l_0}{2R}.$$

54.23. Определить малые колебания математического маятника длиною l и весом P_2, подвешенного к вертикально движущемуся ползуну A веса P_1, прикрепленному к пружине жесткости c. Ползун при своем движении испытывает сопротивление, пропорциональное его скорости (b — коэффициент пропорциональности).



К задаче 54.23.

Найти условия, при которых в случае $b=0$ главные частоты данной системы будут равны между собой.

Ответ: 1) $x=A_1e^{-ht}\sin(\sqrt{k_1^2-h^2}\,t+\varepsilon_1)$, $\varphi=A_2\sin(k_2t+\varepsilon_2)$, где A_1, A_2, ε_1, ε_2 — постоянные интегрирования,

$$h=\frac{bg}{2(P_1+P_2)},\qquad k_1=\sqrt{\frac{cg}{P_1+P_2}},\qquad k_2=\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

2) Главные частоты будут одинаковы (при $b=0$), если

$$c=\frac{P_1+P_2}{l}.$$

54.24. Два одинаковых жестких стержня длины R имеют общую точку подвеса O. Стержни могут вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса независимо друг от друга. К концам стержней прикреплены два одинаковых груза A и B весом P каждый, соединенные между собой пружиной жесткости c. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Пренебрегая весом стержней, найти уравнение для определения частот главных колебаний около устойчивого положения равновесия грузов.

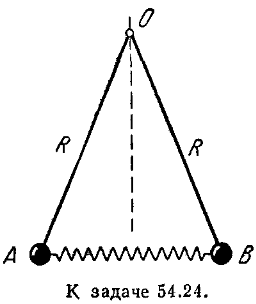
Ответ: $k^4-(n_1^2+n_2^2)k^2+n_1^2n_2^2-\gamma_{12}^2=0;$

$$n_1^2=n_2^2=\frac{1}{2}\frac{g}{R}\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{gc}{P}\cos^2\alpha,$$

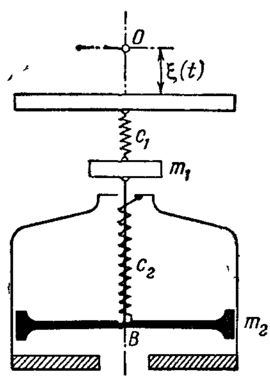
$$\gamma_{12}^2=\frac{lg^2}{P^2R^4}\left(cR^2\cos^2\alpha+\frac{PR}{2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2,$$

$\alpha=\arcsin\frac{l}{2R}$, а l находится из уравнения $l_0=l\left[1+\frac{P}{c\sqrt{4R^2-l^2}}\right]$.

54.25 (1317). К движущейся по заданному закону $\xi=\xi(t)$ платформе подвешена на пружине жесткости c_1 механическая система, состоящая из массы m_1, к которой жестко присоединен в точке B поршень демпфера. Камера демпфера, масса которой равна m_2, опирается на пружину жесткости c_2, противоположный конец которой прикреплен к поршню. Вязкое трение в демпфере пропорционально относительной скорости поршня и камеры; β — коэффициент сопротивления. Составить уравнения движения системы.



К задаче 54.24.

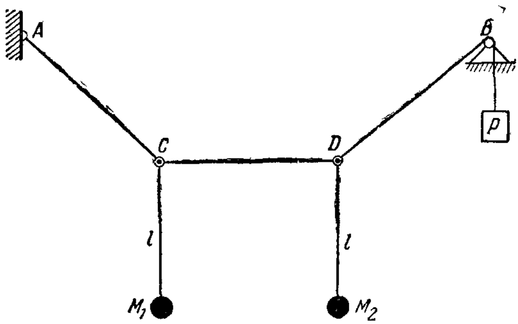


К задаче 54.25.

Ответ: $m_1\ddot{x}_1+\beta\dot{x}_1-\beta\dot{x}_2+(c_1+c_2)x_1-c_2x_2=c_1\xi(t);$

$$m_2\ddot{x}_2-\beta\dot{x}_1+\beta\dot{x}_2-c_2x_1+c_2x_2=0.$$

54.26 (1318). Между двумя неподвижными опорами A и B натянута упругая гибкая проволока. Натяжение осуществлено с помощью груза P, висящего на свисающем конце проволоки. В точках C и D подвешены два маятника M_1 и M_2, могущих колебаться в плоскостях, перпендикулярных к плоскости чертежа. Расстояния $AC = CD = DB = a$. Массой проволоки и нитей пренебречь и рассматривать



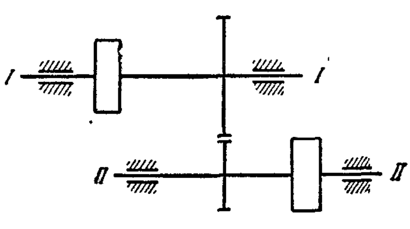
К задаче 54.26.

каждый маятник как материальную точку массой m, висящую на нити длиной l. Определить частоты свободных малых колебаний системы.

Указание. Отношение $\frac{a}{l}\frac{mg}{P}$ считать малым.

Ответ: $k_1 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$; $\quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{a}{l}\frac{mg}{P}\right)}$.

54.27 (1319). Определить частоты свободных крутильных колебаний системы, состоящей из двух валов, соединенных зубчатой передачей. Моменты инерции масс, насаженных на валы, и моменты инерции зубчатых колес относительно оси валов имеют величины $J_1 = 87\,500$ *кГсм сек*^{2}, $J_2 = 56\,000$ *кГсм сек*^{2}, $i_1 = 302$ *кГсм сек*^{2}, $i_2 = 10{,}5$ *кГсм сек*^{2}, передаточное число $k = z_1/z_2 = 5$; жесткости валов при кручении $c_1 = 316 \times 10^6$ *кГсм*, $c_2 = 115 \cdot 10^6$ *кГсм*; массами валов пренебречь.



К задаче 54.27.

Ответ:

$k_1 = 54{,}8$ *сек*$^{-1}$;

$k_2 = 2{,}38 \cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$.

54.28 (1320). Определить, пренебрегая массой зубчатых колес, частоту свободных крутильных колебаний системы, описанной в предыдущей задаче.

Ответ: $k = 58{,}7$ *сек*$^{-1}$.

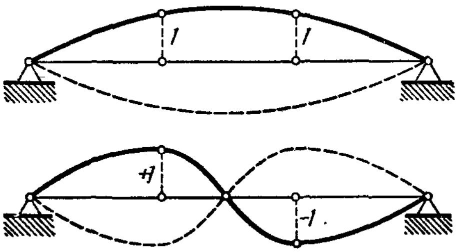
54.29 (1323). Найти частоты и формы главных поперечных колебаний балки длиной l, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной в точках $x=\frac{1}{3}l$ и $x=\frac{2}{3}l$ двумя равными грузами веса Q. Момент инерции поперечного сечения балки J, модуль упругости E. Массой балки пренебречь.

Ответ:

$$k_1=5{,}69\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}};$$

$$k_2=22{,}04\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}};\quad \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=1;$$

$\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-1$; формы главных колебаний указаны на чертеже.



К задаче 54.29.

54.30 (1324). Найти частоты и формы главных поперечных колебаний балки длиной l, опертой по концам и несущей два груза $Q_1=Q$ и $Q_2=0{,}5Q$, равноудаленных от опор на расстояние $\frac{1}{3}l$. Массой балки пренебречь.

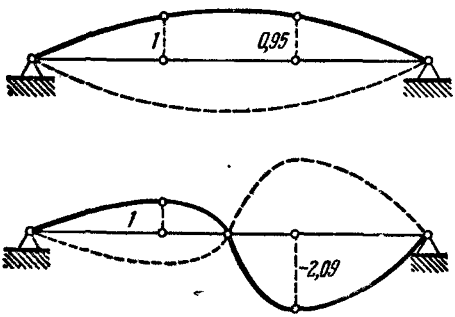
Ответ:

$$k_1=6{,}55\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}};$$

$$k_2=27{,}2\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}};$$

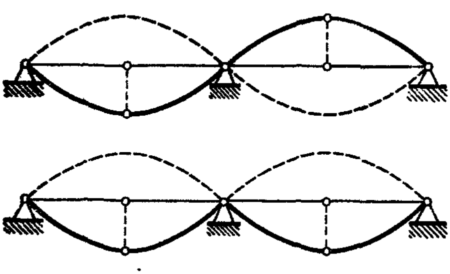
$$\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=0{,}95;\quad \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=-2{,}09;$$

формы главных колебаний указаны на чертеже.



К задаче 54.30.

54.31 (1325). Найти частоты и формы главных колебаний двухпролетной балки, несущей в середине каждого пролета по одному грузу; веса грузов и длины пролетов одинаковы: $Q_1=Q_2=Q$; $l_1=l_2=l$. Массой балки пренебречь.



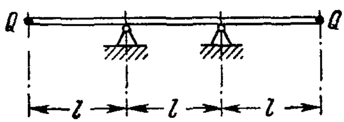
К задаче 54.31.

Ответ: $k_1=6{,}93\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=10{,}46\sqrt{\frac{EJg}{Ql^3}}$; формы главных колебаний показаны на чертеже.

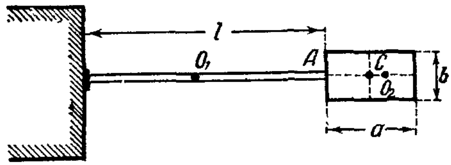
54.32 (1326). Найти частоты и формы главных колебаний двух одинаковых грузов Q, закрепленных на концах горизонтальной консольной балки на равных расстояниях l от ее опор. Балка длиной $3l$ свободно лежит на двух опорах, отстоящих друг от друга на расстоянии l; момент инерции поперечного сечения балки J; модуль Юнга материала балки E. Массой балки пренебречь.

Ответ: $k_1=\sqrt{\frac{6}{5}\frac{EJg}{Ql^3}}$; $k_2=\sqrt{2\frac{EJg}{Ql^3}}$.

54.33 (1327). Однородная прямоугольная пластинка массой m закреплена в конце A балки длиной l, другой конец которой заделан неподвижно. Система находится в горизонтальной плоскости



К задаче 54.32.



К задаче 54.33.

и совершает в этой плоскости свободные колебания около положения равновесия.

Определить частоты и формы этих колебаний. Размеры пластинки: $a=0{,}2l$, $b=0{,}1l$. Массой балки пренебречь.

Указание. Сила Q и момент M, которые должны быть приложены к концу A балки, чтобы создать в этой точке прогиб f и поворот касательной к изогнутой оси балки φ, определяются формулами

$$f=pQ+sM,\quad \varphi=sQ+qM,$$

причем в рассматриваемом случае однородной балки, заделанной одним концом, $p=\frac{l^3}{3EJ}$, $q=\frac{l}{EJ}$, $s=\frac{l^2}{2EJ}$.

Ответ: Частоты главных колебаний равны соответственно

$$0{,}804\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}};\quad 20{,}7\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}};$$

первое главное колебание можно рассматривать как колебание поворота вокруг точки O_1, расположенной на оси балки слева от точки A на расстоянии $O_1A=0{,}612l$; второе — вокруг точки O_2, расположенной на продолжении оси балки на расстоянии $O_2A=0{,}106l$ справа от точки A.

54.34 (1328). К первому из двух первоначально неподвижных дисков, соединенных упругим валом жесткости c, внезапно приложен постоянный вращающий момент M; моменты инерции дисков J. Пренебрегая массой вала, определить последующее движение системы.

Ответ: $\varphi_1=\frac{M}{4J}t^2+\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right)$;

$\varphi_2=\frac{M}{4J}t^2-\frac{M}{4c}\left(1-\cos\sqrt{2\frac{c}{J}}\,t\right)$.

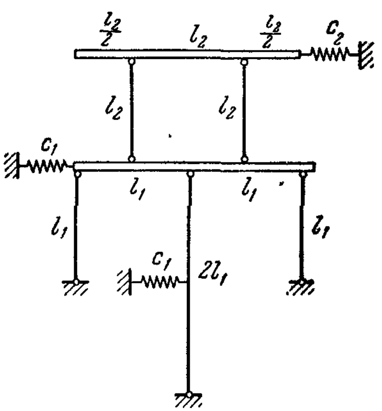
54.35. Двухъярусная шарнирно-стержневая система удерживается в вертикальном положении тремя пружинами, как это показано на чертеже. Стержни абсолютно жесткие, однородные; вес на длину l равен G. Полагая коэффициенты жесткости пружин равными $c_1 = c_2 = \frac{10G}{l}$, определить устойчивость равновесия системы, а также частоты и формы f_1 и f_2 главных колебаний системы. Массой пружин пренебречь; $l_1 = l_2 = l$.

Ответ: Равновесие устойчивое;

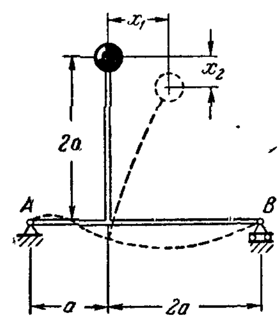
$$k_1 = 0{,}412\sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2 = 1{,}673\sqrt{\frac{g}{l}};$$

$$f_1 = -1{,}455,\qquad f_2 = 3{,}495.$$

54.36. Груз весом G укреплен на вершине стойки, жестко связанной с балкой AB, свободно лежащей на двух опорах. Полагая, что момент инерции поперечного сечения J, а модули упругости E балки и стойки



К задаче 54.35.



К задаче 54.36.

одинаковы, определить частоты главных изгибных колебаний системы. Весом балки и стойки пренебречь.

Ответ: $k_1 = 0{,}497\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$; $\quad k_2 = 1{,}602\sqrt{\frac{EJ}{Ga^3}g}$.

54.37 (1329). Фундамент машины весом $P_1 = 100$ *т*, установленный на упругом грунте, совершает вертикальные вынужденные колебания под действием вертикальной возмущающей силы, меняющейся по закону $F = 10 \sin \omega t$. С целью устранения резонансных колебаний, обнаруживающихся при угловой скорости вала машины $\omega = 100$ *сек*$^{-1}$, на фундаменте установлен на упругих пружинах гаситель в виде тяжелой рамы. Подобрать вес рамы P_2 и суммарную жесткость пружин c_2 гасителя так, чтобы амплитуда вынужденных колебаний фундамента при вышеуказанной скорости вала обратилась в нуль, а амплитуда колебаний гасителя не превосходила $A = 2$ *мм*.

Ответ: $P_2 = 4{,}9$ *т*; $\quad c_2 = 5 \cdot 10^3$ *т/м*.

54.38 (1330). Определить уравнения вынужденных колебаний системы дисков, описанной в задаче 54.2, при действии на средний диск возмущающего момента $M = M_0 \sin pt$.

Ответ: $\varphi_1 = \dfrac{M_0 (c - Jp^2)}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$

$$\varphi_2 = \frac{M_0 c}{J^2 (p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)} \sin pt,$$

где k_1 и k_2 — частоты главных колебаний системы.

54.39 (1331). Электромотор весом Q_1 закреплен на упругом бетонном фундаменте (в виде сплошного параллелепипеда) весом Q_2 с коэффициентом жесткости c_2, установленном на жестком грунте. Ротор весом P насажен на упругий горизонтальный вал с коэффициентом жесткости при изгибе c_1; эксцентриситет ротора относительно вала r; угловая скорость вала ω. Определить вынужденные вертикальные колебания статора электромотора. Учесть влияние массы фундамента путем присоединения одной трети его массы к массе статора.

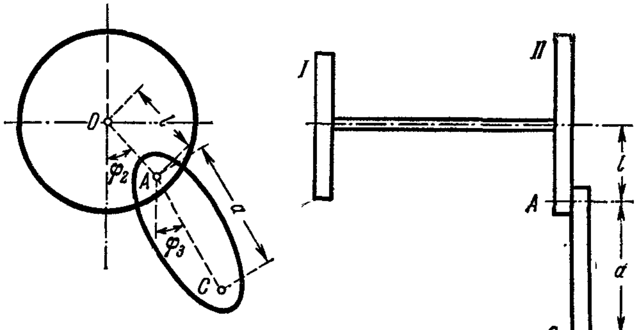
Ответ: $y = \dfrac{c_1 P g r \omega^2 \sin \omega t}{c_1 c_2 g^2 - \left[(c_1 + c_2) P + c_1 \left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right)\right] g\omega^2 + P \left(Q_1 + \frac{1}{3} Q_2\right) \omega^4},$

где y — отклонение статора от положения равновесия.

54.40. В точке A балки AB (см. задачу 54.14) приложена сила $F = F_0 \sin pt$ (F_0 и p = постоянные), составляющая все время с нитью OA прямой угол и расположенная в плоскости движения балки. Какова должна быть длина b нитей, на которых подвешена балка CD, чтобы амплитуда вынужденных колебаний балки AB равнялась нулю?

Ответ: $b = \dfrac{g}{p^2}$.

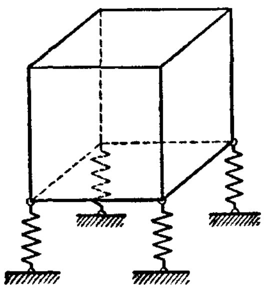
54.41 (1334). Для поглощения крутильных колебаний к одной из колеблющихся масс системы прикрепляется маятник. На чертеже



К задаче 54. 41.

схематически изображена система, состоящая из двух масс I и II, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω. Ко второй массе прикреплен маятник. Моменты инерции масс относительно оси вращения

J_1 и J_2; момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси вращения системы и проходящей через центр тяжести маятника, J_3. Расстояние между осью вращения системы и осью подвеса маятника $OA = l$; расстояние между осью подвеса и параллельной осью, проходящей через центр тяжести маятника, $AC = a$; масса маятника m. Коэффициент упругости (жесткость при кручении) участка вала между массами c_1 Ко второй массе приложен внешний момент $M = M_0 \sin \omega t$. Написать дифференциальные уравнения движения обеих масс системы и маятника. При составлении выражения для потенциальной энергии системы пренебречь потенциальной энергией маятника в поле силы тяжести.



К задаче 54 42

Ответ: $J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$;

$$(J_2 + ml^2)\ddot{\varphi}_2 + mal\ddot{\varphi}_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + mal\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) = M_0 \sin \omega t;$$

$$(J_3 + ma^2)\ddot{\varphi}_3 + mal\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) - mal\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

54.42 (1335). Бак, имеющий форму куба, опирается четырьмя нижними углами на четыре одинаковые пружины; длина стороны куба $2a$. Жесткости пружин в направлении осей, параллельных сторонам куба, равны c_x, c_y, c_z; момент инерции куба относительно главных центральных осей J. Составить уравнения малых колебаний и определить их частоты в случае $c_x = c_y$. Вес бака равен P.

Ответ: $m\ddot{x} + c_x x - c_x a\varphi_2 = 0, \quad m\ddot{y} + c_y y + c_y a\varphi_1 = 0,$

$$m\ddot{z} + c_z z = 0,$$

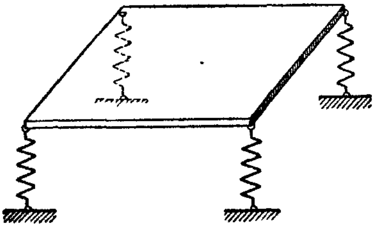
$$J\ddot{\varphi}_1 + c_y ay + c_y a^2\varphi_1 + c_z a^2\varphi_1 = 0, \qquad J\ddot{\varphi}_2 + c_x a^2\varphi_2 - c_x ax + c_z a^2\varphi_2 = 0,$$

$$J\ddot{\varphi}_3 + c_x a^2\varphi_3 + c_y a^2\varphi_3 = 0,$$

где x, y, z — координаты центра куба, φ_1, φ_2, φ_3 — углы поворота куба относительно координатных осей. Если $c_x = c_y$, то

$$k_z = \sqrt{\frac{c_z g}{P}}, \quad k_{\varphi_1} = \sqrt{\frac{2c_x a^2}{J}},$$

$$k^4 - \frac{m(c_x + c_z)a^2 + c_z J}{mJ}k^2 + c_x c_z \frac{a^2}{mJ} = 0.$$

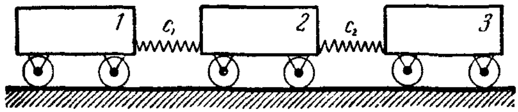


К задаче 54 43.

54.43 (1336). Однородная горизонтальная прямоугольная пластина со сторонами a и b опирается своими углами на четыре одинаковые пружины жесткости c; масса пластины M. Определить частоты свободных колебаний.

Ответ: $k_1 = \sqrt{4\frac{c}{M}}; \quad k_2 = k_3 = \sqrt{12\frac{c}{M}}$.

54.44 (1337). Три железнодорожных груженых вагона весом Q_1, Q_2 и Q_3 сцеплены между собой. Жесткости сцепок равны c_1 и c_2. В начальный момент два вагона находятся в положении равновесия,



К задаче 54.44.

а крайний правый вагон отклонен на x_0 от положения равновесия. Найти частоты главных колебаний системы.

Ответ: $k_1 = 0$, а k_2 и k_3 суть корни уравнения

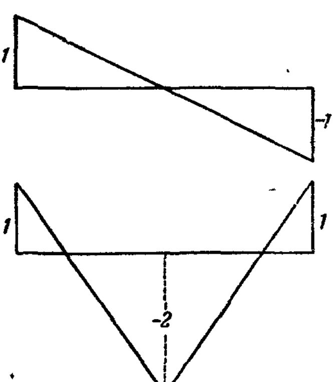
$$k^4 - g\left[\frac{c_1}{Q_1} + \frac{c_1 + c_2}{Q_2} + \frac{c_2}{Q_3}\right]k^2 + g^2\left[\frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \frac{c_2 c_1}{Q_2 Q_3} + \frac{c_1 c_2}{Q_3 Q_1}\right] = 0.$$

54.45 (1338). При условиях предыдущей задачи найти уравнения движения вагонов и построить формы главных колебаний для случая вагонов равного веса $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$, соединенных сцепками одинаковой жесткости $c_1 = c_2 = c$.

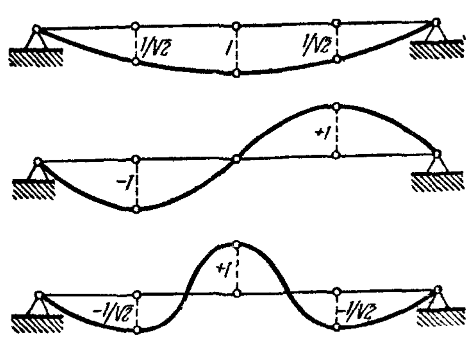
Ответ: $x_1 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t, \quad x_2 = \frac{x_0}{3} - \frac{x_0}{3}\cos k_3 t,$

$$x_3 = \frac{x_0}{3} + \frac{x_0}{2}\cos k_2 t + \frac{x_0}{6}\cos k_3 t; \quad k_2 = \sqrt{\frac{cg}{Q}}, \quad k_3 = \sqrt{3\frac{cg}{Q}}.$$

Формы главных колебаний изображены на чертеже.



К задаче 54 45.



К задаче 54 46.

54.46 (1339). Найти частоты и формы главных колебаний системы, состоящей из трех одинаковых масс m, закрепленных на балке на одинаковых расстояниях друг от друга и от опор. Балку считать свободно положенной на опоры; длина балки l, момент инерции поперечного сечения J, модуль Юнга материала балки E.

Ответ: $k_1 = 4{,}93\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$; $k_2 = 19{,}6\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$; $k_3 = 41{,}8\sqrt{\dfrac{EJ}{ml^3}}$.

Формы главных колебаний показаны на чертеже.

54.47 (1340). Система n одинаковых масс m, соединенных пружинами жесткости c, образует механический фильтр для продольных колебаний.

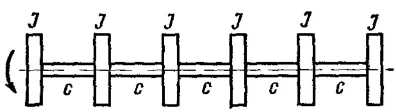
Считая **заданным закон** поступательного движения левой массы $x = x_0 \sin \omega t$, показать, что система является фильтром низких частот, т. е. что после перехода частоты ω через определенную границу амплитуды вынужденных колебаний отдельных масс изменяются в зависимости от номера массы по экспоненциальному закону, а до перехода — по гармоническому.

К задаче 54.47.

Ответ: Фильтр пропускает колебания с частотой $0 < \omega < 2\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

54.48 (1341). Фильтр крутильных колебаний схематизируется в виде длинного вала с насаженными на него дисками.

Считая заданным закон движения левого диска в форме $\vartheta = \vartheta_0 \sin \omega t$, определить вынужденные колебания системы и вычислить амплитуды колебаний отдельных дисков.



К задаче 54.48.

Моменты инерции дисков J, жесткости участков вала между дисками одинаковы и равны c. Исследовать полученное решение и показать, что система является фильтром низких частот.

Ответ: $\vartheta_k = (\vartheta_0 \cos \mu k + c_1 \sin \mu k) \sin \omega t$, $\sin \dfrac{\mu}{2} = \dfrac{\omega}{2}\sqrt{\dfrac{J}{c}}$, где ϑ_k — угол поворота k-го диска, c_1 — постоянная, определяемая из граничного условия на втором конце вала; первый диск имеет нулевой номер; частота ω должна заключаться в пределах

$$0 < \omega < 2\sqrt{\frac{c}{J}}.$$

54.49 (1342). Механическая система, образующая полосовой фильтр для продольных колебаний, состоит из звеньев, каждое из которых образовано массой m, соединенной с массой следующего звена пружиной жесткости c. Параллельно с этой пружиной к массе присоединена пружина жесткости c_1, связывающая массу m с неподвижной точкой.

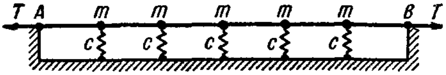
К задаче 54.49.

Закон продольных колебаний левой массы $x = x_0 \sin \omega t$ задан.

Показать, что при значениях ω, лежащих в определенных границах, амплитуды колебаний отдельных масс изменяются с расстоянием по гармоническому закону. Найти соответствующие граничные частоты.

Ответ: Полоса пропускания определяется неравенством

$$\sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m}}.$$



К задаче 54.50.

54.50 (1343). Система большого числа масс m, насаженных на расстоянии a друг от друга на струну AB, натянутую с усилием T, и поддерживаемых пружинами жесткости c, является полосовым механическим фильтром поперечных колебаний.

Вычислить частоты, отвечающие границам полосы пропускания.

Ответ: Полоса пропускания определяется неравенством

$$\sqrt{\frac{c}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{4T}{ma}}.$$

54.51 (1344). Нить длиной nl подвешена вертикально за один конец и нагружена на равных расстояниях a друг от друга n материальными точками с массами m. Составить уравнения движения. Определить для $n = 3$ частоты поперечных колебаний системы.

Ответ: Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_k = \frac{g}{l}\left[(n-k)\,x_{k-1} - (2n - 2k + 1)\,x_k + (n - k + 1)\,x_{k+1}\right],$$

где x_k — поперечное смещение k-й частицы (отсчет номеров ведется сверху);

$$k_1 = 0{,}646\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad k_2 = 1{,}515\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad k_3 = 2{,}505\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

54.52 (1345). Определить частоты свободных поперечных колебаний натянутой нити с закрепленными концами, несущей на себе n масс m, отстоящих друг от друга на расстояниях l. Натяжение нити P.

Ответ: $k = 2\sqrt{\dfrac{P}{ml}}\sin\dfrac{\pi s}{2n}; \quad 1 \leqslant s \leqslant n - 1.$

§ 55. Устойчивость движения

55.1 (1346). Двойной маятник, образованный двумя стержнями длиной l и материальными точками с массами m, подвешен на горизонтальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z. Исследовать устойчивость вертикального положения равновесия маятника. Массой стержней пренебречь.

Ответ: При $\dfrac{g}{l\omega^2} > 1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ вертикальное положение равновесия маятника устойчиво.

55.2 (1347). Весомый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, вращающемуся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (ось Oz направлена вниз). Определить положения относительного равновесия шарика и исследовать их устойчивость.

Ответ: При $\omega^2 \leqslant \frac{gc}{a^2}$ существуют два положения равновесия: а) $x=0$, $z=c$ (устойчивое); б) $x=0$, $z=-c$ (неустойчивое).

При $\omega^2 > \frac{gc}{a^2}$ существуют три положения равновесия: а) $x=0$, $z=+c$ (неустойчивое); б) $x=0$, $z=-c$ (неустойчивое); в) $z=\frac{gc^2}{\omega^2 a^2}$ (устойчивое).

55.3 (1348). Весомый шарик находится в полости гладкой трубки, изогнутой по параболе $x^2=2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. (Положительное направление оси Oz — вверх.)

Определить положение относительного равновесия шарика и исследовать его устойчивость.

Ответ: Существует единственное положение равновесия $z=0$; оно устойчиво при $\omega^2<g/p$ и неустойчиво при $\omega^2>g/p$; при $\omega^2=g/p$ — безразличное равновесие.

55.4 (1349). Материальная точка может двигаться по гладкой плоской кривой, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Потенциальная энергия $V(s)$ точки задана и зависит только от ее положения, определяемого дугой s, отсчитываемой вдоль кривой; $r(s)$ — расстояние точки от оси вращения.

Определить частоту малых колебаний точки около ее относительного положения равновесия.

Ответ: $k^2=\frac{1}{m}\left(\frac{d^2V}{ds^2}-\frac{d}{ds}\left[mr\frac{dr}{ds}\right]\omega^2\right)_{s=s_0}$, где s_0 определяется из уравнения

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{s=s_0}=\omega^2\left(mr\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}.$$

55.5 (1350). Материальная точка с массой m описывает окружность радиуса r_0 под действием центральной силы притяжения, пропорциональной n-й степени расстояния: $F=ar^n$.

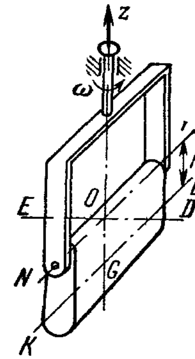
Найти условия, при выполнении которых траектория возмущенного движения близка к исходной окружности.

Ответ: При $n<-3$ движение неустойчивое, а при $n>-3$ устойчивое.

55.6 (1351). Твердое тело свободно качается вокруг горизонтальной оси NT, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω. Точка G — центр инерции тела; плоскость NTG является плоскостью симметрии, ось OG — главной осью инерции. Ось KL параллельна NT, ось ED проходит через точку O и перпендикулярна к NT и OG. Моменты инерции тела относительно осей OG, KL и ED

равны соответственно C, A и B; h — длина отрезка OG; M — масса тела. Определить возможные положения относительного равновесия и исследовать их устойчивость.

Ответ: Возможным положением относительного равновесия отвечают следующие значения угла отклонения линии OG от оси Oz:



К задаче 55.6.

а) $\varphi=0$ (устойчиво, если $B<C$; при $B>C$ оно устойчиво, если $\omega^2<\frac{Mgh}{B-C}$, и неустойчиво при $\omega^2>\frac{Mgh}{B-C}$);

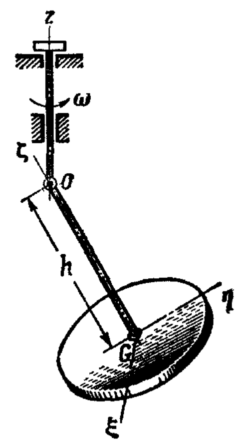
б) $\varphi=\pi$ (неустойчиво, если $B>C$; при $B<C$ оно устойчиво, если $\omega^2>\frac{Mgh}{C-B}$, и неустойчиво при $\omega^2<\frac{Mgh}{C-B}$);

в) $\varphi=\arccos\frac{Mgh}{(B-C)\,\omega^2}$ (существует, если $\omega^2>\frac{Mgh}{|B-C|}$; устойчиво при $B>C$ и неустойчиво при $B<C$).

55.7. При условии задачи 48.29 исследовать малые движения системы вблизи положения равновесия $\alpha=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и выяснить, устойчиво это положение равновесия или нет.

Ответ: Положение равновесия $\alpha=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ неустойчиво.

55.8 (1352). Определить положения относительного равновесия маятника, подвешенного с помощью универсального шарнира O к вертикальной оси, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω; маятник симметричен относительно своей продольной оси; A и C — его моменты инерции относительно главных центральных осей инерции ξ, η и ζ; h — расстояние центра тяжести маятника от шарнира. Исследовать устойчивость положений равновесия маятника и определить период колебаний около среднего положения равновесия.

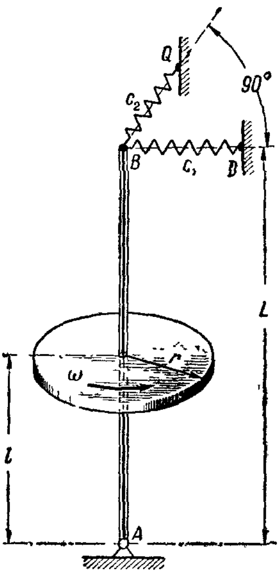


К задаче 55.8.

Ответ: Положения равновесия и их устойчивость определяются формулами, данными в ответе к задаче 55.6 (в них нужно положить $B=A+Mh^2$). Период колебаний

$$T=2\pi\omega\sqrt{\frac{(A+Mh^2)(A+Mh^2-C)}{(A+Mh^2-C)^2\,\omega^4-M^2g^2h^2}}.$$

55.9 (1353). Вертикальная ось симметрии тонкого однородного круглого диска радиуса r и весом Q может свободно вращаться вокруг точки A. В точке B оно удерживается двумя пружинами. Оси пружин горизонтальны и взаимно перпендикулярны, их жесткости соответственно равны c_1 и c_2, причем $c_2 > c_1$. Пружины крепятся к оси диска на расстоянии L от нижней опоры; расстояние диска от нижней опоры l. Определить угловую скорость ω, которую нужно сообщить диску для обеспечения устойчивости вращения.



К задаче 55.9.

Ответ: При $Ql < c_1L^2$ система устойчива при любой угловой скорости; при $Ql > c_2L^2$ система устойчива, если $\omega > \omega^*$, где

$$\omega^* = \frac{\sqrt{gl\,(r^2+4l^2)}}{r^2}\left\{\sqrt{1-\frac{c_1L^2}{Ql}} + \sqrt{1-\frac{c_2L^2}{Ql}}\right\}.$$

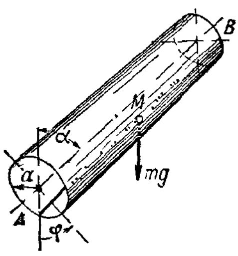
При $c_1L^2 < Ql < c_2L^2$ система неустойчива при любой угловой скорости.

55.10 (1354). Материальная точка M движется под действием силы тяжести по поверхности кругового цилиндра радиуса a, ось которого наклонена под углом α к вертикали. Исследовать устойчивость движения по нижней ($\varphi = 0$) и верхней ($\varphi = \pi$) образующим. Определить период колебаний при движении по нижней образующей.

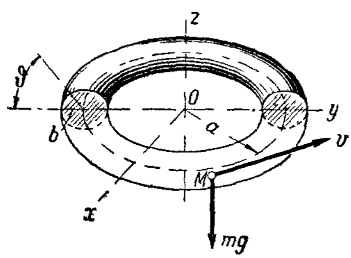
Ответ: Движение по верхней образующей неустойчиво; период колебаний при возмущении движения вдоль нижней образующей

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g\sin\alpha}}.$$

55.11 (1355). Материальная точка вынуждена двигаться по гладкой поверхности тора, заданного параметрическими уравнениями



К задаче 55.10.



К задаче 55.11.

$x = \rho\cos\psi$; $y = \rho\sin\psi$; $z = b\sin\vartheta$; $\rho = a + b\cos\vartheta$ (ось z направлена вертикально вверх). Найти возможные движения точки, характеризующиеся постоянством угла ϑ, и исследовать их устойчивость.

Ответ: Значения $\vartheta = \vartheta_i = \text{const}$ находятся из уравнения

$$(1 + \alpha \cos \vartheta_i) = -\beta \operatorname{ctg} \vartheta_i,$$

где $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{g}{a\omega^2}$; $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$. Это уравнение допускает два существенно различных решения:

$$-\frac{\pi}{2} < \vartheta_1 < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_2 < \pi.$$

Движение, соответствующее первому решению, устойчиво, второму — неустойчиво.

55.12 (1356). Исследовать устойчивость движения обруча, равномерно катящегося с угловой скоростью ω по горизонтальной плоскости. Плоскость обруча вертикальна; радиус обруча a.

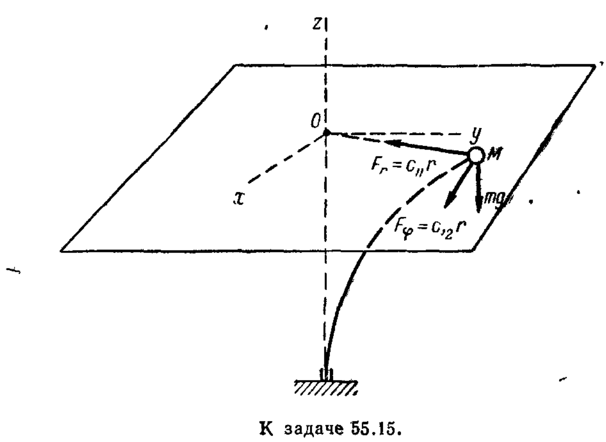
Ответ: Движение устойчиво, если $\omega^2 > \frac{g}{4a}$.

55.13 (1357). Колесо с четырьмя симметрично расположенными спицами катится по шероховатой плоскости. Плоскость колеса вертикальна. Ободья колеса и спицы сделаны из тонкой тяжелой проволоки. Радиус колеса a, скорость центра его в исходном движении v. Исследовать устойчивость движения.

Ответ: Движение устойчиво при $v^2 > \dfrac{\pi + 2}{4\left(\pi + \frac{4}{3}\right)} ag$.

55.14 (1358). Исследовать устойчивость движения однородного обруча радиуса a, вращающегося вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω. Нижняя точка обруча соприкасается с горизонтальной плоскостью.

Ответ: Движение устойчиво при $\omega^2 > \frac{2}{3} \frac{g}{a}$.



К задаче 55.15.

55.15 (1359). На материальную точку массы m, отклоненную от положения равновесия, действуют: сила F_r, по величине пропорциональная отклонению $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ из этого положения и направленная к нему; сила F_φ, перпендикулярная к первой (боковая сила), по величине тоже пропорциональная отклонению r:

$$|F_r| = c_{11}r, \quad F_\varphi = c_{12}r.$$

Исследовать методом малых колебаний устойчивость равновесного положения точки.

Указание. В таких условиях будет находится точечная масса, закрепленная на свободном конце сжатого и скрученного стержня (с одинаковыми главными жесткостями на изгиб), нижний конец которого заделан. Прямолинейной форме стержня соответствует состояние равновесия. Коэффициенты c_{11}, c_{12} зависят от сжимающей силы, скручивающего момента, длины стержня и от жесткостей на изгиб и кручение.

Ответ: Равновесие неустойчивое.

55.16 (1360). При исследовании устойчивости движения точки в предыдущей задаче принять во внимание силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости: $R_x = -\beta\dot{x}$, $R_y = -\beta\dot{y}$ (β — коэффициент сопротивления).

Ответ: Равновесие устойчиво при $\beta^2 c_{11} > mc_{12}^2$.

55.17 (1361). Если у стержня, описанного в задаче 50.15, жесткости на изгиб не равны, то реакции конца стержня, действующие на массу m, определяются выражениями

$$F_x = -c_{11}x + c_{12}y, \quad F_y = c_{21}x - c_{22}y.$$

Выяснить методом малых колебаний условия устойчивости равновесия.

Ответ: При $(c_{11} - c_{22})^2 + 4c_{12}c_{21} > 0$ равновесие устойчиво.

55.18 (1362). Уравнение движения муфты центробежного регулятора двигателя имеет вид

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = A(\omega - \omega_0),$$

где x — перемещение муфты регулятора, m — инерционный коэффициент системы, β — коэффициент сопротивления, c — жесткость пружин регулятора, ω — мгновенная и ω_0 — средняя угловая скорость машины, A — постоянная. Уравнение движения машины имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = -Bx$$

(B — постоянная, J — приведенный момент инерции вращающихся частей двигателя).

Установить условия устойчивости системы, состоящей из двигателя и регулятора.

Ответ: Система устойчива при

$$AB < J\frac{c\beta}{m}$$

(c, β, J, A, B считаются положительными).

55.19 (1363). Симметричный волчок, острие которого помещено в неподвижном гнезде, вращается вокруг своей вертикально расположенной оси. На него поставлен второй симметричный волчок, который также вращается вокруг вертикальной оси. Острие оси второго волчка опирается на гнездо в оси первого волчка. M и M' — массы верхнего и нижнего волчков, C и C' — их моменты инерции относительно осей симметрии; A и A' — моменты инерции относительно горизонтальных осей, проходящих через острия; c и c' — расстояния центров тяжести волчков от соответствующих остриев; h — расстояние между остриями. Угловые скорости волчков Ω и Ω'. Вывести условия устойчивости системы.

Ответ: Система устойчива, если все корни уравнения четвертой степени

$$[AA'+Mh^2(A-Mc^2)]\lambda^4+[A'C'\Omega'+C\Omega(A'+Mh^2)]\lambda^3+$$
$$+[A(M'c'+Mh)g+(A'+Mh^2)Mcg+CC'\Omega\Omega']\lambda^2+$$
$$+[C\Omega(M'c'+Mh)g+C'\Omega'Mcg]\lambda+Mc(M'c'+Mh)g^2=0$$

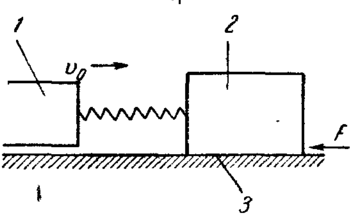
различны и вещественны.

55.20. Деталь *1* перемещается поступательно с постоянной скоростью v_0 и через пружину передает движение ползуну *2*. Сила трения между ползуном и направляющими *3* зависит от скорости ползуна v следующим образом:

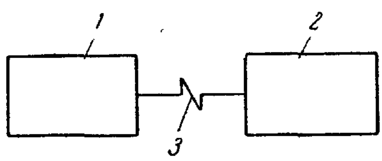
$$H=H_0\operatorname{sign}v-\alpha v+\beta v^3,$$

где H_0, α, β — положительные коэффициенты. Определить, при каких значениях v_0 равномерное движение ползуна является устойчивым.

Ответ: $v_0^2>\frac{\alpha}{3\beta}$.



К задаче 55.20.



К задаче 55.21.

55.21. Агрегат, состоящий из двигателя *1* и машины *2*, соединенных упругой муфтой *3* с жесткостью c, рассматривается как двухмассовая система. К ротору двигателя, имеющему момент инерции J_1, приложен момент M_1, зависящий от угловой скорости ротора $\dot\varphi$ следующим образом:

$$M_1=M_0-\mu_1(\dot\varphi-\omega_0).$$

К валу машины, имеющему момент инерции J_2, приложен момент сил сопротивления, зависящий от угловой скорости вала $\dot\psi$:

$$M_2=M_0-\mu_2(\dot\psi-\omega_0).$$

Коэффициенты μ_1 и μ_2 положительны. Определить условия, при которых вращение системы с угловой скоростью ω_0 является устойчивым.

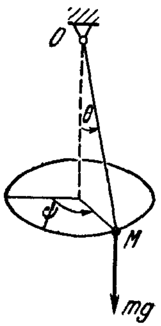
Ответ: $\mu_1>\mu_2$; $\frac{J_2}{J_1}>\frac{\mu_2}{\mu_1}$.

55.22. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_4,$$
$$\dot{x}_3 = -4x_1 + x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_4 = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4.$$

Определить собственные числа и устойчивость системы.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 - \lambda_4 = 0$; движение устойчиво.



К задаче 55.24.

55.23. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2,$$
$$\dot{x}_3 = -5x_1 - 2x_3 - 2x_4,$$
$$\dot{x}_4 = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4.$$

Определить собственные числа и устойчивость системы.

Ответ: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$; движение неустойчиво (сравнить с ответом к задаче 55.22).

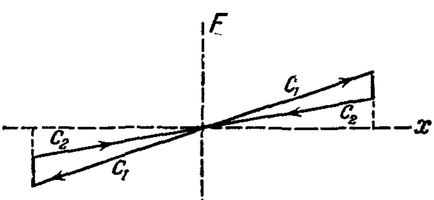
55.24. Исследовать устойчивость установившегося движения ($\theta = \text{const}$, $\dot{\psi} = \text{const}$) сферического маятника относительно величин θ, $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$.

Указание. Воспользоваться линейной связкой интегралов.

Ответ: Движение устойчиво.

§ 56. Нелинейные колебания

56.1 (1291). При испытаниях рессор была получена «треугольная» характеристика изменения упругой силы. При отклонении рессоры от положения статического равновесия имеет место верхняя ветвь (c_1) характеристики, при возвращении — нижняя ветвь (c_2) характеристики. В начальный момент рессора отклонена от положения статического равновесия на x_0 и не имеет начальной скорости. Масса рессоры m; коэффициенты жесткости рессоры c_1 и c_2. Написать уравнения свободных колебаний рессоры для первой половины полного периода колебаний и найти полный период колебаний T.



К задаче 56.1.

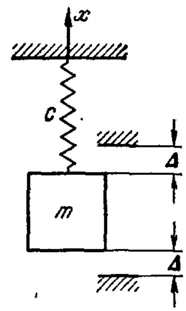
Ответ: При возвращении рессоры в положение статического равновесия $x = x_0 \cos k_2 t$; при отклонении от положения статического равновесия

$$x = -x_0 \frac{k_2}{k_1} \sin\left(k_1 t - \frac{\pi}{2}\frac{k_1}{k_2}\right); \quad T = \pi\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right);$$
$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}.$$

56.2 (1292). Определить закон убывания амплитуд свободных колебаний рессоры, рассмотренной в предыдущей задаче. При записи свободных колебаний был получен следующий ряд последовательно убывающих амплитуд: 13,0 *мм*, 7,05 *мм*, 3,80 *мм*, 2,05 *мм* и т. д. Определить согласно данным виброграммы отношение коэффициентов жесткости c_1/c_2, соответствующих верхней и нижней ветвям «треугольной» характеристики.

Ответ: Последовательные значения амплитуд через каждые полпериода колебаний убывают по закону геометрической прогрессии со знаменателем k_2/k_1; $c_1/c_2 = 3{,}4$.

56.3. Масса m колеблется на пружине, коэффициент жесткости которой c. На одинаковых расстояниях Δ от положения равновесия установлены жесткие упоры. Считая, что удары об упоры происходят с коэффициентом восстановления, равным единице, определить закон движения системы при периодических колебаниях с частотой ω. Найти возможные значения ω.



К задаче 56.3.

Ответ: $x = \dfrac{\Delta}{\sin\dfrac{k\pi}{2\omega}} \sin k\left(t - \dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$ $\left(k^2 = \dfrac{c}{m}\right)$;

$$\omega \geqslant k.$$

56.4. Решить предыдущую задачу в предположении, что имеется только нижний упор.

Ответ: $x = -\dfrac{\Delta}{\cos\dfrac{\pi k}{\omega}} \cos\left(\dfrac{\pi}{\omega} - t\right)$ при $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{\omega}$; $k \leqslant \omega \leqslant 2k$.

56.5. Определить зависимость амплитуды первой гармоники свободных колебаний от их частоты в системе, уравнение движения которой имеет вид

$$m\ddot{x} + F_0 \operatorname{sign} x + cx = 0.$$

Ответ: $a_1 = \dfrac{4F_0}{\pi(m\omega^2 - c)}$.

56.6. Движение системы описывается уравнением

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 + k^2x^2 - \alpha^2)\,\dot{x} + k^2x = 0.$$

Определить амплитуду автоколебательного процесса, возникающего в системе; исследовать его устойчивость.

Ответ: $a = \alpha/k$; автоколебания устойчивы в большом.

56.7 Выявить условия, при которых в системе, рассмотренной в задаче 55.20, могут возникнуть автоколебания, близкие к гармоническим колебаниям частоты $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, где c — коэффициент жесткости пружины, m — масса ползуна. Определить приближенно амплитуду этих автоколебаний.

Ответ: $0{,}8\dfrac{\alpha}{3\beta} < v_0^2 < \dfrac{\alpha}{3\beta}$; $a^2 \approx \dfrac{4}{k^2}\left(\dfrac{\alpha}{3\beta} - v_0^2\right)$.

56.8. Предполагая, что в системе, рассмотренной в задаче 55.20, сила трения H постоянна и равна H_2 при $v \gtrless 0$ и равна H_1 при $v = 0$ («трение покоя»), определить период автоколебаний. Принять, что масса ползуна равна m, а коэффициент жесткости пружины c.

Ответ: $T = t_1 + \frac{1+\alpha^2}{k\alpha}(1 - \cos kt_1)$, где $\alpha = \frac{(H_1 - H_2)k}{cv_0}$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$, t_1 — наименьший корень уравнения

$$\alpha \sin kt_1 = \cos kt_1 - 1.$$

56.9. Масса m связана с неподвижным основанием пружиной с жесткостью c и демпфером сухого трения, величина силы сопротивления в котором не зависит от скорости и равна H. На одинаковых расстояниях Δ от положения равновесия установлены жесткие упоры. Считая, что удары об упоры происходят с коэффициентом восстановления, равным единице, определить значение H, при котором вынуждающая сила $F \cos \omega t$ не может вызвать субгармонических резонансных колебаний, имеющих частоту ω/s (s — целое число).

Указание. Определить условия существования периодического режима, близкого к свободным колебаниям системы с частотой ω/s.

Ответ: Для четного s $H > 0$; для нечетного s

$$H > F \frac{\omega k}{|k^2 - \omega^2|} \operatorname{ctg} \frac{\pi s k}{2\omega} \quad \left(\frac{\omega}{s} > k\right).$$

56.10. Центр однородного кругового цилиндра, катящегося без скольжения по горизонтальной плоскости, соединен пружиной с неподвижной точкой O, находящейся на одной горизонтали с центром диска. Масса цилиндра равна m, коэффициент жесткости пружины c. В положении равновесия пружина не деформирована, длина ее равна l.

Определить зависимость периода малых колебаний цилиндра около положения равновесия от амплитуды a, сохранив в уравнении движения члены, содержащие третью степень перемещения.

Ответ: $T = 4l\sqrt{6\frac{m}{c}} \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{m}{c}} \frac{l}{a} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода.

56.11. Методом малого параметра определить амплитуду a и период T автоколебаний, возникающих в системе, движение которой определяется уравнением

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu \{(\alpha^2 - x^2)\dot{x} - \gamma x^3\}.$$

Ответ: $a = 2\alpha$; $T = \frac{2\pi}{k}\left(1 - \frac{3\mu\gamma\alpha^2}{2k^2}\right)$.

56.12. Уравнения движения маятника в среде с сопротивлением и постоянным моментом, действующим только в одном направлении, имеют вид

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = M_0 \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} > 0,$$
$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \dot{\varphi} < 0,$$

где h, k и M_0 — постоянные величины.

Считая, что $\frac{2h}{k} \ll 1$, $\frac{M_0}{k^2} \ll 1$, применить метод медленно меняющихся коэффициентов для нахождения установившегося движения маятника.

Ответ: Устойчивые автоколебания. Радиус ρ предельного цикла на плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$ равен

$$\frac{1}{hT}\frac{M_0}{k^2}, \quad \text{где} \quad T = \frac{\pi}{k}.$$

56.13. Применяя в предыдущей задаче метод точечных преобразований, найти неподвижную точку преобразования.

Ответ: $\varphi_0 = \frac{M_0}{k^2}\frac{1}{1-e^{-hT}}$; $\dot{\varphi}_0 = 0$.

ДОБАВЛЕНИЕ

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ (СИ)

В декабре 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла единую Международную систему единиц (СИ).

Процесс введения этой системы в практику (и особенно тех ее единиц, которые еще не получили широкого распространения) будет осуществляться постепенно, в течение ряда лет; в переходный период, конечно, будут сохраняться и традиционные единицы систем СГС и МкГС, использованные в настоящем «Сборнике».

Приведем для справок выписку из таблиц Международной системы единиц по ГОСТу 9867-61:

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенные обозначения единиц	
		русские	латинские или греческие
	Основные единицы		
Длина	Метр	*м*	m
Масса	Килограмм	*кг*	kg
Время	Секунда	*сек*	s
Сила электрического тока	Ампер	*а*	A
	Дополнительные единицы		
Плоский угол	Радиан	*рад*	rad
Телесный угол	Стерадиан	*стер*	sr
	Производные единицы		
Площадь	Квадратный метр	*м²*	m²
Объем	Кубический метр	*м³*	m³
Частота	Герц (1/*сек*)	*гц*	Hz
Объемная масса (плотность)	Килограмм на куб. метр	*кг/м³*	kg/m³
Скорость	Метр в секунду	*м/сек*	m/s
Угловая скорость	Радиан в секунду	*рад/сек*	rad/s
Ускорение	Метр на секунду в квадрате	*м/сек²*	m/s²
Угловое ускорение	Радиан на секунду в квадрате	*рад/сек²*	rad/s²
Сила	Ньютон (*кг · м/сек²*)	*н*	N
Давление (механическое напряжение)	Ньютон на кв. метр	*н/м²*	N/m²
Динамическая вязкость	Ньютон · секунда на кв. метр	*н · сек/м²*	N · s/m²
Кинематическая вязкость	Кв. метр на секунду	*м²/сек*	m²/s
Работа, энергия, количество теплоты	Джоуль (*н · м*)	*дж*	J
Мощность	Ватт (*дж/сек*)	*вт*	W
Количество электричества	Кулон (*а · сек*)	*к*	C
Электрическое напряжение, разность потенциалов, электродвижущая сила	Вольт (*вт/а*)	*в*	V
Напряженность электрического поля	Вольт на метр	*в/м*	V/m
Электрическое сопротивление	Ом (*в/а*)	*ом*	Ω
Электрическая емкость	Фарада (*к/в*)	*ф*	F
Поток магнитной индукции	Вебер (*к/ом*)	*вб*	Wb
Индуктивность	Генри (*вб/а*)	*гн*	H
Магнитная индукция	Тесла (*вб/м²*)	*тл*	T
Напряженность магнитного поля	Ампер на метр	*а/м*	A/m

Определения основных единиц

Метр — длина, равная 1 650 763,73 длин волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона — 86.

Килограмм — единица массы — представлен массой международного прототипа килограмма.

Секунда — 1/31556925,9747 часть тропического года для 1900 г. января 0 в 12 часов эфемеридного времени.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м* один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ единицы силы Международной системы на каждый метр длины.

Некоторые переводные множители

1 *кГ* = 9,80665 *н* ≈ 9,81 *н*

1 *дина* = 10^{-5} *н*

1 *кГ/см*^{2} = 98066,5 *н/м*^{2}

1 *дина/см*^{2} = 0,1 *н/м*^{2}

1 *кГм* = 9,80665 *дж* ≈ 9,81 *дж*

1 *эрг* = 10^{-7} *дж*

1 *кал* = 4,1868 *дж*

Иван Всеволодович Мещерский

Сборник задач по теоретической механике

М., 1975 г., 448 стр. с илл.

Редактор *И. А. Маркузон*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Н. Б. Румянцева*

Печать с матриц. Подписано к печати 25/III 1975 г. Бумага $60 \times 90^{1}/_{16}$, тип. № 3. Физ. печ. л. 28. Условн. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 27,98. Тираж 155 000 экз. Цена книги 88 коп. Заказ № 1952.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.